Др Војислав Андрић • Маријана Стефановић
Ђорђе Голубовић • Вељко Ћировић

МАТЕМАТИКА 8

Уџбеник са збирком задатака
за осми разред основне школе

1. део

Математички клуб
Диофант

МАТЕМАТИКА 8

Уџбеник са збирком задатака за осми разред основне школе

1. део

ФОНДАЦИЈА АЛЕК КАВЧИЋ Редакција Фондације Алек Кавчић

Аутор: др Војислав Андрић, Маријана Стефановић, Ђорђе Голубовић, Вељко Ћировић

Рецензенти: др Владимир Мићић, проф. математике
Вера Јоцковић, проф. математике
Александра Милошевић, ОШ „Жарко Зрењанин ", Нови Сад

Главни уредник: Смиљка Наумовић

Предметни уредник: др Радослав Божић

Илустрације: Марија Поповић, Shutterstock

Лектура и коректура: Милица Шаренац, др Драгана Бедов

Дизајн: Слађана Николић

Прелом: Срђан Попов

Математички клуб Диофант Издавач: Математички клуб „Диофант", Поп Лукина 38, Ваљево

За издавача: др Војислав Андрић

Штампа: Birograf Comp d. o. o., Земун

Тираж: 3.000

Прво издање, 2022.

ISBN: 978-86-6148-000-3

CIP - Каталогизација у публикацији
Народна библиотека Србије, Београд

37.016:51(075.2)

МАТЕМАТИКА 8 : уџбеник са збирком задатака за осми разред основне школе. Део 1 / Војислав Андрић ... [и др.] ; [илустрације Марија Поповић]. - 1. изд. - Ваљево : Математички клуб „Диофант", 2022 (Земун : Birograf Comp). - 200 стр. : илустр. ; 29 cm

Тираж 3.000. - Решења: стр. 178-198. - Регистар. - Библиографија: стр. 200.

ISBN 978-86-6148-000-3

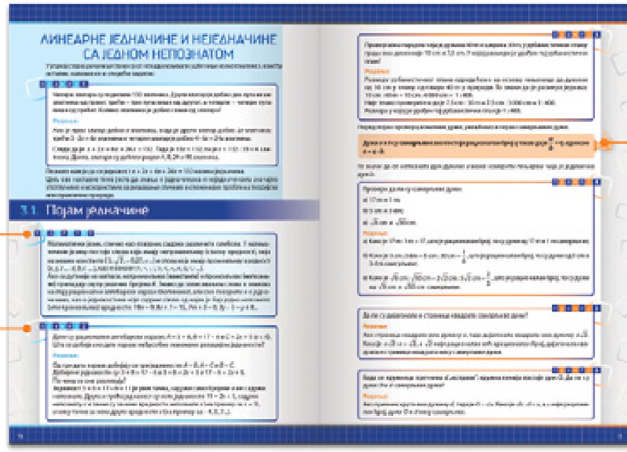
1. Андрић, Војислав, 1953- [аутор]

COBISS.SR-ID 65363721

Министарство просвете, науке и технолошког развоја Републике Србије одобрило је овај уџбенички комплет за употребу у школама решењем број:
650-02-00309/2021-07 од 12. 04. 2022. године.

САДРЖАЈ

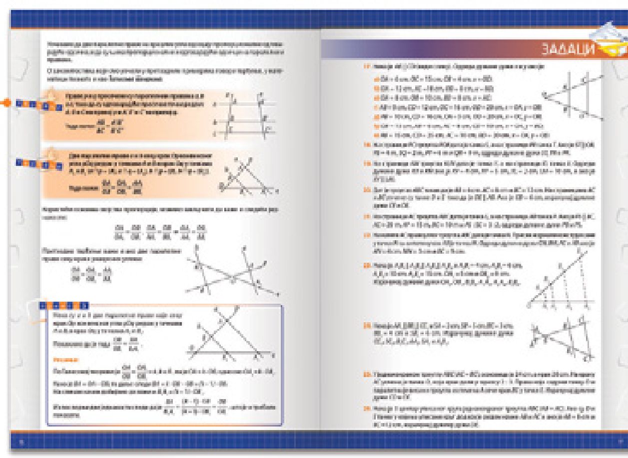
ВОДИЧ



Подсетник – подсећање на претходно усвојено градиво

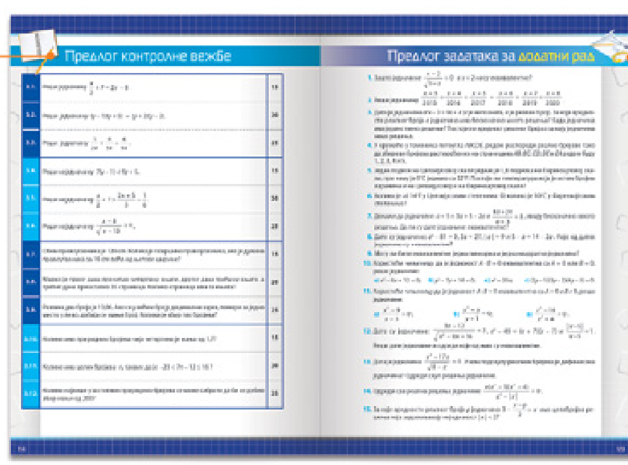
Пример – решени примери за разумевање изложеног градива у лекцији

Дефиниција – објашњење математичког појма



Тврђење – математичко тврђење које се користи у процесу математичког закључивања

Задаци – задаци за увежбавање поређани по тежини и сложености



Предлог контролне вежбе – контролни задаци на крају тематске целине за самопроцену знања ученика дати су диференцирано и по образовним нивоима

Предлог задатака за додатни рад – задаци засновани на проширењима наставних садржаја примерено узрасту и математичким способностима ученика

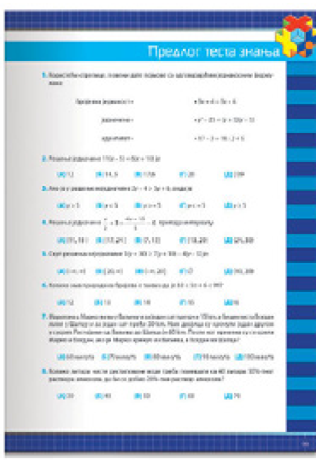
Драги ученици,

Пред вама је први део уџбеника Математика 8 у ком су обрађене наставне теме: „Сличност”, „Тачка, права и раван”, „Линеарне једначине и неједначине” и „Призма”. Надамо се да ће вам уџбеник бити од користи приликом усвајања нових и провере стечених знања. Верујемо да ће бити од помоћи и наставницима при осмишљавању редовне и додатне наставе и њене реализације.

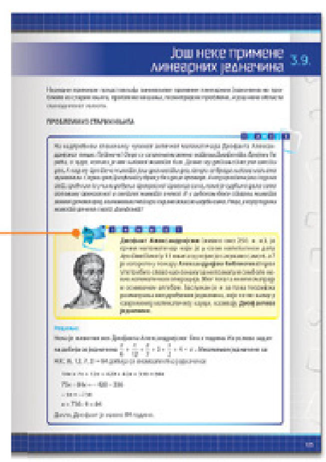
Захваљујемо уредницима на труду да књига буде прегледна и усклађена са стандардима квалитета уџбеника, као и рецензентима на примедбама и сугестијама у настојању да уџбеник буде користан.

Аутори

Питалице – кратки задаци на које се траже брзи одговори (да/не) и који се углавном решавају без великог рачунања



Предлог теста знања – тестови на крају сваке тематске целине садрже по осам задатака вишеструког избора углавном са пет понуђених одговора



Занимљивост – интересантне чињенице у вези са наставним садржајем у оквиру одређене лекције

Алгебарски садржаји

Обнављање градива из **7.** разреда

У седмом разреду упознали смо садржаје везане за квадрат и корен реалног броја, степеновање бројева (када је изложилац природан број), полиноме, операције са полиномима и применама полинома... Задаци који следе имају циљ да набројане садржаје обновимо:

1. Израчунај:

а) 17^2; **б)** $(-9)^2$; **в)** $\left(\frac{3}{8}\right)^2$; **г)** $1{,}4^2$; **д)** -5^2.

2. Одреди:

а) $\sqrt{49}$; **б)** $\sqrt{\frac{25}{81}}$; **в)** $\sqrt{0{,}36}$; **г)** $\sqrt{(-7)^2}$.

3. Израчунај вредност израза: $\frac{2^4 \cdot 2^5}{2^6 : 2^3}$.

4. Упрости израз **а)** $(x+1)(2x-3) - x(x+4)$; **б)** $(y-3)^2$.

5. Растави на чиниоце изразе: **а)** $x^2 - 49$; **б)** $y^3 - 2y^2 + 3y$.

6. Реши по x пропорцију $x : 9 = 16 : 24$.

7. Ако 3 свеске коштају 95 динара, колико свезака се може купити за 380 динара?

8. Израчунај: $\left(\frac{2}{3} - \frac{4}{5}\right)^2$.

9. Одреди: $\sqrt{1 + \frac{9}{16}}$.

10. Израчунај вредност израза $\frac{\left(a^m \cdot a^n\right)^3}{\left(a^m : a^n\right)^2}$ $(m, n \in N, m > n)$.

11. Упростити израз **а)** $(x^2+1)(x^2-1) - (x^2-2)^2$; **б)** $(y^2 - 4y)^2$.

12. Раставити на чиниоце израз $(x^4 + 2x^2 + 1) - x^2$.

13. Суму од 1 020 динара подели у размери $a : b : c$, ако је $a : b = 1 : 2$ и $b : c = 3 : 4$.

14. Ако три молера за 4 дана окрече 5 станова, колико станова ће окречити 5 молера за 12 дана?

Обнављање градива

Геометријски садржаји

У седмом разреду упознали смо садржаје повезане са **Питагорином теоремом**, многоуглом и кругом и угловима на кругу, као и обимом и површином круга и примену...
Задаци који следе имају циљ да набројане садржаје обновимо:

15. Катете правоуглог троугла имају дужину 5 cm и 12 cm. Израчунај дужину хипотенузе тог правоуглог троугла.

16. Страница квадрата има дужину 10 cm. Одреди дужину дијагонале квадрата.

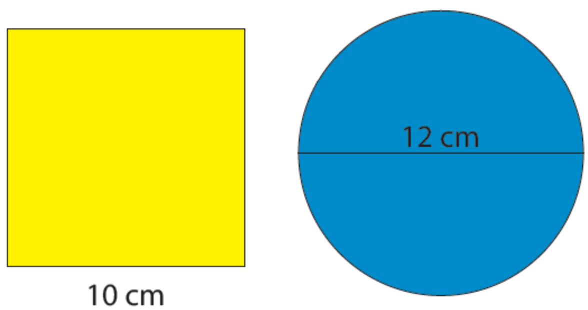
17. Страница једнакостраничног троугла има дужину 12 cm. Израчунај дужине полупречника описаног и уписаног круга у тај троугао.

18. Колико дијагонала има правилни многоугао који има 16 страница?

19. Може ли збир унутрашњих углова конвексног многоугла бити 1 000°?

20. Центар кружнице описане око троугла *ABC* је тачка *O*. Колики је $\measuredangle ACB$, ако је $\measuredangle AOB = 37°$?

21. Упореди површину квадрата чија страница има дужину 10 cm и круга чији пречник има дужину 12 cm?



22. Дужине страница правоуглог троугла односе се као 3 : 4 : 5. Израчунај обим троугла, ако је његова површина 54 cm².

23. Дијагонала квадрата има дужину 10 cm. Колика је страница квадрата који има осам пута већу површину од датог?

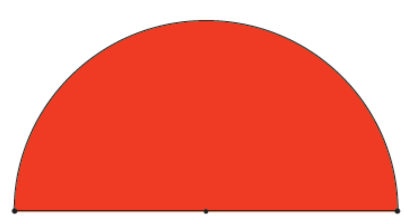
24. Збир дужина страница једнакостраничног троугла је 20 cm, а њихове површине се разликују за $30\sqrt{3}$ cm². Колика је разлика њихових обима?

25. Постоји ли конвексан многоугао који има четири оштра угла?

26. Израчунај збир унутрашњих углова конвексног многоугла који има 77 дијагонала?

27. У круг је уписан четвороугао *ABCD*. Одредити углове $\measuredangle CDA$ и $\measuredangle DAB$, ако су мерни бројеви углова $\measuredangle ABC = 100°$ и $\measuredangle BCD = 78°$.

28. Полукруг има обим $16 + 8\pi$. Колика је површина тог полукруга?



Иницијални тест

1. На једном делу дечјег игралишта постављена је кружна подлога полупречника 5 m. Колику површину игралишта покрива та подлога? Прикажи поступак и заокружи тачан одговор.

$5\ m^2$ $\quad 5\pi\ m^2$ $\quad 10\ m^2$ $\quad 10\pi\ m^2$ $\quad 25\ m^2$ $\quad 25\pi\ m^2$

2. Израчунај 12% од 800. Прикажи поступак и запиши тачан одговор.

Одговор: ___________ .

3. Колико дијагонала „полази“ из темена конвексног осмоугла? Прикажи поступак и заокружи тачан одговор.

2 3 4 5 6 7

4. Дужине основица једнакокраког трапеза су 12 cm и 6 cm, а његова висина је 4 cm. Израчунај површину и обим тог трапеза. Прикажи поступак и запиши тачан одговор.

Површина трапеза је: _____________ cm^2. Обим трапеза је: ____________________ cm.

5. Израчунај вредност израза: $\sqrt{169-25}\cdot\sqrt{\frac{(-3)^2}{16}}$. Прикажи поступак и заокружи тачан одговор.

–9 6 9 –6

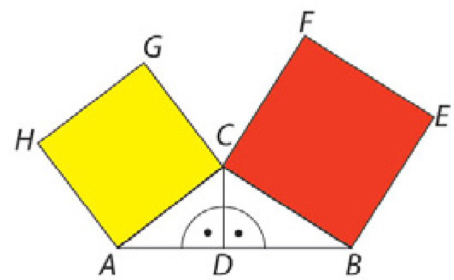
6. Израчунај вредност израза: $\frac{3^2\cdot 3^6}{3^9:3^5}$, прикажи поступак и заокружи тачан одговор.

9 27 66 81 144 243

7. Дати су полиноми: $A = 2x - 5$, $B = x + 1$ и $C = 2x^2 - 9x + 14$.
Одреди полином $D = AB - C$, прикажи поступак и заокружи тачан одговор.

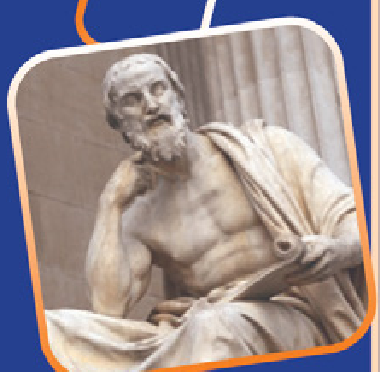
$6x + 9$ $\qquad$ $6x - 19$ $\qquad$ $-12x + 19$ $\qquad$ $4x^2 - 16x + 14$ $\qquad$ $4x^2 - 12x + 9$

8. Израчунај збир површина обојених квадрата на слици (десно) ако је дужина дужи $AB = 9$ cm, $AC = 5$ cm и $CD = 3$ cm. Прикажи поступак и запиши тачан одговор.



Збир површина обојених квадрата на слици је _________ cm².

1 СЛИЧНОСТ



ЗАНИМЉИВОСТ

КАКО ЈЕ ТАЛЕС ИЗМЕРИО ВИСИНУ КЕОПСОВЕ ПИРАМИДЕ?

Кеопсова пирамида је највећа и најстарија од три египатске пирамиде код Гизе и уједно највећа пирамида на свету. Често је називају „Велика пирамида". Изграђена је као гробница египатског фараона Кеопса у XXVI веку п. н. е.

Висока је 138,75 m, дужине 225 m и обухвата површину од 5,3 ha. На њој је радило 100 000 људи двадесет година, по три месеца годишње, у време поплаве Нила, када се није могла обрађивати земља. У њу је уграђено око 2,5 милиона блокова. Камени блокови су били тешки од 2 до 4 тоне (највише 7,5 тона).

Велики гранитни неотесани блокови, којима је грађен плафон за краљевски салон, тежили су преко 50 тона. Према писању Херодота, припреме за градњу Кеопсове пирамиде трајале су више од 20 година.

За античку цивилизацију велики је проблем био израчунавање висине Кеопсове пирамиде. Проблем је решио грчки математичар Талес из Милета. Како? Детаљно и систематично проучавање наредних садржаја даће нам одговор на ово занимљиво питање.

Талес из Милета (624. г. п. н. е. – 547. г. п. н. е.) био је активан као математичар и као државник. Сматра се да је он први утврдио величину Сунца (сунчевог круга), као и величину Месеца, за коју је тврдио да износи седамсто двадесети део Сунчевог круга. Антички историчари наводе да је код Египћана учио геометрију и да је први у круг уцртао правоугли троугао. У Египту је размишљао о поплави Нила и закључио да „егесије", тј. годишњи ветрови на Егејском мору, ометају воду да тече у море. Ту је научио и усавршио геометрију. Хијероним прича да је Талес измерио и висину пирамида по њиховој сенци, посматрајући тренутак када су наша сенка и наша висина исте дужине.

СЛИЧНОСТ

У свакодневном животу појам сличности често се помиње, али тешко да ће нам неко прецизно дефинисати тај појам. Знамо да су слични: коцка и коцкица, мали и велики круг, симболи на рачунару за исто слово у оквиру једног фонта.

a a a a a a a a a a a a a a a a

Ако се на интернету претражује појам „сличност", онда ће нас највећи део одредница упутити на математички, тачније, геометријски појам сличности. Циљ ове наставне теме јесте да се детаљније упознамо са појмом сличности у геометрији и укажемо да – поред подударности која подразумева да се подударне фигуре могу довести до поклапања – постоји и сличност која указује на једнакост облика, а различитост величина. Увод у разматрање сличности у вези је са појмом пропорционалности.

1.1. Пропорционалност дужи

Да се подсетимо: Размера представља однос две величине које се мере истим јединицама, а једнакост двеју размера одређује пропорцију.

Величине a и b пропорционалне су са величинама c и d ако важи $a:b = c:d$.

Тада је $\frac{a}{b}=\frac{c}{d}$, односно $ad=bc$.

Ако су величине a, b, c и d дужине дужи, и ако су размере $\frac{a}{b}$ и $\frac{c}{d}$ једнаке, тада важи пропорција $a:b=c:d$, а за те дужи кажемо да су пропорционалне.

пример 1

Дате су дужи $a = 4$ cm, $b = 3$ cm и $c = 12$ cm. Одреди дуж x тако да важи пропорција $a:b=c:x$.

Решење:
Из $a:b=c:x$ следи да је $4 : 3 = 12 : x$, односно $4 \cdot x = 3 \cdot 12$. Одатле је $x = 3 \cdot \frac{12}{4}$, односно $x = 9$ cm.

Непознату дуж x зовемо и четврта (геометријска) пропорционала.

пример 2

Географска карта је конструисана у размери 1 : 2 000 000. Колико је ваздушном линијом растојање између Ваљева и Шапца, ако је на географској карти то растојање једнако 3 cm?

Решење:

Растојање између Ваљева и Шапца ваздушном линијом – обележимо са x.
Како размера на географској карти одговара размери у природи, важи једнакост $1 : 2\,000\,000 = 3 : x$.
Решавањем ове пропорције добија се да је $1 \cdot x = 2\,000\,000 \cdot 3$, па је $x = 6\,000\,000$ cm.
Како је 6 000 000 cm = 60 000 m = 60 km, из тога следи да је растојање између Ваљева и Шапца ваздушном линијом једнако 60 km.

пример 3

Правоугаона парцела чија је дужина 40 m и ширина 30 m, у урбанистичком плану града има димензије 10 cm и 7,5 cm. У којој размери је урађен тај урбанистички план?

Решење:

Размеру урбанистичког плана одредићемо на основу чињенице да дужини од 10 cm у плану, одговара 40 m у природи. То значи да је размера једнака: 10 cm : 40 m = 10 cm : 4 000 cm = 1 : 400.

Није тешко проверити и да је 7,5 cm : 30 m = 7,5 cm : 3 000 cm = 1 : 400.

Размера у којој је урађен тај урбанистички план је 1 : 400.

Поред појма пропорционалних дужи, увешћемо и појам самерљивих дужи.

Дужи *a* и *b* су самерљиве ако постоји рационалан број *q* такав да је $\frac{a}{b} = q$, односно $a = q \cdot b$.

То значи да се непозната дуж дужине a може измерити лењиром чија је јединична дуж b.

пример 4

Провери да ли су самерљиве дужи:

а) 17 m и 1 m;

б) 5 cm и 3 dm;

в) $\sqrt{8}$ cm и $\sqrt{50}$ cm.

Решење:

а) Како је 17 m : 1 m = 17, што је рационалан број, то су дужи од 17 m и 1 m самерљиве;

б) Како је 5 cm : 3 dm = 5 cm : 30 cm = $\frac{1}{6}$, што је рационалан број, то су дужи од 5 cm и 3 dm самерљиве;

в) Како је $\sqrt{8}$ cm : $\sqrt{50}$ cm = $2\sqrt{2}$ cm : $5\sqrt{2}$ cm = $\frac{2}{5}$, што је рационалан број, то су дужи од $\sqrt{8}$ cm и $\sqrt{50}$ cm самерљиве.

пример 5

Да ли су дијагонала и страница квадрата самерљиве дужи?

Решење:

Ако страница квадрата има дужину a, тада дијагонала квадрата има дужину $a\sqrt{2}$. Како је $a\sqrt{2} : a = \sqrt{2}$, а $\sqrt{2}$ није рационалан већ ирационалан број, дијагонала квадрата и страница квадрата нису самерљиве дужи.

пример 6

Када се кружница пречника d „исправи", кружна линија постаје дуж O. Да ли су дужи O и d самерљиве дужи?

Решење:

Ако пречник круга има дужину d, тада је $O = d\pi$. Како је $d\pi : d = \pi$, а π није рационалан број, дужи O и d нису самерљиве.

ЗАДАЦИ

1. Одреди размеру дужи a и b, ако су њихове дужине:

а) $a = 3$ cm, $b = 12$ cm; **б)** $a = 5$ mm, $b = 10$ cm;

в) $a = 4$ dm, $b = 14$ cm; **г)** $a = 6$ m, $b = 3$ cm.

2. Заокружи слова испред размера које су једнаке 2 : 5:

а) 2 cm : 5 m; **б)** 40 cm : 10 dm; **в)** 4 km : 1 000 m;

г) 1 m : 25 dm; **д)** 6 dm : 3 m; **ђ)** 8 mm : 2 cm; **е)** 200 m : 5 km.

3. Да ли су самерљиве дужи:

а) 7 cm и 35 cm; **б)** 3 dm и 11 cm; **в)** 1,2 m и $\sqrt{3}$ m;

г) $\sqrt{18}$ cm и $\sqrt{12}$ cm; **д)** $\sqrt{45}$ m и $\sqrt{80}$ m?

4. У пропорцији $a : b = c : d$ одреди непознату пропорционалу ако је:

а) $a = 14, b = 22, c = 7$; **б)** $a = 12, b = 20, d = 15$; **в)** $a = 18, c = 27, d = 21$.

5. Географска карта је урађена у размери 1 : 1 200 000. Манастир Грачаница и Пећка патријаршија су на карти удаљени 65 mm. Колико износи њихово растојање у природи?

6. Растојање ваздушном линијом од Београда до Ниша је 240 km. Колико ће бити ово растојање на карти која је конструисана у размери 1 : 2 500 000?

7. Фудбалско игралиште чије су димензије 100 m и 70 m нацртано је на плану чија је размера 1 : 10 000. Одреди димензије фудбалског игралишта на том плану.

8. Површина њиве квадратног облика на урбанистичком плану је 16 mm^2. Колика је површина те њиве у природи, ако је план рађен у размери 1 : 20 000?

9. Основице трапеза су 36 cm и 20 cm. Да ли су оне самерљиве са средњом линијом тог трапеза?

10. Странице правоугаоника су 15 cm и 36 cm. Да ли су оне самерљиве са дијагоналом тог правоугаоника?

11. Странице правоугаоника се односе као 3 : 2. Да ли су оне самерљиве са пречником круга описаног око тог правоугаоника?

12. Нека је ABC правоугли троугао са правим углом у темену A. Одреди да ли су катете тог троугла, свака понаособ, самерљиве са хипотенузом, ако је:

а) $AB = 3$ cm, $AC = 4$ cm; **б)** $BC = 8$ cm, $AC = 4\sqrt{3}$ cm; **в)** $AB = \sqrt{50}$ cm, $BC = 13\sqrt{2}$ cm;

г) $AB = 10$ cm, $AC = 8$ cm; **д)** $BC = \sqrt{125}$ cm, $AC = 2$ cm; **ђ)** $AB = 3\sqrt{27}$ cm, $BC = 18$ cm?

13. Да ли су полупречници уписаног и описаног круга једнакостраничног троугла самерљиве дужи?

14. Да ли су висина и страница једнакостраничног троугла самерљиве дужи?

15. Да ли су страница правилног шестоугла и полупречник његовог описаног круга самерљиве дужи?

16. Да ли су дужа и краћа дијагонала правилног шестоугла самерљиве дужи?

Талесова теорема 1.2.

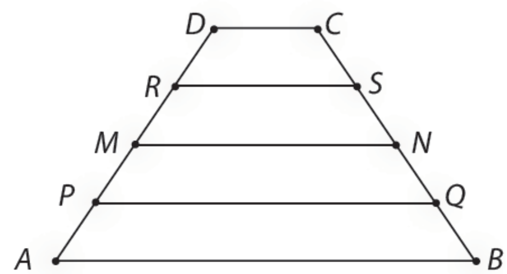
У претходној лекцији одређивали смо четврту геометријску пропорционалу, када смо знали дужине преостале три дужи. Поставља се питање да ли је могуће проблем одређивања четврте геометријске пропорционале решити конструктивно. Односно, да ли је могуће конструисати дуж x за коју важи $a : b = c : x$, ако су дужине дужи a, b и c једнаке трима датим дужима. Примери који следе, дају одговор на то питање.

пример 1

Краци AD и BC трапеза $ABCD$ имају дужину 20 cm и 16 cm. Нека је MN средња линија трапеза $ABCD$, PQ средња линија трапеза $ABNM$ и RS средња линија трапеза $MNCD$.

а) Израчунај дужине дужи AP, PM, MR и RD и дужи BQ, QN, NS и SC.

б) Одреди односе $AP : PD$, $BQ : QC$, $AR : RD$ и $BS : SC$.



Решење:

а) Како су MN, PQ и RS редом средње линије трапеза $ABCD$, $ABNM$ и $MNCD$, то су M и N средишта кракова AD и BC, P и Q средишта кракова AM и BN и R и S средишта кракова MD и NC. Одавде следи да је $AP = PM = MR = RD = 5$ cm и $BQ = QN = NS = SC = 4$ cm.

б) Тражени односи су $AP : PD = 5$ cm : 15 cm = 1 : 3, $BQ : QC = 1 : 3$, $AR : RD = 3 : 1$ и $BS : SC = 3 : 1$.

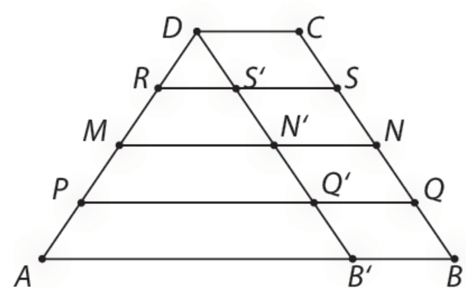
Примећујемо да паралелне праве на двема произвољним правама одсецају пропорционалне одговарајуће одсечке.

пример 2

Нацртајмо сада дуж DB' паралелну са CB, тако да $B' \in AB$ и обележимо са S', N' и Q' пресечне тачке ове дужи са дужима RS, MN и PQ. Ако је $AB = 32$ cm и $CD = 8$ cm:

а) Израчунај дужине дужи DS', $S'N'$, $N'Q'$, $Q'B'$ и дужи RS', MN', PQ' и AB'.

б) Одреди односе $DP : DA$, $DQ' : DB'$ и $PQ' : AB'$.



Решење:

а) Како су $DS'SC$, $S'N'NS$, $N'Q'QN$ и $Q'B'BQ$ паралелограми, из тога следи да је $DS' = S'N' = N'Q' = Q'B' = 4$ cm и још $CD = SS' = NN' = QQ' = BB' = 8$ cm. Даље је MN средња линија трапеза $ABCD$, па је $MN = 20$ cm, одакле следи да је $MN' = MN - N'N = 12$ cm. Из трапеза $ABNM$, на исти начин, добијамо да је $PQ = 26$ cm, односно $PQ' = 18$ cm, а из трапеза $MNCD$ добијамо да је $RS = 14$ cm, односно $RS' = 6$ cm и још $AB' = AB - BB' = 24$ cm.

б) Тражени односи су $DP : DA = 15$ cm : 20 cm = 3 : 4, $DQ' : DB' = 12$ cm : 16 cm = 3 : 4 и $PQ' : AB' = 18$ cm : 24 cm = 3 : 4.

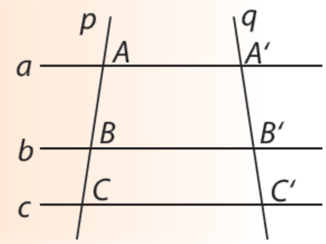
Уочавамо да две паралелне праве на крацима угла одсецају пропорционалне одговарајуће одсечке, и да су њима пропорционални и одговарајући одсечци на паралелним правама.

О законитостима које смо уочили у претходним примерима говори тврђење, у математици познато и као ***Талесова теорема***.

тврђење

Праве p и q пресечене су паралелним правама a, b и c, тако да су одговарајуће пресечне тачке редом: A, B и C на правој p и A', B' и C' на правој q.

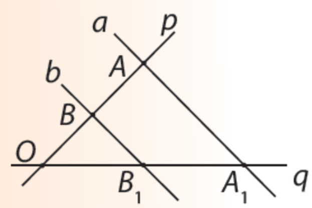
Тада важи: $\frac{AB}{BC} = \frac{A'B'}{B'C'}$



тврђење

Две паралелне праве a и b секу крак Op конвексног угла pOq редом у тачкама A и B и крак Oq у тачкама A_1 и B_1 ($a \cap p = \{A\}$, $a \cap q = \{A_1\}$, $b \cap p = \{B\}$, $b \cap q = \{B_1\}$).

Тада важи: $\frac{OA}{OB} = \frac{OA_1}{OB_1} = \frac{AA_1}{BB_1}$

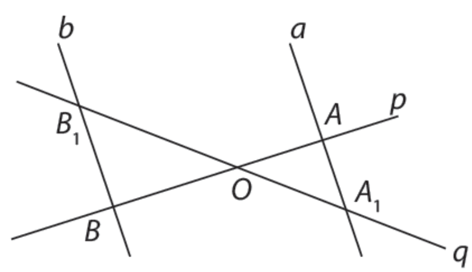


Користећи основна својства пропорције, можемо закључити да важе и следеће једнакости:

$$\frac{OA}{OA_1} = \frac{OB}{OB_1},\ \frac{OA}{AA_1} = \frac{OB}{BB_1} \text{ и } \frac{OA_1}{AA_1} = \frac{OB_1}{BB_1}$$

Претходно тврђење важи и ако две паралелне праве секу краке унакрсних углова:

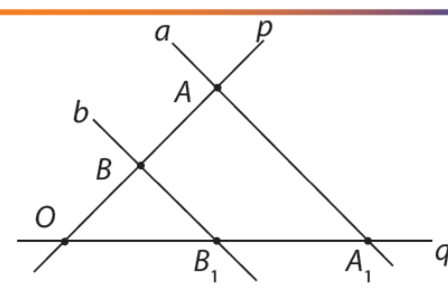
$$\frac{OA}{OB} = \frac{OA_1}{OB_1} = \frac{AA_1}{BB_1}$$



пример 3

Нека су a и b две паралелне праве које секу крак Op конвексног угла pOq редом у тачкама A и B, а крак Oq у тачкама A_1 и B_1.

Покажимо да је тада $\frac{OB}{OB_1} = \frac{BA}{B_1A_1}$.



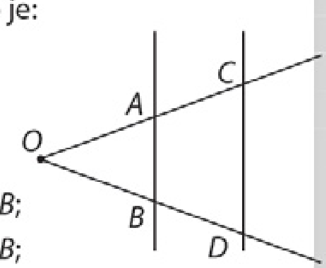
Решење:

По Талесовој теореми је $\frac{OA}{OB} = \frac{OA_1}{OB_1} = k, k \in R$, па је $OA = k \cdot OB$, односно $OA_1 = k \cdot OB_1$.

Како је $BA = OA - OB$, то даље следи $BA = k \cdot OB - OB = (k-1) \cdot OB$.
На сличан начин добијамо да важи и $B_1A_1 = (k-1) \cdot OB_1$.

Из последње две једнакости следи да је $\frac{BA}{B_1A_1} = \frac{(k-1) \cdot OB}{(k-1) \cdot OB_1} = \frac{OB}{OB_1}$, што је и требало показати.

17. Нека је $AB \parallel CD$ (види слику). Одреди дужине дужи x и y ако је:



а) $OA = 6$ cm, $OC = 15$ cm, $OB = 4$ cm, $x = OD$;

б) $OA = 12$ cm, $AC = 18$ cm, $OB = 8$ cm, $x = BD$;

в) $OA = 8$ cm, $OB = 10$ cm, $BD = 8$ cm, $x = AC$;

г) $AB = 9$ cm, $CD = 12$ cm, $OC = 16$ cm, $OD = 20$ cm, $x = OA$, $y = OB$;

д) $AB = 10$ cm, $CD = 16$ cm, $OA = 5$ cm, $OD = 20$ cm, $x = OC$, $y = OB$;

ђ) $OB = 15$ cm, $AB = 6$ cm, $AC = 8$ cm, $CD = 10$ cm, $x = OA$, $y = BD$;

е) $AB = 15$ cm, $CD = 25$ cm, $AC = 10$ cm, $BD = 20$ cm, $x = OA$, $y = OD$.

18. На страници PQ троугла PQR дата је тачка S, а на страници PR тачка T. Ако је $ST \parallel QR$, $PS = 4$ m, $SQ = 2$ m, $PT = 6$ m и $QR = 9$ m, одреди дужине дужи ST, TR и PR.

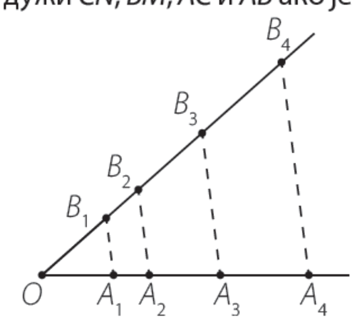
19. На страници KM троугла KLM дата је тачка Y, а на страници KL тачка X. Одреди дужине дужи KX и KM ако је $KY = 4$ cm, $XY = 5$ cm, $XL = 2$ cm, $LM = 10$ cm, и ако је $XY \parallel LM$.

20. Дат је троугао ABC такав да је $AB = 6$ cm, $AC = 8$ cm и $BC = 12$ cm. На страницама AC и BC уочене су тачке D и E тако да је $DE \parallel AB$. Ако је $CD = 6$ cm, израчунај дужине дужи CE и DE.

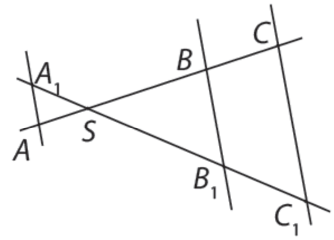
21. На страници AC троугла ABC дата је тачка S, а на страници AB тачка P. Ако је $PS \parallel BC$, $AC = 20$ m, $AP = 15$ m, $BC = 10$ m и $AS : SC = 3 : 2$, одреди дужине дужи PB и PS.

22. На катети AC правоуглог троугла ABC дата је тачка N. Пресек нормале конструисане у тачки N са хипотенузом AB је тачка M. Одреди дужине дужи CN, BM, AC и AB ако је $AN = 4$ cm, $MN = 3$ cm и $BC = 9$ cm.

23. Нека је $A_1B_1 \parallel A_2B_2 \parallel A_3B_3 \parallel A_4B_4$ и $A_1B_1 = 4$ cm, $A_2B_2 = 6$ cm, $A_3B_3 = 10$ cm, $A_4B_4 = 15$ cm, $OA_1 = 5$ cm и $OB_2 = 9$ cm. Израчунај дужине дужи OA_2, OB_1, B_1B_3, A_1A_2, A_2A_4, B_3B_4.



24. Нека је $AA_1 \parallel BB_1 \parallel CC_1$ и $SA = 2$ cm, $SB = 5$ cm, $BC = 3$ cm, $BB_1 = 4$ cm и $SB_1 = 6$ cm. Израчунај дужине дужи CC_1, SC_1, B_1C_1, AA_1, SA_1 и A_1B_1.



25. У једнакокраком троуглу ABC ($AC = BC$), основица је 24 cm, а крак 20 cm. На краку AC уочена је тачка D, која крак дели у односу 2 : 3. Права која садржи тачку D и паралелна је висини троугла из темена A сече крак BC у тачки E. Израчунај дужине дужи CD и DE.

26. Нека је S центар уписаног круга једнакокраког троугла ABC ($AB = AC$). Ако су D и E тачке у којима уписани круг додирује редом краке AB и AC и ако је $AB = 8$ cm и $BC = 12$ cm, израчунај дужину дужи DE.

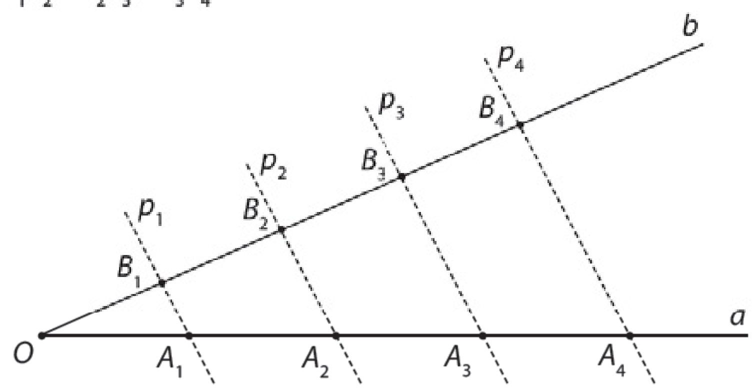
1.3. Примена Талесове теореме у конструкцијама

Показаћемо како се Талесова теорема може искористити за поделу произвољне дужи на једнаке делове. Приметимо најпре да на основу претходно показане последице Талесове теореме можемо да закључимо следеће:

тврђење

Ако паралелне праве секу оба крака неког угла и на једном краку одређују једнаке одсечке, тада су одсечци и на другом краку међусобно једнаки.

Дакле, ако важи $OA_1 = A_1A_2 = A_2A_3 = A_3A_4$ и $p_1 \parallel p_2 \parallel p_3 \parallel p_4$, тада је и $OB_1 = B_1B_2 = B_2B_3 = B_3B_4$.

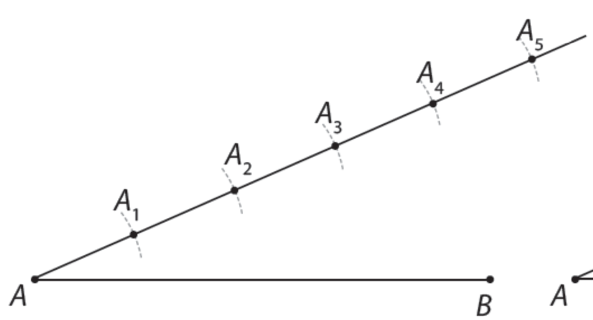


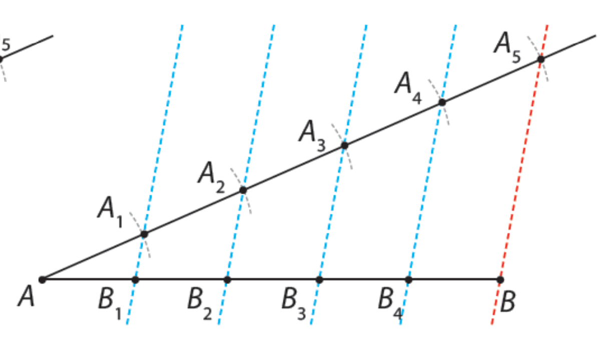
пример 1

Нацртај произвољну дуж AB и подели је на 5 једнаких делова.

Решење:

Најпре конструишимо произвољну полуправу из темена A. На овој правој одредимо тачке A_1, A_2, A_3, A_4 и A_5 тако да је $AA_1 = A_1A_2 = A_2A_3 = A_3A_4 = A_4A_5$. Кроз тачке A_1, A_2, A_3 и A_4 конструишимо праве које су паралелне правој BA_5. Пресечне тачке ових правих са дужи AB означимо B_1, B_2, B_3 и B_4. Овим тачкама дуж AB је подељена на 5 једнаких делова.



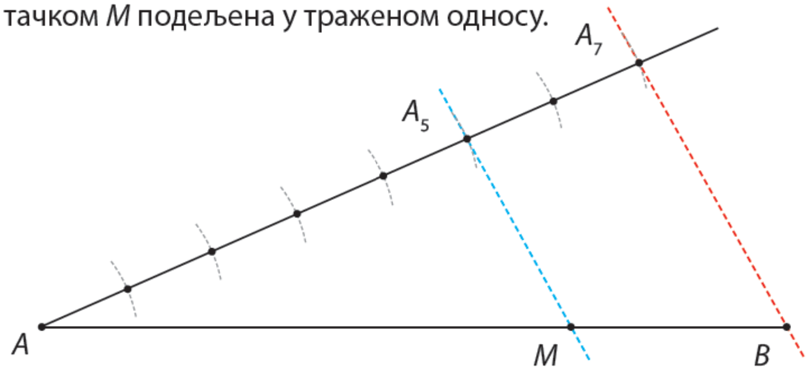


пример 2

Нацртај произвољну дуж AB и подели је на два дела тачком M, тако да је $AM : MB = 5 : 2$.

Решење:

Користићемо поделу дужи на седам једнаких делова. На полуправој из темена A конструишимо 7 тачака, таквих да су растојања сваке две узастопне тачке међусобно једнака. Пету тачку означимо A_5, а седму A_7. Тада је $AA_5 : A_5A_7 = 5 : 2$.
Кроз тачку A_5 конструишимо праву паралелну правој BA_7 и тачку пресека са дужи AB обележимо са M.
Тада је, на основу Талесове теореме $AM : MB = AA_5 : A_5A_7 = 5 : 2$, па је дуж AB тачком M подељена у траженом односу.



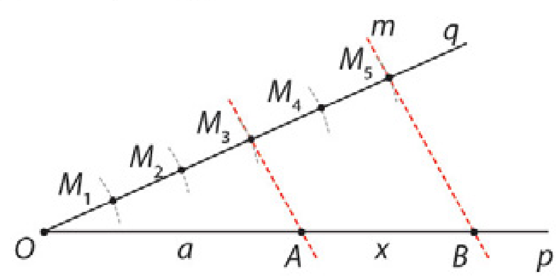
пример 3

Дата је дуж дужине a. Конструиши дуж дужине x, тако да важи $a : x = 3 : 2$.

Решење:

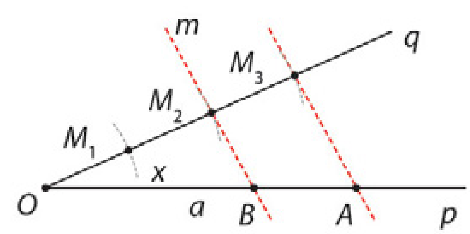
Конструкцију можемо извести на више начина.

Први начин:



Конструишимо две произвољне полуправе Op и Oq. На полуправој Op конструишимо тачку A, тако да је $OA = a$. На полуправој Oq одредимо пет ($3 + 2 = 5$) тачака M_1, M_2, M_3, M_4 и M_5 тако да је $OM_1 = M_1M_2 = M_2M_3 = M_3M_4 = M_4M_5$. Кроз тачку M_5 конструишимо праву m паралелну правој AM_3. Пресечну тачку праве m и полуправе Op означимо са B. На основу Талесове теореме је $\frac{OA}{AB} = \frac{OM_3}{M_3M_5}$, односно $\frac{a}{x} = \frac{3}{2}$, па је дуж AB тражене дужине x.

Други начин:



Конструишимо две произвољне полуправе Op и Oq. На полуправој Op конструишимо тачку A тако да је $OA = a$, а на полуправој Oq одредимо три тачке M_1, M_2 и M_3 тако да је $OM_1 = M_1M_2 = M_2M_3$. Кроз тачку M_2 конструишимо праву m паралелну правој AM_3. Пресечну тачку праве m и полуправе Op означимо са B. На основу Талесове теореме је $\frac{OA}{OB} = \frac{OM_3}{OM_2}$, односно $\frac{a}{x} = \frac{3}{2}$, па је дуж OB тражене дужине x.

Размисли да ли се тражена дуж може конструисати на још неки начин.

На основу претходних конструкција можемо да решимо раније постављени задатак, да конструшемо дуж x за коју важи $a : b = c : x$, ако су дужине дужи a, b и c једнаке трима датим дужима. Та конструкција је позната под називом *конструкција четврте геометријске пропорционале.*

пример 4

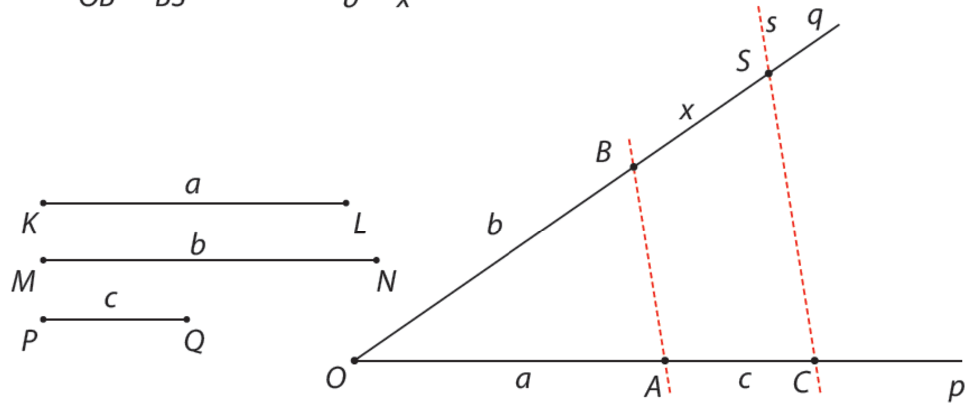
Нека су дате дужи $KL = a = 7$ cm, $MN = b = 8$ cm и $PQ = c = 3$ cm. Конструиши дуж x тако да је $a : b = c : x$.

Решење:

И ова конструкција се може урадити на више начина. Представимо један од њих:

Конструишимо две произвољне полуправе Op и Oq. На полуправој Op конструишимо тачке A и C, тако да је $OA = a$ и $AC = c$, а на полуправој Oq тачку B тако да је $OB = b$. Кроз тачку C конструишимо праву s која је паралелна правој AB.

Пресечну тачку праве s и полуправе Oq означимо са S. На основу Талесове теореме је $\dfrac{OA}{OB} = \dfrac{AC}{BS}$, односно $\dfrac{a}{b} = \dfrac{c}{x}$, па је дуж BS тражене дужине x.

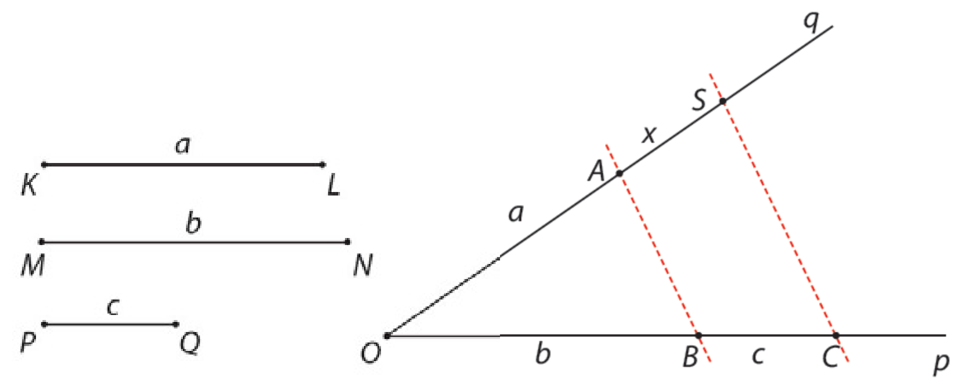


пример 5

Конструиши дуж x тако да је $a : b = x : c$ ако су дужи a, b и c исте као у претходном примеру.

Решење:

Уочимо да се пропорција $a : b = x : c$ може записати у облику $b : a = c : x$, па се тражена дуж x конструише на исти начин као у претходном примеру (види слику).



27. Нацртај произвољну дуж и подели је на 3 једнака дела.

28. Нацртај произвољну дуж и подели је на 7 једнаких делова.

29. Нацртај произвољну дуж и подели је у односу 5 : 3.

30. Нацртај произвољну дуж и подели је у односу 2 : 7.

31. Конструиши једнакокраки троугао ако је дата основица a и ако је познато да је $a : b = 5 : 3$, где је b крак овог троугла.

32. Конструиши једнакокраки троугао ако је дат крак b и ако је познато да је $a : b = 3 : 7$, где је a основица овог троугла.

33. Збир катета правоуглог троугла једнак је датој дужи $x = 12$ cm. Конструиши тај троугао ако се његове катете односе као 2 : 5.

34. Обим једнакокраког троугла једнак је датој дужи $p = 11$ cm. Конструиши тај троугао ако се његова основица и крак односе као 3 : 2.

35. Обим троугла једнак је датој дужи $m = 13$ cm. Конструиши тај троугао ако се његове странице односе као 2 : 5 : 4.

36. Обим правоугаоника једнак је датој дужи $x = 115$ mm. Конструиши тај правоугаоник ако се његове странице односе као 2 : 1.

37. Збир дијагонала ромба једнак је датој дужи $m = 97$ mm. Конструиши тај ромб ако се дијагонале ромба односе као 1 : 3.

38. Конструиши једнакокраки трапез чији је обим једнак датој дужи $p = 137$ mm, ако се основице a и b и крак c тог трапеза односе као 2 : 1 : 1.

39. Дате су дужи $a = 5$ cm, $b = 4$ cm и $c = 3$ cm. Конструиши дуж x тако да важи:

а) $a : x = b : c$;

б) $x : a = b : c$.

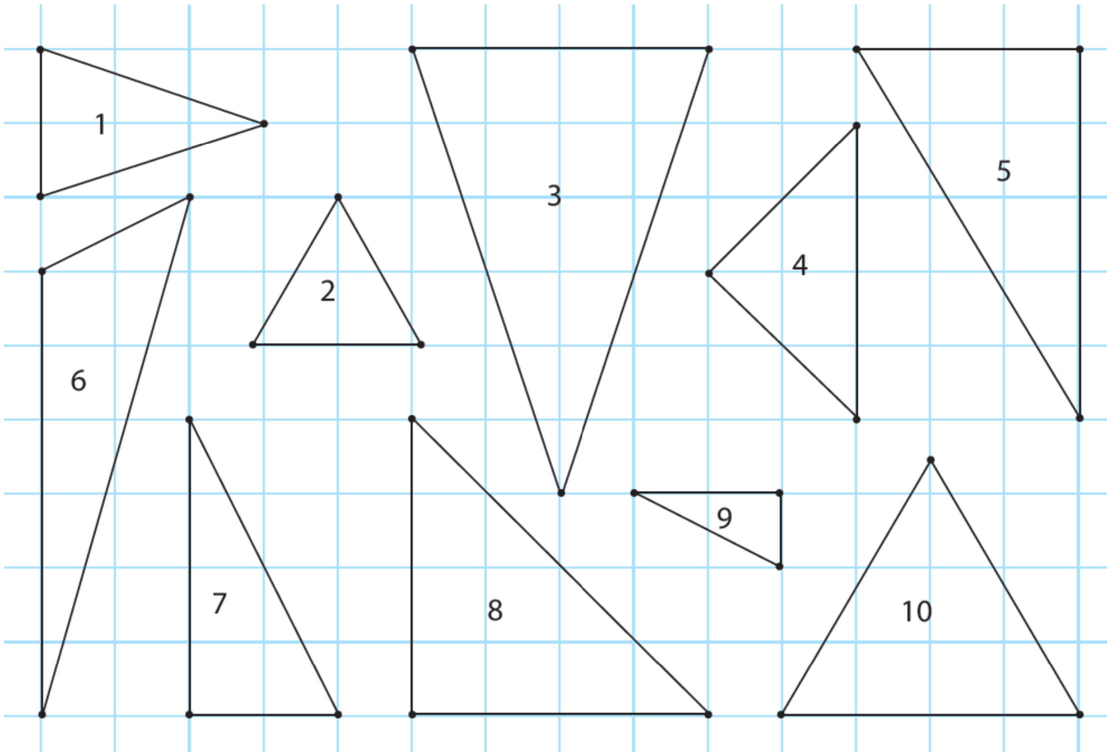
40. Дате су дужи $a = \sqrt{13}$ cm, $b = 5$ cm и $c = 7$ cm. Конструиши дуж x тако да важи:

а) $a : b = c : x$;

б) $a : x = b : c$.

1.4. Сличност троуглова

Посматрајмо троуглове на слици испод. Да ли неки од ових троуглова „личе" један на други?



Примећујемо да су троуглови означени бројевима 1, 3, 4, 8 једнакокраки, троуглови 2 и 10 једнакостранични, а троуглови 4, 5, 7, 8 и 9 правоугли. Троугао број 6 једини је тупоугли. Обратимо пажњу на троуглове који имају међусобно једнаке углове. Можемо рећи да овакви троуглови више „личе" једни на друге. То су, на нашој слици, троуглови 1 и 3, затим 2 и 10, 4 и 8, као и 5, 7 и 9.

Два троугла који имају међусобно једнаке углове називају се сличним троугловима.

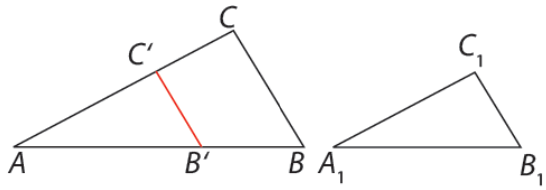
Једнаке углове два слична троугла називамо одговарајућим угловима, а странице које се налазе наспрам једнаких углова, називамо одговарајућим страницама.

Када је троугао ABC сличан троуглу $A_1B_1C_1$, то записујемо са $\Delta ABC \sim \Delta A_1B_1C_1$.

Када напишемо да је $\Delta ABC \sim \Delta PQR$, то значи да су одговарајући углови ових троуглова $\sphericalangle A$ и $\sphericalangle P$, $\sphericalangle B$ и $\sphericalangle Q$, $\sphericalangle C$ и $\sphericalangle R$, а да су одговарајуће странице BC и QR, AC и PR, AB и PQ.

пример 1

Нека су ABC и $A_1B_1C_1$ слични троуглови, односно нека је $\sphericalangle A = \sphericalangle A_1$, $\sphericalangle B = \sphericalangle B_1$ и $\sphericalangle C = \sphericalangle C_1$. Показати да су одговарајуће странице троуглова пропорционалне.



Решење:

На полуправама AB и AC троугла ABC можемо уочити тачке B' и C', тако да је троугао $\Delta A_1B_1C_1$ подударан троуглу $\Delta AB'C'$ – по ставу СУС. Због једнакости углова $\sphericalangle AB'C' = \sphericalangle ABC$ дужи $B'C'$ и BC су паралелне. Према Талесовој теореми важи $AB : AB' = BC : B'C' = AC : AC'$, односно:

$$\frac{AB}{A_1B_1} = \frac{BC}{B_1C_1} = \frac{AC}{A_1C_1} = k$$

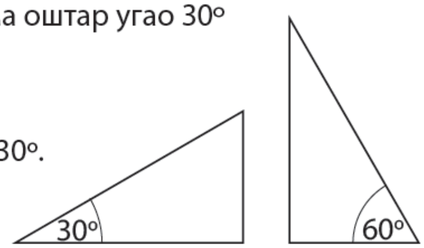
где је k позитиван реалан број који зовемо *коефицијент сличности (пропорционалности)*.

Одговарајуће странице сличних троуглова су пропорционалне.

тврђење

пример 2

Покажи да су два правоугла троугла, један који има оштар угао 30° и други чији је један оштар угао 60°, слична.

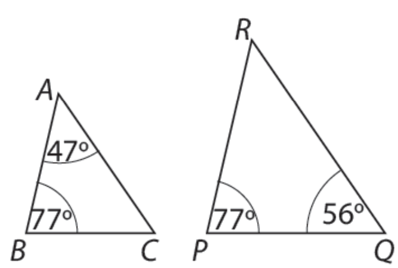


Решење:

Други оштар угао првог троугла је 60°, а другог је 30°. Оба троугла имају углове 30°, 60° и 90°, па су, по дефиницији, слична.

пример 3

Углови троугла ABC су 47° и 77°, а углови троугла PQR су 77° и 56°. Да ли су ови троуглови слични?



Решење:

Нека је у троуглу ABC, рецимо угао $\sphericalangle A = 47°$ и $\sphericalangle B = 77°$. Како знамо да је збир унутрашњих углова у троуглу једнак 180°, то је $47° + 77° + \sphericalangle C = 180°$. Одатле следи да је $\sphericalangle C = 56°$. Ако је у троуглу PQR, рецимо $\sphericalangle P = 77°$ и $\sphericalangle Q = 56°$, следи да је $\sphericalangle R = 47°$. Закључујемо да је $\sphericalangle A = \sphericalangle R$, $\sphericalangle B = \sphericalangle P$ и $\sphericalangle C = \sphericalangle Q$, а то значи да су, по дефиницији, троуглови ABC и RPQ слични.

пример 4

Троуглови ABC и $A_1B_1C_1$ су слични са коефицијентом сличности који је једнак k. Одреди однос обима ова два троугла.

Решење:

Нека је $\frac{AB}{A_1B_1}=\frac{BC}{B_1C_1}=\frac{AC}{A_1C_1}=k$. Из ове једнакости следи да је $AB=k\cdot A_1B_1$, $BC=k\cdot B_1C_1$ и $AC=k\cdot A_1C_1$. Обим троугла ABC је $O_{ABC}=AB+BC+AC=k\cdot A_1B_1+k\cdot B_1C_1+k\cdot A_1C_1=$ $=k\cdot(A_1B_1+B_1C_1+A_1C_1)$, односно $O_{ABC}=k\cdot O_{A_1B_1C_1}$, одакле следи да је $\frac{O_{ABC}}{O_{A_1B_1C_1}}=k$.

тврђење **Однос обима сличних троуглова једнак је коефицијенту сличности.**

пример 5

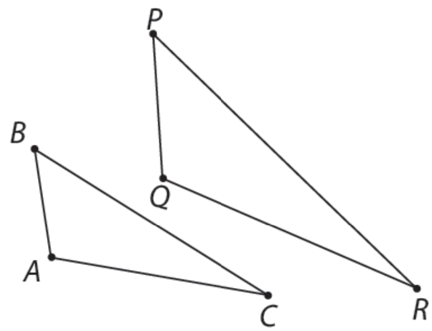
Странице једног троугла су 8 cm, 16 cm и 20 cm, а другог 20 cm, 25 cm и 10 cm. Да ли су ти троуглови слични?

Решење:

Најкраћој страници првог троугла одговара најкраћа страница другог, најдужој страници одговара најдужа, а средњој по величини страници првог троугла одговара средња по величини страница другог троугла. Како је $\frac{8\text{ cm}}{10\text{ cm}}=\frac{16\text{ cm}}{20\text{ cm}}=\frac{20\text{ cm}}{25\text{ cm}}=\frac{4}{5}$, закључујемо да су троуглови слични.

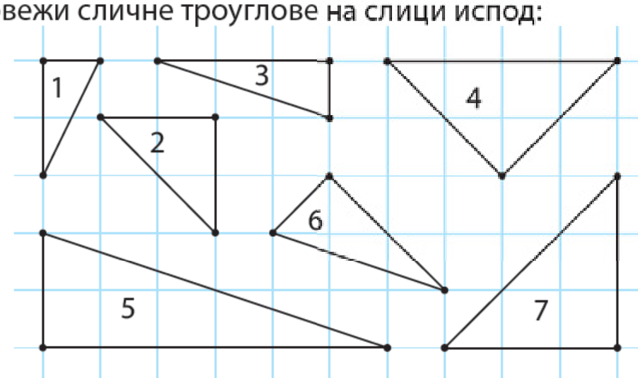
пример 6

Странице троугла ABC су $AB=6$ cm, $BC=15$ cm и $AC=12$ cm, а странице троугла PQR су $PQ=8$ cm, $QR=15$ cm и $PR=20$ cm. Да ли су ови троуглови слични?



Уочимо да су најкраће странице ових троуглова AB и PQ, да су најдуже BC и PR, а да су средње по величини странице AC и QR. Приметимо да је $\frac{AB}{PQ}=\frac{6\text{ cm}}{8\text{ cm}}=\frac{3}{4}$ и $\frac{BC}{PR}=\frac{15\text{ cm}}{20\text{ cm}}=\frac{3}{4}$, али да је $\frac{AC}{QR}=\frac{12\text{ cm}}{15\text{ cm}}=\frac{4}{5}\neq\frac{3}{4}$. Дакле, одговарајуће странице нису пропорционалне, па троуглови ABC и PQR нису слични.

41. Пронађи и повежи сличне троуглове на слици испод:



42. Углови троугла ABC су $\sphericalangle A = 78^\circ$ и $\sphericalangle B = 42^\circ$, а углови троугла XYZ су $\sphericalangle X = 42^\circ$ и $\sphericalangle Y = 60^\circ$. Да ли су ова два троугла слична?

43. Угао на основици првог једнакокраког троугла је 25°, а угао при врху другог једнакокраког троугла је 150°. Да ли су ова два троугла слична?

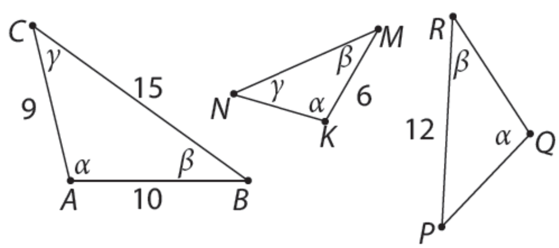
44. Угао на основици једнакокраког троугла је 39°. Израчунај угао при врху њему сличног троугла.

45. Разлика оштрих углова једног правоуглог троугла је 18°, а збир два највећа угла другог правоуглог троугла је 144°. Да ли су та два правоугла троугла слична?

46. Странице троугла ABC су $AB = 4$ cm, $BC = 6$ cm и $AC = 8$ cm, а странице троугла EFG су $EF = 9$ cm, $FG = 12$ cm и $EG = 6$ cm. Да ли су ова два троугла слична?

47. Нека су троуглови ABC и $A'B'C'$ слични и нека је $AB = 12$ cm, $BC = 18$ cm, $B'C' = 42$ cm и $A'C' = 35$ cm. Израчунај странице AC и $A'B'$.

48. Дати су троуглови као на слици испод. Одреди непознате странице троуглова KMN и PQR.



49. Тачке P, Q и R су редом средишта страница BC, AC и AB троугла ABC. Покажи да је троугао PQR сличан троуглу ABC. Одреди коефицијент сличности.

50. Странице троугла ABC су $AB = 16$ cm, $BC = 28$ cm и $AC = 32$ cm, а обим њему сличног троугла PQR је 114 cm. Одреди странице троугла PQR.

51. Катете правоуглог троугла ABC су $AB = 8$ cm и $AC = 15$ cm. Обим њему сличног троугла PQR је 100 cm. Израчунај странице троугла PQR.

52. Троуглови ABC и PQR су слични. Ако је $AB = 9$ cm, $BC = 12$ cm, $PQ = 15$ cm и $PR = 30$ cm, израчунај обиме оба троугла.

53. Обим једнакокраког троугла, чији је крак за 3 cm краћи од основице, јесте 18 cm. Обим њему сличног троугла је 63 cm. Израчунај дужине страница оба троугла.

54. Обим једнакокраког троугла, чији је крак за 8 cm дужи од основице, јесте 52 cm, а обим њему сличног троугла је 143 cm. Израчунај дужине страница оба троугла.

1.5. Ставови сличности троуглова

У претходној лекцији упознали смо се са сличним троугловима. Поставља се питање како да утврдимо да су два троугла слична.

Први став сличности (УУ, скраћено од угао-угао)

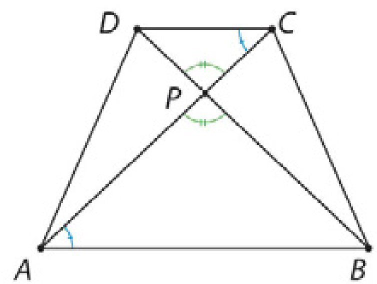
тврђење

Два троугла су слична ако имају по два једнака угла.

Ако два троугла имају по два једнака угла, тада су им и преостали углови једнаки.

пример 1

Нека су AB и CD основице трапеза $ABCD$ и нека је тачка P пресек његових дијагонала. Покажи да је $AB : CD = AP : CP$.



Решење:

Троуглови ABC и CDP су слични по ставу УУ јер је $\sphericalangle PAB = \sphericalangle PCD$ (углови са паралелним крацима) и $\sphericalangle BPA = \sphericalangle DPC$ (унакрсни углови). Дакле, одговарајуће странице су пропорционалне:

$$\frac{BP}{DP} = \frac{AB}{CD} = \frac{AP}{CP}$$

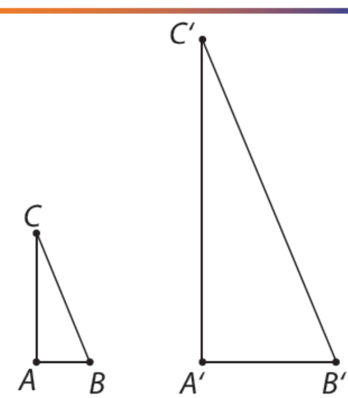
Други став сличности (СУС, скраћено од страница-угао-страница)

тврђење

Ако два троугла имају два пара пропорционалних страница и, ако су углови, захваћени овим паровима страница – једнаки, тада су ти троуглови слични.

пример 2

Покажи да су правоугли троуглови ABC и $A'B'C'$ слични ако су њихове катете $AB = 10$ cm и $AC = 24$ cm, односно $A'B' = 25$ cm и $A'C' = 60$ cm.



Решење:

Троуглови ABC и $A'B'C'$ су слични по ставу СУС јер су одговарајуће катете пропорционалне $\frac{AB}{A'B'} = \frac{10\,\text{cm}}{25\,\text{cm}} = \frac{2}{5}$ и $\frac{AC}{A'C'} = \frac{24\,\text{cm}}{60\,\text{cm}} = \frac{2}{5}$, и њима захваћени углови једнаки $\sphericalangle CAB = \sphericalangle C'A'B' = 90^\circ$.

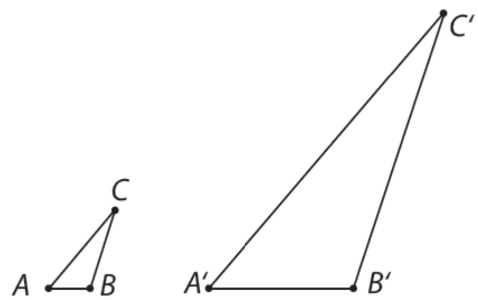
Трећи став сличности (ССС, скраћено од страница-страница-страница)

Два троугла су слична ако су им одговарајуће странице пропорционалне.

тврђење

пример 3

Покажи да троуглови ABC и $A'B'C'$ имају једнаке углове, ако је $AB = 4$ cm, $BC = 8$ cm, $AC = 10$ cm, $A'B' = 14$ cm, $B'C' = 28$ cm и $A'C' = 35$ cm.



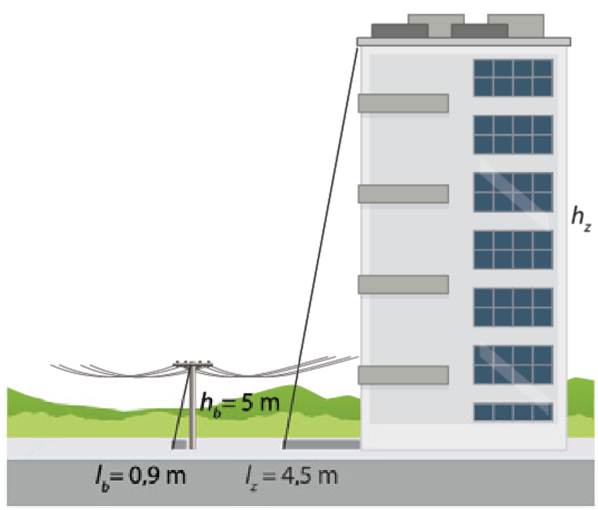
Решење:

Троуглови ABC и $A'B'C'$ су слични по ставу ССС јер су им одговарајуће странице пропорционалне, $\frac{AB}{A'B'} = \frac{4\,\text{cm}}{14\,\text{cm}} = \frac{2}{7}$, $\frac{BC}{B'C'} = \frac{8\,\text{cm}}{28\,\text{cm}} = \frac{2}{7}$ и $\frac{AC}{A'C'} = \frac{10\text{ cm}}{35\text{ cm}} = \frac{2}{7}$.

Знамо да слични троуглови имају једнаке одговарајуће углове, па је $\sphericalangle A = \sphericalangle A'$, $\sphericalangle B = \sphericalangle B'$ и $\sphericalangle C = \sphericalangle C'$.

пример 4

Колика је висина Владимирове зграде, ако је њена сенка дужине 4,5 m, а истовремено је дужина сенке бандере високе 5 m једнака 90 cm ?

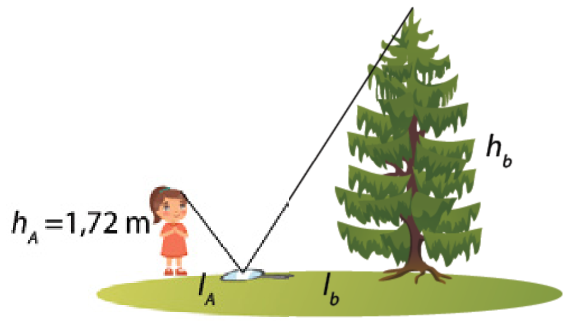


Решење:

Нека је h_b висина бандере, h_z висина зграде, l_b дужина сенке бандере и l_z дужина сенке зграде. Приметимо да је $l_b = 90$ cm $= 0{,}9$ m. Из сличности правоуглих троуглова са слике (по ставу УУ, објасни зашто) важи $\frac{l_b}{l_z} = \frac{h_b}{h_z}$, одакле добијамо да је висина зграде $h_z = 25$ m.

пример 5

Анђелија је решила да измери висину бора у свом дворишту. Између себе и бора положила је огледало на земљу, тако да у огледалу види врх бора. (Светлостни зрак се одбија од огледала под истим углом под којим и допире на огледало.) Ако је огледало три пута ближе Анђелији него бору и ако је Анђелија висока 1,72 m – израчунај висину бора.

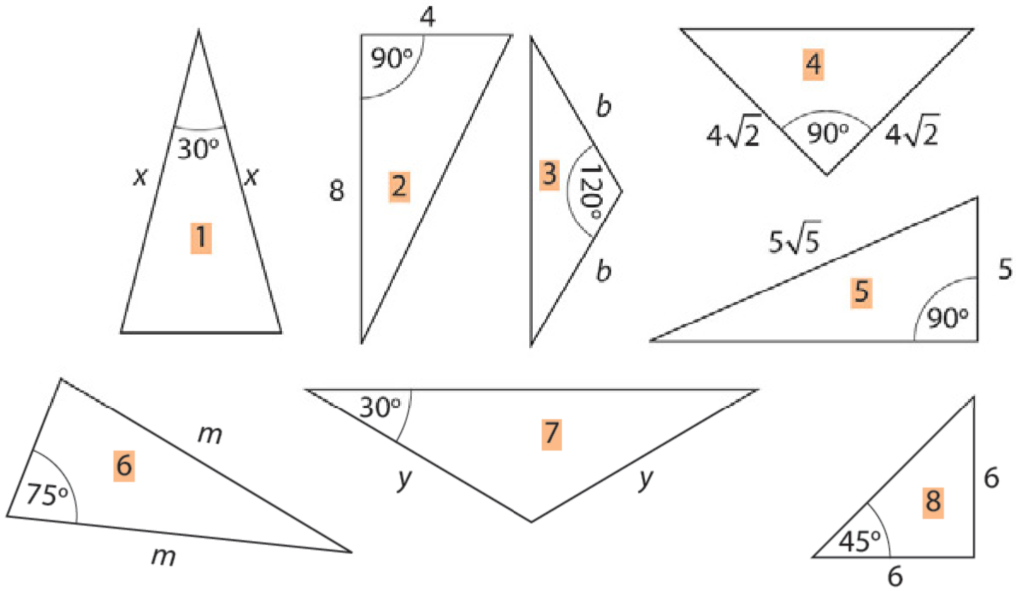


Решење:

Нека је h_A Анђелијина висина, h_b висина бора, l_A растојање Анђелије од огледала и l_b растојање бора од огледала. Из сличности правоуглих троуглова са слике (по ставу УУ, објасни зашто) важи $\frac{h_b}{h_A} = \frac{l_b}{l_A}$. Како је из услова задатка $l_b = 3 \cdot l_A$, следи да је висина бора $h_b = 5{,}16$ m.

ЗАДАЦИ

55. Повежи сличне троуглове са слике испод:



56. Стуб висине 6 m баца сенку дужине 2,4 m. Израчунај висину храста, ако је његова сенка дужине 5,2 m.

57. Милица, која је висока 180 cm, стоји поред свог великог узора, Николе Јокића. Дужина Миличине сенке је 120 cm, а дужина Николине сенке је 140 cm. Колико је висок Никола Јокић?

58. Из темена тупог угла B паралелограма $ABCD$ повучене су висине на странице CD и AD. Нека су подножја ових висина, редом, тачке P и Q. Да ли су троуглови BCP и BQA слични? Нацртај слику и образложи одговор.

59. Дат је троугао ABC, $AB = 15$ cm и $AC = 20$ cm. На страници AB уочи тачку P, а на страници AC тачку Q, тако да је $AP = 8$ cm и $AQ = 6$ cm. Да ли су троуглови ABC и AQP слични? Нацртај слику и образложи одговор.

60. На страници AB троугла ABC дата је тачка D, а на страници AC тачка E, тако да је $\measuredangle ABC = \measuredangle DEA$, $AD = 30$ cm, $AE = 48$ cm и $EC = 12$ cm. Израчунај дужину дужи BD.

61. Нека је $ABCD$ једнакокраки трапез чије су основице AB и CD. Да ли су троуглови ABC и ACD слични? Нацртај слику и образложи одговор.

62. Основице једнакокраког трапеза $ABCD$ су $AB = 18$ cm и $CD = 8$ cm. Ако је S пресек дијагонала овог трапеза и ако је $AC = 26$ cm, одреди AS и SC.

63. Дијагонале трапеза $ABCD$, чије су основице AB и CD, секу се у тачки M. Ако је:

а) $AB = 28$ cm, $AM = 20$ cm и $CM = 15$ cm – израчунај CD;

б) $AB = 24$ cm, $BM = 20$ cm и $CD = 18$ cm – израчунај DM;

в) $CD = 54$ cm, $CM = 24$ cm и $AM = 32$ cm – израчунај AB;

г) $AB = 36$ cm, $CD = 20$ cm и $BD = 42$ cm – израчунај BM и DM.

64. Тачка P дели страницу AB паралелограма $ABCD$ у односу $5 : 3$. Нека је тачка Q пресек дужи AC и DP.

а) Покажи да су троуглови APQ и CDQ слични;

б) Ако је $CD = 24$ cm и $PQ = 10$ cm, израчунај AP и DQ.

65. Дужи AB и CD секу се у тачки M, тако да је $\measuredangle CAM = \measuredangle MDB$. Ако је $AC = 24$ cm, $CM = 18$ cm и $BM = 21$ cm, одреди BD.

66. Нека је S центар уписаног круга једнакокраког троугла ABC ($AB = AC$) и нека су P и Q подножја нормала из тачке S на основицу BC, односно крак AC. Покажи да су троуглови AQS и APC слични.

67. Висина која одговара основици једнакокраког троугла ABC је $AA' = 8$ cm, а полупречник уписаног круга $r = 3$ cm. Израчунај обим троугла ABC.

68. Висине AA' и BB' троугла ABC секу се у тачки H. Покажи да су слични троуглови:

а) $BB'C$ и $AA'C$; **б)** $BA'H$ и $AB'H$;

в) Ако је $BC = 18$ cm, $BB' = 15$ cm и $AC = 24$ cm, израчунај висину AA';

г) Ако је $BH = 12$ cm, $BA' = 9$ cm и $AH = 10$ cm, израчунај дужину дужи AB'.

69. Из центра S описаног круга правоуглог троугла ABC повучена је нормала на хипотенузу AB која сече једну катету у тачки R. Ако је $RS = 6$ cm и $AB = 16$ cm, одреди обим троугла ABC.

70. Катете правоуглог троугла ABC су $AC = 12$ cm и $BC = 16$ cm. На хипотенузи је уочена тачка P. Подножја нормала из тачке P на катете AC и BC су, редом: Q и R, тако да важи $PQ = 2 \cdot PR$. Одреди површину четвороугла $CQPR$.

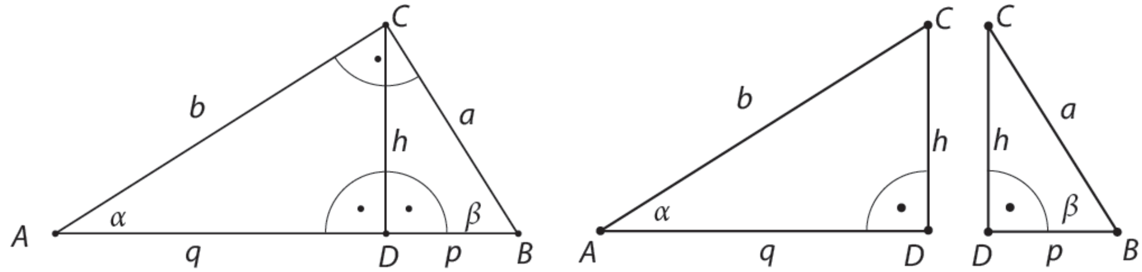
71. Код правоуглог трапеза $ABCD$, $AB \parallel CD$, на краћем краку AD уочена је тачка M, таква да је $\measuredangle CMB = 90^\circ$. Ако је $DM = 20$ cm, $AM = 36$ cm и $AB = 48$ cm, израчунај обим трапеза $ABCD$.

1.6. Примена сличности на правоугли троугао

тврђење

Нека је ABC правоугли троугао у коме је: прав угао код темена C, подножје висине на хипотенузи D, дуж $AB = c$, $BC = a$, $AC = b$, $CD = h$, $BD = p$ и $AD = q$. Тада важи:

$$a^2 = p \cdot c; \qquad b^2 = q \cdot c; \qquad h^2 = p \cdot q$$



Из сличности правоуглих троуглова (став УУ) ABC и CBD, следи $\dfrac{a}{p} = \dfrac{c}{a}$, односно $a^2 = p \cdot c$.

Из сличности правоуглих троуглова (став УУ) ABC и ACD следи $\dfrac{b}{q} = \dfrac{c}{b}$, односно $b^2 = q \cdot c$.

Из сличности правоуглих троуглова (став УУ) CBD и ACD следи $\dfrac{h}{q} = \dfrac{p}{h}$, односно $h^2 = p \cdot q$.

Ако су a и b позитивни реални бројеви, онда је $\sqrt{ab}$ геометријска средина бројева a и b.

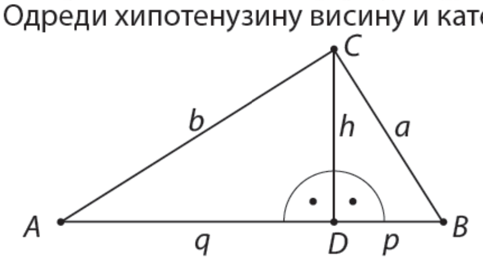
тврђење

Кажемо да је висина која одговара хипотенузи правоуглог троугла геометријска средина одговарајућих одсечака на хипотенузи.

Ако саберемо прве две једнакости, добијамо: $a^2 + b^2 = p \cdot c + q \cdot c = (p + q) \cdot c = c^2$, па смо на још један начин доказали Питагорину теорему.

пример 1

Висина из темена правог угла дели хипотенузу правоуглог троугла на одсечке $p = 18$ cm и $q = 32$ cm. Одреди хипотенузину висину и катете троугла.



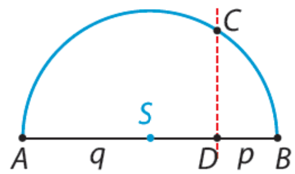
Решење:

Из једнакости $h^2 = p \cdot q$ добијамо да је $h = 24$ cm. Како је $c = p + q$, следи $c = 50$ cm. Сада, из једнакости $a^2 = p \cdot c$ и $b^2 = q \cdot c$, добијамо да је $a = 30$ cm и $b = 40$ cm.

пример 2

Конструиши дуж $\sqrt{3}$ cm.

Решење:

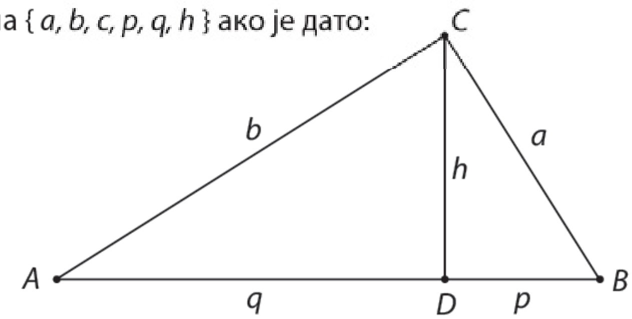


Претпоставимо да нам је познат правоугли троугао *ABC* такав – да је висина која одговара хипотенузи $h = \sqrt{3}$ cm. Ако су одсечци на хипотенузи *p* и *q*, тада из $h^2 = p \cdot q$ добијамо $p \cdot q = 3$ cm². Нека је, рецимо $p = 1$ cm и $q = 3$ cm, што значи да је $c = p + q = 4$ cm. Конструишимо дуж $AB = 4$ cm и на њој тачку *D*, тако да је $AD = 3$ cm. Конструишимо средиште дужи *AB*, тачку *S* и са центром у тој тачки, конструишимо полукруг полупречника $SA = 2$ cm. У тачки *D* конструишимо нормалу на дуж *AB* и пресечну тачку са полукругом обележимо са *C*. Дужина дужи *CD* је $\sqrt{3}$ cm.

ЗАДАЦИ

72. Одреди непознате елементе скупа $\{ a, b, c, p, q, h \}$ ако је дато:

а) $a = 25$ cm, $p = 2$ dm;
б) $h = 12$ cm, $q = 9$ cm;
в) $q = 4{,}5$ m, $p = 8$ m;
г) $b = 3$ dm, $h = 24$ cm;
д) $a = 6$ cm, $h = 4{,}8$ cm;
ђ) $a = 18$ cm, $b = 24$ cm.



73. Тежишна дуж која одговара хипотенузи правоуглог троугла је 26 cm, а висина која одговара хипотенузи је 24 cm. Израчунај катете овог троугла.

74. Полупречник описаног круга правоуглог троугла је 10 cm, а површина троугла је 96 cm². Израчунај катете овог троугла.

75. Израчунај дијагонале делтоида *ABCD* ако је $\sphericalangle B = \sphericalangle D = 90^\circ$ и $AB = 18$ cm, $BC = 24$ cm.

76. Израчунај странице делтоида *ABCD* ако је $\sphericalangle B = \sphericalangle D = 90^\circ$ и $AE = 8$ cm, $EC = 18$ cm, где је *E* пресек дијагонала делтоида.

77. Основица једнакокраког троугла је $AB = 30$ cm, а висина која одговара краку $h_b = 24$ cm. Израчунај дужину крака и површину троугла.

78. Једна катета правоуглог троугла је 12 cm, а однос друге катете и висине над хипотенузом је 5 : 3. Израчунај непознате странице троугла.

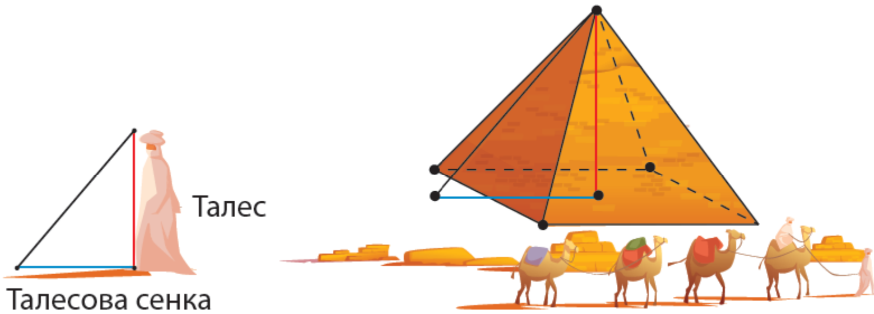
79. Теме *A* правоугаоника *ABCD* удаљено је 12 cm од дијагонале *BD*. Ако је $AB = 15$ cm, израчунај обим и површину правоугаоника.

80. Подножје нормале из темена *A* правоугаоника *ABCD* на дијагоналу *BD* дели дијагоналу у односу 1 : 3. Ако је $AB = 12$ cm, израчунај страницу *BC*.

1.7. Примена сличности – занимљивости

пример 1

Прича о томе како је Талес измерио висину Кеопсове пирамиде

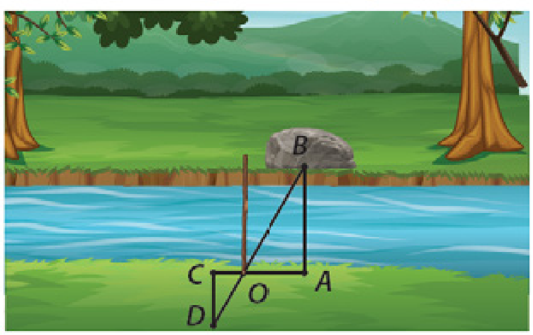


Талес, један од „седморице мудраца” старе Грчке, приметио је да је у подне дужина сенке неког штапа пободеног у земљу најкраћа, док је ујутру и увече та сенка најдужа. Закључио је да у неко одређено доба дана дужина сенке мора бити једнака дужини штапа. Користећи се овим закључком, успео је „помоћу штапа и канапа” да измери висину Кеопсове пирамиде.

У близини пирамиде, Талес је око себе у песку, штапом, описао круг – чији је полупречник био једнак његовој висини. У тренутку када је Талесова сенка додирнула овај круг, његов помоћник је поставио штап на врх сенке Кеопсове пирамиде. Измерио је дужину те сенке до подножја пирамиде и додао половину дужине основне ивице пирамиде. Тако је, врло једноставно, израчунао колико је пирамида висока.

пример 2

Како „помоћу штапа и канапа” одредити ширину реке?



Изаберимо неки видљив објекат на обали са супротне стране реке (камен, дрво или било шта друго) и станимо тачно наспрам њега. Тај објекат је обележен тачком *B* на слици, док је наш положај обележен тачком *A*.

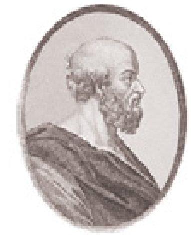
Корачајмо обалом реке, бар 20 до 30 корака, рецимо на леву страну, до неке тачке (тачка *O*) и у тој тачки пободимо штап. Наставимо са корачањем на исту страну, још половину броја корака од тачке где смо поболи штап (тачка *C*), а затим почнимо да се удаљавамо од обале реке под правим углом.

Када дођемо до тачке (тачка *D*) која је на истој правој којој припадају штап (тачка *O*) и објекат са супротне стране реке (тачка *B*), знамо (*зашто?*) да је ширина реке два пута већа од наше удаљености од реке (растојање тачака *C* и *D*).

пример 3

Како је Ератостен одредио обим Земље?

Пре више од 2 200 година, Ератостен, чувени астроном и математичар старе Грчке, успео је „помоћу штапа и канапа" да одреди обим Земље.

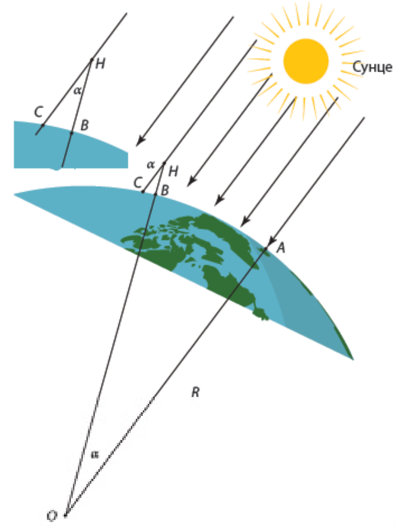


Ератостен је знао да за време летње дугодневнице, у одређено доба дана, бунар у данашњем Асуану (тачка *A*) нема сенку. У исто то доба дана, за време летње дугодневнице, измерио је дужину сенке (*BC*) Библиотеке у Александрији (тачка *B*).

Знајући висину (*HB*) Библиотеке, успео је да израчуна угао под којим сунчеви зраци падају на планету Земљу у Александрији (угао α троугла *CBH*). По Ератостеновом рачуну, тај угао износи 7°.

Претпостављајући да је Сунце довољно далеко, тако да се сунчеви зраци могу сматрати паралелним, Ератостен је извео закључак да је угао који би градили полупречници Земље до Асуана (*OA*) и Александрије (*OB*) такође једнак α, односно 7°. Како је знао растојање између ова два града, преостало му је да то растојање помножи са 360 и подели са 7.

Рачунајући у данашњим мерним јединицама, Ератостен је израчунао да је обим Земље око 40 000 km. Данашња измерена вредност обима Земље је 40 008 km.



Предлог задатака за додатни рад

1. Конструиши дуж *x* чија је дужина једнака производу дужина дужи $a = 3$ cm и $b = 2$ cm.

2. Нацртај произвољне дужи *a* и *b*, а затим конструиши дужи:

а) $x = a^2$; **б)** $x = \dfrac{a}{b}$; **в)** $x = a \cdot (a + b)$;

г) $x = \dfrac{a}{a+b}$; **д)** $x = a^2 - b^2$; **ђ)** $x = \dfrac{a-b}{a+b}$.

3. Дат је круг са центром у тачки *O* полупречника $r = 5$ cm и тачка *A* на растојању 11 cm од центра круга. Из тачке *A* повучена је једна права кроз центар *O* која сече кружну линију у тачкама *B* и *C* и друга права која сече кружну линију у тачкама *P* и *Q*. Ако је $AP = 8$ cm, израчунај дужину тетиве *PQ*.

4. Дат је круг са центром у тачки *O*. Тачка *A* је удаљена 4 cm од круга, а дужина тангентне дужи повучене из тачке *A* на круг је $AT = 8$ cm. Израчунај полупречник круга.

5. Симетрала унутрашњег угла у темену A једнакокраког троугла ABC ($AC = BC$) сече крак BC у тачки D. Ако су троуглови ABC и BDA слични, израчунај унутрашње углове троугла ABC.

6. Полуправа која дели угао при врху једнакокраког троугла ABC ($AC = BC$) у односу 1 : 2 сече основицу AB у тачки D. Ако су троуглови ABC и CAD слични, израчунај унутрашње углове троугла ABC.

7. Центар уписаног круга у једнакокраки троугао ABC ($AC = BC$) дели висину CC' у односу 5 : 4. Израчунај основицу AB ако је $AC = BC = 60$ cm.

8. Троуглови ABC и $A'B'C'$ су слични. Одреди коефицијент сличности ако је површина троугла ABC два пута већа од површине троугла $A'B'C'$.

9. Конструиши дуж дужине $\sqrt{6}$ cm, $\sqrt{12}$ cm, $\sqrt{14}$ cm, $\sqrt{15}$ cm, $\sqrt{30}$ cm и $\sqrt{33}$ cm.

10. Конструиши правоугли троугао код ког је $h = 5$ cm и $p = 6$ cm.

11. Конструиши правоугли троугао код ког је $a = 7$ cm и $p = \sqrt{10}$ cm.

12. Подножје хипотенузине висине удаљено је од катета правоуглог троугла 9 cm и 12 cm. Израчунај дужине катета тог троугла.

Питалице

1.	Ако важи $10 : 6 = 15 : x$, тада је $x = 9$.	да	не
2.	Свака два једнакокрака троугла су слична.	да	не
3.	Кругови полупречника 3 cm и 5 cm су слични.	да	не
4.	Ако су два угла једног троугла 43° и 60°, а два угла другог троугла 60° и 87°, тада су та два троугла слична.	да	не
5.	Ако су странице једног троугла 5 cm, 6 cm и 7 cm, а странице другог троугла 15 cm, 21 cm и 18 cm, тада су та два троугла слична.	да	не
6.	Странице једног троугла су 6 cm, 8 cm и 10 cm, а обим њему сличног троугла 72 cm. Најкраћа страница сличног троугла је тада 24 cm.	да	не
7.	Два правоугла троугла су слична ако имају једнаку по једну катету.	да	не
8.	Ако штап висине 1 m баца сенку дужине 60 cm, тада стуб висине 5 m баца сенку дужине 2,5 m.	да	не
9.	Хипотенузина висина дели хипотенузу на делове дужина 9 cm и 4 cm. Површина тог троугла је 36 cm^2.	да	не
10.	Ако се обими два троугла у односу 1 : 3, тада су и њихове одговарајуће висине у односу 1 : 3.	да	не

Предлог теста знања

1. Дате су дужи: $a = 20$ cm, $b = 12$ cm и $c = 50$ cm. Ако важи $a : b = c : d$, тада је d једнако:

(А) 20 cm **(Б)** 24 cm **(В)** 30 cm **(Г)** 35 cm **(Д)** 40 cm

2. Полуправе Op и Oq пресечене су паралелним правама a и b тако да је $a \cap Op = \{A\}$, $a \cap Oq = \{C\}$, $b \cap Op = \{B\}$ и $b \cap Oq = \{D\}$. Ако је $OA = 10$ cm, $AB = 6$ cm и $OC = 15$ cm, тада је:

(А) $CD = 8$ cm **(Б)** $CD = 9$ cm **(В)** $CD = 10$ cm **(Г)** $CD = 12$ cm **(Д)** $CD = 24$ cm

3. Ако је угао при врху једнакокраког троугла једнак 80°, тада је угао на основици њему сличног троугла једнак:

(А) 40° **(Б)** 45° **(В)** 60° **(Г)** 80° **(Д)** 50°

4. Странице троугла ABC су $a = 6$ cm и $b = 8$ cm, а странице њему сличног троугла $A'B'C'$ су $b' = 24$ cm и $c' = 30$ cm. Обим троугла $A'B'C'$ је:

(А) 24 cm **(Б)** 48 cm **(В)** 60 cm **(Г)** 72 cm **(Д)** 96 cm

5. Странице троугла ABC су $a = 12$ cm, $b = 15$ cm и $c = 18$ cm, а обим њему сличног троугла $A'B'C'$ је 90 cm. Разлика највеће и најмање странице троугла $A'B'C'$ тада је:

(А) 6 cm **(Б)** 12 cm **(В)** 18 cm **(Г)** 9 cm **(Д)** 15 cm

6. Катете правоуглог троугла су 6 cm и 8 cm. Висина која одговара хипотенузи је тада:

(А) 2,4 cm **(Б)** 4,8 cm **(В)** 5 cm **(Г)** 10 cm **(Д)** 7,2 cm

7. Разлика два највећа угла у троуглу ABC је 10°, а разлика два најмања угла у њему сличном троуглу је 40°. Однос углова у троуглу ABC је:

(А) $8 : 7 : 3$ **(Б)** $3 : 2 : 1$ **(В)** $4 : 3 : 2$ **(Г)** $7 : 6 : 5$ **(Д)** $7 : 6 : 3$

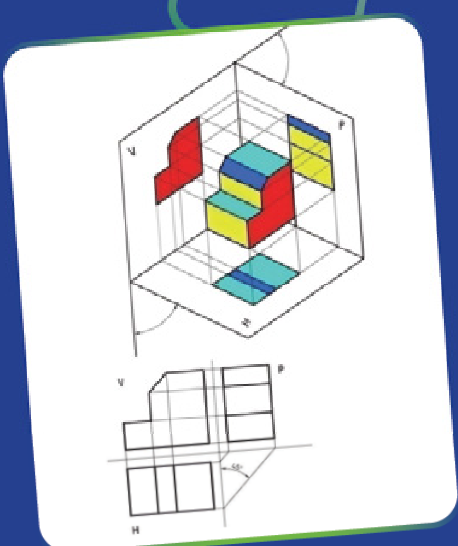
8. Центар уписаног круга једнакокраког троугла дели висину која одговара основици у односу $13 : 5$. Ако је основица троугла 60 cm, тада је површина овог троугла:

(А) 2 160 cm^2 **(Б)** 4 320cm^2 **(В)** 1 080 cm^2 **(Г)** 540 cm^2 **(Д)** 1 000 cm^2

Предлог контролне вежбе

1.1.	Нацртај произвољну дуж а затим је, користећи Талесову теорему, подели у односу 2 : 5.	**15**
1.2.	У правоуглом троуглу *ABC* чије су катете *AC* = 15 cm и *BC* = 20 cm права *p* паралелна са *AB* сече катете *AC* и *BC* у тачкама *E* и *F*, тако да је *EF* = 15 cm. Израчунај обим троугла *CEF*.	**20**
1.3.	Странице троугла *ABC* су *AB* = 18 cm, *BC* = 15 cm и *AC* = 12 cm. Права *p* паралелна са *AB* садржи тежиште троугла *ABC* и сече странице *AC* и *BC* у тачкама *E* и *F*. Одреди обим трапеза *ABFE*.	**25**
2.1.	Троуглови *ABC* и *PQR* су слични. Најмање странице ових троуглова су *AB* = 15 cm и *PQ* = 25 cm. Ако је *BC* = 18 cm, одреди *QR*.	**15**
2.2.	Једнакокраки троуглови *ABC* и *PQR* су слични, а однос њихових основица је *AB* : *PQ* = 3 : 2. Одреди обиме датих троуглова ако је крак *AC* = 15 cm, а висина *RR'* = 8 cm.	**20**
2.3.	Симетрала угла $\measuredangle B$ на основици *AB* једнакокраког троугла *ABC* сече крак *AC* у тачки *P*. Одреди углове троуглова *ABC* и *ABP* ако су они слични.	**25**
3.1.	Штап висине 1 m баца сенку дужине 80 cm. Колика је висина дрвета чија је сенка 12 m?	**15**
3.2.	Тачка *M*, која припада хипотенузи *AB* правоуглог троугла *ABC*, два пута је ближа катети *AC* него катети *BC*. У ком односу тачка *M* дели хипотенузу *AB* ако је *AC* = 8 cm и *BC* = 6 cm.	**20**
3.3.	У правоугли троугао *ABC* чије су катете *AC* = 12 cm и *BC* = 6 cm уписан је квадрат *CDEF* тако да теме *D* припада катети *AC*, теме *E* хипотенузи *AB* и теме *F* катети *BC*. Одреди површину квадрата *CDEF*.	**25**
4.1.	Хипотенузина висина дели хипотенузу правоуглог троугла на делове који су једнаки 9 cm и 16 cm. Израчунај површину тог троугла.	**15**
4.2.	Висина која одговара хипотенузи правоуглог троугла је 12 cm, а мања катета 15 cm. Израчунај обим и површину тог правоуглог троугла.	**20**
4.3.	Подножје *D* хипотенузине висине правоуглог троугла *ABC* удаљено је од једне катете 48 cm, а од друге 36 cm. Израчунај обим и површину троугла *ABC*.	**25**

2 ТАЧКА, ПРАВА, РАВАН



Појмови тачке, праве, полуправе, дужи, равни... познати су од раније. Међутим, о њиховој одређености и међусобним односима мање се зна. Ипак, мање су познате чињенице у вези са појмовима мимоилазности и пројектовања. Оба појма су везана за простор, који је, до сада, био мање присутан у настави математике.

Мимоилазност карактерише праве у простору које нису паралелне и немају заједничких тачака. Пројектовање објашњава како простор и објекте из простора (укључујући и мимоилазне праве) можемо, по одређеним правилима, пренети у раван. А само пројектовање је основ многих тековина цивилизације, од архитектонских и грађевинских подухвата (пирамиде, храмови, цркве, зграде, бродови, путеви, мостови, пруге...), па све до модерних филмских, телевизијских, ласерских и других пројекција.

Ова наставна тема, као и комплетна математичка наука, крије мале тајне неопходне за разумевање многих корисних примена и зато те тајне вреди упознати и савладати.

ТАЧКА, ПРАВА, РАВАН

У претходним разредима учили смо о геометријским објектима који су у једној равни – међусобном односу тачке и праве; међусобном односу правих; одређености праве, фигурама... За тај део геометрије користи се назив **планиметрија** – реч која је настала у средњем веку, комбиновањем латинске речи *planum* (што значи „раван”) и грчке речи *μετρεω* (која се чита *мет͞рео*, а значи „мерим”).

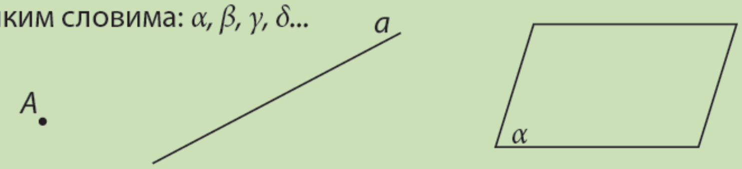
Предмет наших разматрања биће објекти у простору. Тај део геометрије зове се **стереометрија**. То је реч која се јавља у старој Грчкој и настала је од грчких речи *στερεοσ* (чита се *ст͞ереос* и значи „запремина”) и *μετρεω*. Учићемо о међусобном односу правих у простору, правих и равни, две и више равни, а након тога и о неким геометријским телима. Наравно, при томе ћемо објекте из окружења, из простора у коме се налазимо – користити као моделе.

Основни геометријски објекти, са којима смо се већ упознали у петом разреду, јесу: тачка, права и раван.

Тачке обележавамо великим штампаним словима латинице: $A, B, C, D\ldots$;

праве – малим писаним словима латинице: $a, b, c\ldots$;

а равни грчким словима: $\alpha, \beta, \gamma, \delta$...



2.1. Однос тачке и праве Одређеност праве

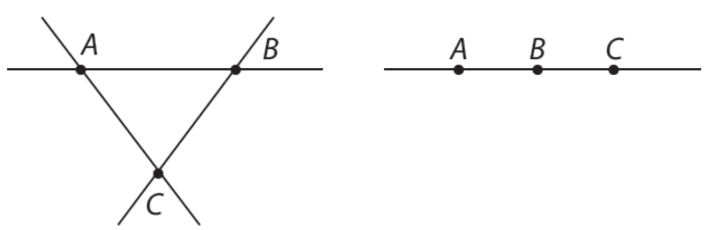
У овој лекцији ћемо размотрити међусобне односе тачака и правих.

пример 1

Колико правих се може конструисати кроз тачке A, B, C? Размотри све могуће случајеве.

Решење:

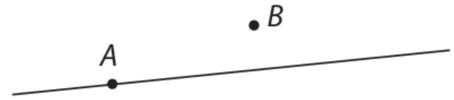
Можемо са слике уочити да у зависности од међусобног положаја тачака зависи колико правих можемо конструисати. На првој слици, кроз тачке A, B, C могуће је конструисати три праве, на другој слици постоји само једна права која пролази кроз све три тачке.



тврђење

Две различите тачке одређују тачно једну праву.

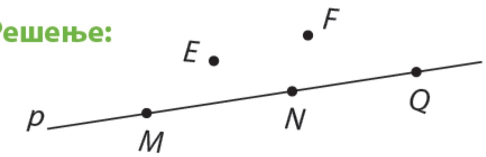
Ако тачка A припада правој p, записујемо: $\boldsymbol{A \in p}$.
Ако тачка B не припада правој p, тј. права p не садржи тачку B, то записујемо: $\boldsymbol{B \notin p}$.



пример 2

Нацртај праву p. Нацртај тачке M, N и Q које припадају правој p и тачке E и F које јој не припадају.

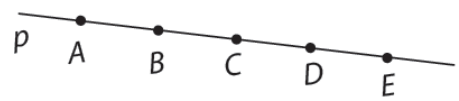
Решење:



пример 3

Нацртај 5 тачака у равни које све припадају једној правој.

Решење:



Ако 3 или више тачака припадају једној правој, кажемо да су колинеарне.

пример 4

Дато је 5 тачака, при чему не постоје 3 тачке које су на истој правој. Колико је правих одређено паровима тих тачака?

Решење:

Из сваке од пет тачака могу се конструисати по четири праве, што је укупно $5 \cdot 4$. Притом је свака права рачуната два пута. Тако, на пример, права одређена тачкама A и B и права одређена тачкама B и A јесте једна права. Дакле, укупан број правих које одређују ове тачке једнак је: $\frac{5 \cdot 4}{2} = 10$.

До истог закључка долазимо и ако из тачке A конструишемо све могуће, дакле, четири праве (AB, AC, AD, AE); из тачке B три праве (BC, BD, BE); из тачке C две праве (CD, CE) и из тачке D једну праву (DE). Укупан број конструисаних правих је $4 + 3 + 2 + 1 = 10$.

У општем случају, из сваке од n тачака (међу којима не постоје три колинеарне) постоји по $n - 1$ права. Тада је укупан број правих $n(n - 1)$. Добијени број треба поделити са 2, јер је у претходном поступку свака права рачуната два пута (на пример, као AB и као BA). Закључујемо:

тврђење

Ако се уочи n тачака (међу којима не постоје три колинеарне), онда оне одређују $\frac{n(n-1)}{2}$ различитих правих.

пример 5

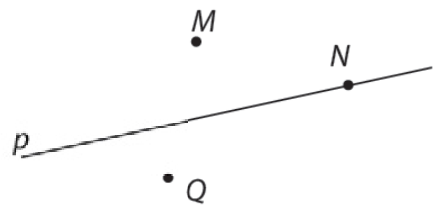
На једној правој уочено је 5 тачака. Колико дужи је одређено тим тачкама?

Решење:

Нека су дате тачке A, B, C, D, E. Може се уочити тачно 10 дужи (AB, AC, AD, AE, BC, BD, BE, CD, CE и DE).

ЗАДАЦИ

1. На слици су дате права p и тачке M, N и Q. Одреди међусобни положај тачака M, N и Q и праве p.



2. Нацртај праву a и тачке A, B, C, D тако да важи $A \in a, B \notin a, C \notin a, D \in a$.

3. Дат је правоугаоник $ABCD$. Колико је правих одређено паровима његових темена?

4. На правој a је дато 5, а на правој b 3 различите тачке. Колико дужи је одређено датим тачкама?

5. На правој a је дато 5, а на правој b су дате 3 различите тачке. Колико правих је одређено паровима тих тачака?

6. Колико дијагонала има осмоугао?

7. Колико је правих одређено паровима темена правилног осмоугла?

8. Колико правих одређују тачке A, B, C, D, E, F ако су тачке A, B, C и D колинеарне?

9. Дато је: а) 7 различитих тачака; б) 12 различитих тачака; б) n различитих тачака. Колико је правих одређено паровима тих тачака, ако не постоје 3 тачке које су колинеарне?

10. Дат је скуп од 20 тачака, при чему њих 10 припада једној правој. Колико је највише правих одређено паровима тачака из тог скупа?

11. Одреди најмањи број тачака у равни, ако је паровима тих тачака одређено укупно 105 правих.

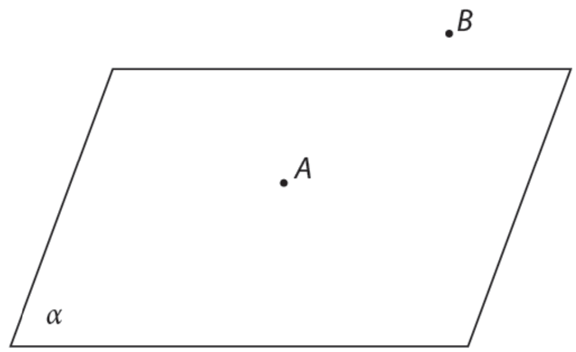
12. Одреди најмањи број тачака тако да је број правих одређених паровима тих тачака 10 пута већи од броја тачака.

Однос тачке, праве и равни
Одређеност равни

2.2.

Из петог разреда знамо да, ако је тачка A у равни α, кажемо и да тачка A припада равни α. Ако је тачка B ван равни α, кажемо да тачка B не припада равни α. Те чињенице исказујемо записом:

$$A \in \alpha,\ B \notin \alpha$$



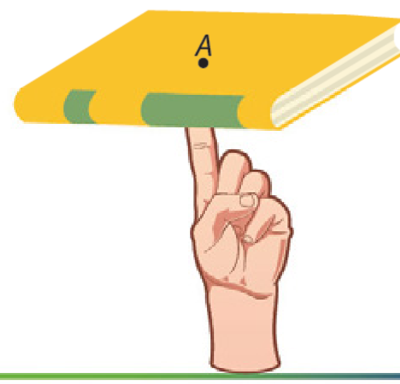
Размотримо чиме је одређена раван. Наслућујемо да раван није одређена једном тачком или са две различите тачке. Уверићемо се у то користећи свеску као модел равни и врх прста као модел тачке, односно праве.

пример 1

Изабери тачку A на свесци и посматрај положај свеске.

Решење:

Избором тачке A на свесци, положај свеске није одређен. Свеска се може померити у безброј положаја, а да при томе тачка A не мења положај.

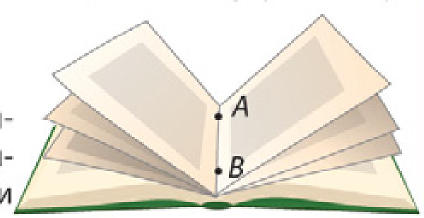


пример 2

Изабери тачке A и B, на пример, на рубу (ивици) свеске, и посматрај положај листова у свесци.

Решење:

Можемо посматрати листове отворене свеске. Листови су модели равни. Све те равни имају заједничке тачке A и B. Равни се могу померати, тј. обртати око праве AB. Приметимо да важи:

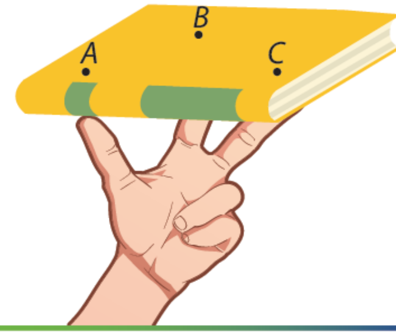


тврђење

Ако две различите тачке A и B припадају равни, тада све тачке праве AB припадају тој равни.

пример 3

Изабери 3 тачке на свесци. Шта уочаваш?



Решење:

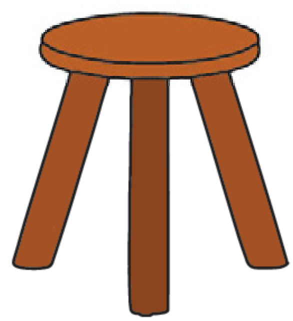
Ако изаберемо било које три тачке које нису колинеарне, раван која њих садржи је одређена.

тврђење **Три неколинеарне тачке одређују тачно једну раван.**

Чињеницу да тачке *A, B, C* одређују једну раван скраћено ћемо означавати као α (*A, B, C*).

пример 4

Раније су људи на селу правили ниске столице и ниске столове са три „ноге", тзв. троношце и синије. Зашто је троножац стабилан, тј. зашто не може да се „клати"?



Решење:

Три тачке које нису на једној правој одређују тачно једну раван, што значи да три подножја сваког од „стубова" троношца припадају једној равни, што обезбеђује да је троножац стабилан.

пример 5

Колико равни одређују једна права *p* и једна тачка *A* ван дате праве *p*?

Решење:

На правој *p* можемо уочити две тачке *B* и *C*. Како три тачке *A*, *B* и *C* одређују тачно једну раван, то уочене тачке припадају некој равни α. Већ уочена особина да и све остале тачке праве *p* припадају истој равни, говори да се ради о једној јединој равни.

Закључујемо:

тврђење **Права и тачка ван ње одређују тачно једну раван.**

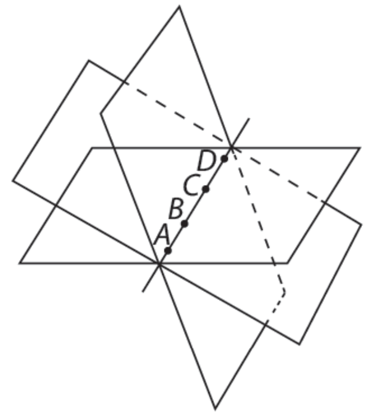
пример 6

Колико равни одређују тачке *A, B, C* и *D*?

Решење:

1. случај

Ако су тачке *A, B, C, D* на једној правој, тада није прецизно одређена ниједна раван, али постоји бесконачно равни које садрже ту праву, односно тачке *A, B, C, D*.



2. случај

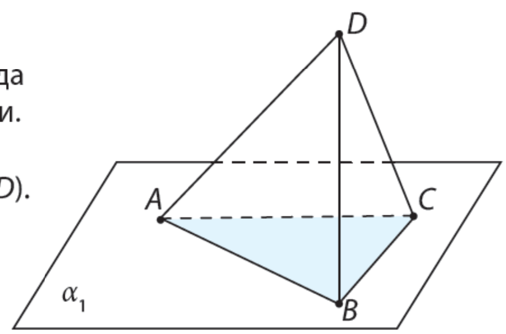
Ако једна од тачака припада равни која је одређена осталим трима тачкама, тада ове четири тачке одређују једну раван.

Било које три неколинеарне тачке припадају једној равни, тј. компланарне су.

За 4 и више тачака које припадају истој равни кажемо да су компланарне.

3. случај

Ако ове тачке нису у једној равни, тада оне одређују четири различите равни. То су равни:
$\alpha_1(A, B, C)$, $\alpha_2(A, B, D)$, $\alpha_3(A, C, D)$, $\alpha_4(B, C, D)$.

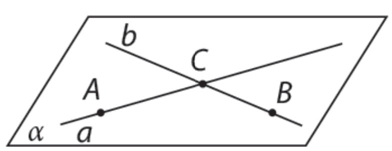


пример 7

Колико равни је одређено двема правама које се секу?

Решење:

Нека се праве *a* и *b* секу у тачки *C*. Нека је тачка *A* на правој *a*, и тачка *B* на правој *b*. Тада су тачке *A*, *B* и *C* неколинеарне, и одређују тачно једну раван. Та раван садржи обе праве, јер садржи по две њихове тачке (а самим тим, и све тачке датих правих).



Закључујемо:

тврђење

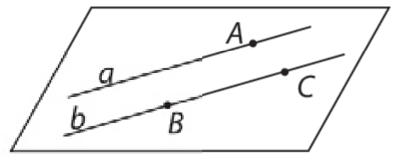
Две праве које се секу одређују тачно једну раван.

пример 8

Колико равни је одређено са две различите паралелне праве a и b?

Решење:

Две праве су паралелне уколико припадају истој равни и немају заједничких тачака. Нека је на правој a тачка A, и на правој b тачке B и C. Тачке A, B и C нису на једној правој, па одређују тачно једну раван. Та раван је једина која садржи дате паралелне праве.

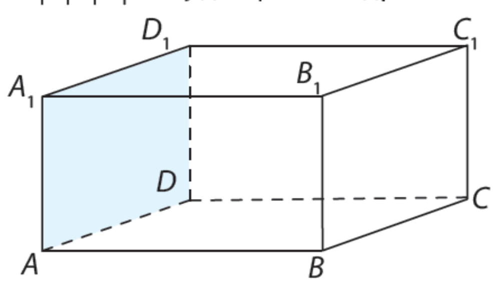


Уочавамо да важи:

тврђење **Две различите паралелне праве одређују тачно једну раван.**

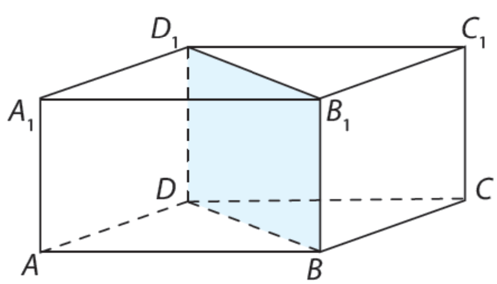
пример 9

На датом квадру $ABCDA_1B_1C_1D_1$ обој део равни одређен тачкама A, D, D_1.



пример 10

На датом квадру $ABCDA_1B_1C_1D_1$ обој део равни одређен правама $p(B, D_1)$ и $q(D, B_1)$.



13. Нацртај модел равни α и тачке *A, B, C, D, E* тако да важи: $A \in \alpha$, $B \notin \alpha$, $C \notin \alpha$, $D \in \alpha$, $E \in \alpha$.

14. У равни α дате су паралелне праве *a* и *b* и тачке $A \in b$, $B \in b$, $C \notin a$, $C \notin b$, $C \in \alpha$, $D \in a$, $E \in b$. Нацртај те праве и тачке, поштујући дате услове.

15. Допуни следеће реченице, тако да добијена тврђења буду тачна.

а) Раван је одређена са три тачке које ______________________________.

б) Раван је одређена са правом и тачком _______________________.

в) Раван је одређена са две ____________________ које се секу.

г) Раван је одређена са две различите ___________________ праве.

16. Дат је квадар *ABCDEFGH*. Која његова темена

а) припадају **б)** не припадају

равни која је одређена тачкама *B*, *C*, *G*?

17. Шта може бити пресек праве и равни? Заокружи тачне одговоре.

а) тачка **б)** дуж **в)** полуправа **г)** права

18. Одреди број равни одређених са 5 тачака, од којих никоје 4 нису у истој равни?

19. Дат је квадрат *ABCD* и тачка *S* која није у равни квадрата. Одреди број равни одређених датим скупом тачака {*A, B, C, D, S*}.

20. Дати су троуглови *ABC* и *DEF* који нису у истој равни. Одреди број равни одређених датим скупом тачака {*A, B, C, D, E, F*}.

21. Дате су 3 паралелне праве. Одреди највећи број равни одређених паровима тих правих.

22. Дате су 4 паралелне праве, од којих никоје три не припадају једној равни. Одреди број равни одређених паровима ових правих.

23. Дато је 5 паралелних правих, при чему њих 3 припада једној равни. Одреди највећи број равни одређених паровима тих правих.

24. Нацртај квадар $ABCDA_1B_1C_1D_1$ и обој:

а) део равни одређен тачкама A_1, D_1, B;

б) део равни одређен тачкама A, C, A_1;

в) део равни одређен правом $p(C, C_1)$ и тачком A;

г) део равни одређен правом $p(D, D_1)$ и тачком B;

д) део равни одређен правом $p(A, D)$ и тачком C;

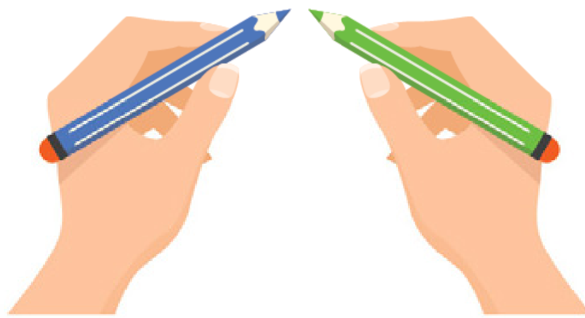
ђ) део равни одређен правама $p(A_1, D_1)$ и $q(B, C)$.

За сваки пример нацртај посебну слику.

25. Колико различитих равни је одређено ивицама коцке $ABCDA_1B_1C_1D_1$?

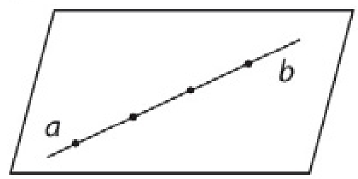
2.3. Међусобни односи правих

Изучавање могућих односа настављамо у скупу правих у простору и, као и у претходним разматрањима, коришћењем различитих модела. Као модел за међусобни однос двеју правих могу нам корисно послужити две оловке и њихови могући међусобни положаји.

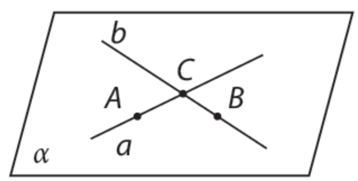


Какав међусобни положај могу имати две праве у простору?

1. случај: Ако две праве имају заједничке све тачке, кажемо да **се поклапају**. Чињеницу да се праве a и b поклапају записујемо $\boldsymbol{a \equiv b}$.



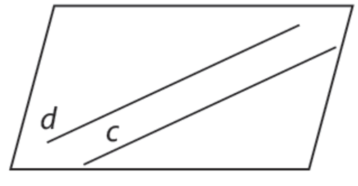
2. случај: Ако две праве имају тачно једну заједничку тачку, кажемо да **се секу**. Чињеницу да се две праве a и b секу у тачки C, записујемо: $\boldsymbol{a \cap b} = \{\boldsymbol{C}\}$. Из претходних разматрања смо већ закључили да те две праве одређују једну раван.



Следећа могућност је да две праве немају заједничких тачака, тј. $a \cap b = \varnothing$. У том случају, постоје две ситуације:

- Постоји раван у којој су те две праве;
- Не постоји раван у којој су те две праве.

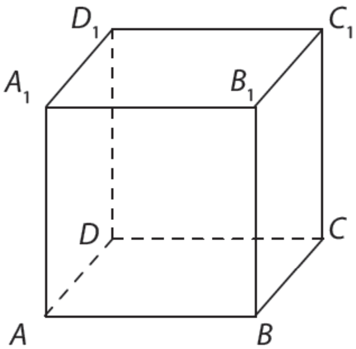
3. случај: Ако две праве немају заједничких тачака, а постоји раван у којој су те праве, тада су праве **паралелне**. Та чињеница се записује као $\boldsymbol{d \parallel c}$. За две праве које се поклапају такође кажемо да су **паралелне**.



4. случај: Ако две праве немају заједничких тачака, а не постоји раван која садржи те две праве, тада кажемо да су праве **мимоилазне**.

пример 1

На моделу коцке $ABCDA_1B_1C_1D_1$ утврди које праве одређене ивицама коцке се секу са правом одређеном тачкама A и B.



Решење:

Праве $p_1(A, D)$, $p_2(B, C)$, $p_3(A, A_1)$, $p_4(B, B_1)$ – укупно 4 праве секу праву $p(A, B)$, а тачке пресека су редом: A, B, A, B.

пример 2

На моделу коцке $ABCDA_1B_1C_1D_1$ утврди које праве одређене ивицама коцке су паралелне са правом одређеном тачкама B и C.

Решење:

Праве $p_1(A, D)$, $p_2(B_1, C_1)$, $p_3(A_1, D_1)$ – укупно три праве паралелне су са правом одређеном тачкама B и C.

пример 3

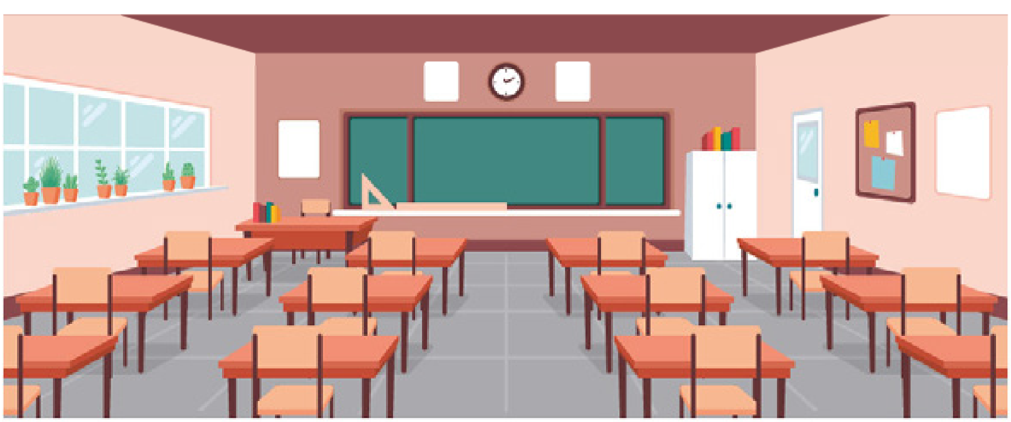
На моделу коцке $ABCDA_1B_1C_1D_1$ утврди које праве одређене ивицама коцке су мимоилазне са правом одређеном тачкама C и D.

Решење:

Праве $p_1(A, A_1)$, $p_2(B, B_1)$, $p_3(A_1, D_1)$, $p_4(B_1, C_1)$ – укупно четири праве мимоилазне су са правом одређеном тачкама C и D. Те праве са правом $p(C, D)$ нису паралелне, а немају ни заједничких тачака.

пример 4

У учионици покажи моделе правих које се секу, моделе правих које су паралелне и моделе правих које се мимоилазе.



ЗАДАЦИ

26. У равни су дате две паралелне праве a и b и тачке $A \in b$, $B \notin a$, $B \notin b$, $C \notin a$, $C \notin b$, $D \in a$, $E \in b$. Нацртај те праве и тачке, поштујући дате услове.

27. Заокружи слово испред тачног одговора.

Ако две праве имају две различите заједничке тачке, тада се те праве:

а) секу;

б) поклапају;

в) мимоилазе.

28. Ако су праве a и b мимоилазне, тада оне припадају равнима које:

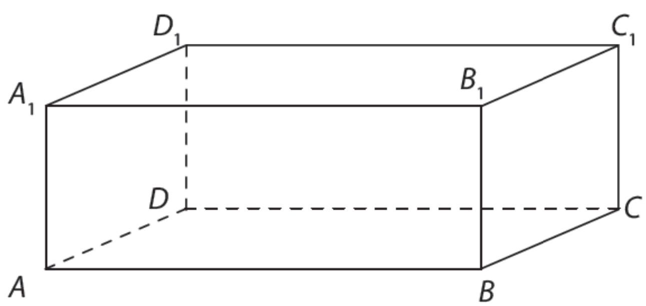
а) се поклапају;

б) су паралелне;

в) се секу.

Нетачан је само један од одговора. Који?

29. Дат је квадар $ABCDA_1B_1C_1D_1$ (види слику). Наведи праве које су одређене ивицама квадра:



а) паралелне са правом $p(C, C_1)$;

б) нормалне на $p(C, C_1)$;

в) секу праву $p(C, C_1)$;

г) мимоилазне су са $p(C, C_1)$.

30. Праве a, b, c припадају једној равни. Праве a и b се секу у тачки C, а праве b и c се секу у тачки T. У каквом су међусобном положају праве a и c ако су тачке C и T различите?

31. Дате су различите праве a, b, c. Праве a и b се секу у тачки C, а праве b и c се секу у тачки T. У каквом су међусобном положају праве a и c ако су тачке C и T различите?

32. Дате су две различите праве a и b и тачке A, B, C и D тако да важи $a \cap b = \{A\}$, $B \in b$, $C \in a$, $D \notin a, b$. Колико је највише равни одређено датим правама и тачкама?

33. Дате су две различите праве a и b и тачке A, B, C, D, тако да важи $a \parallel b$, $A \in a$, $B \in b$, $C, D \notin a, b$. Колико је највише равни одређено датим правама и тачкама?

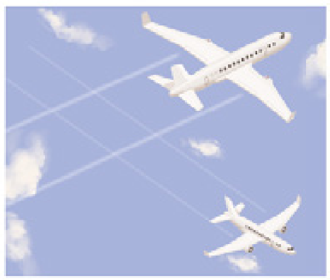
34. У равни α дате су праве $a \parallel b \parallel c \parallel d$ и праве $p \parallel q \parallel r$. Колико највише пресечних тачака имају дате праве?

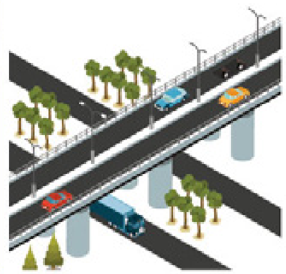
Мимоилазне праве 2.4.

У претходној лекцији увели смо појам мимолазних правих. Рекли смо да, ако две праве немају заједничких тачака, и не постоји раван у којој су те праве, тада кажемо да су те праве *мимоилазне*.

пример 1

У каквом су међусобном положају праволинијске путање два авиона у ваздуху, да ли ће се путање пресећи? Слично, праволинијски аутопут и надвожњак, у каквом су међусобном положају?





Решење:

У оба случаја уочавамо да праволинијске путање авиона, односно два аутомобила, ако их схватимо праволинијски, нису у истој равни и да се неће пресећи.

пример 2

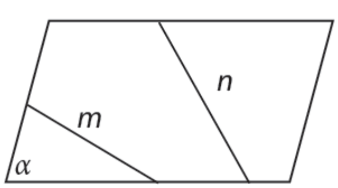
На моделу учионице покажи праве које су мимоилазне са ивицом коју чине:
а) под и раван табле;
б) таваница и зид на коме се налазе прозори;
в) зид на коме се налазе табла и зид на коме се налазе прозори.

пример 3

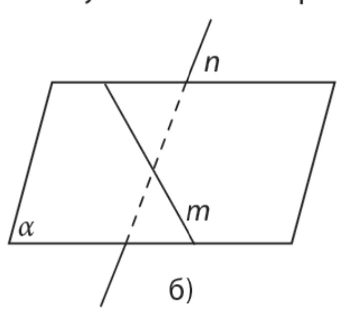
На којој од следећих слика су приказане мимоилазне праве?

На слици а – праве m и n су у равни α, па не могу бити мимоилазне.
На слици б – права m је у равни, а права n испод равни, и очигледно не постоји раван којој припадају.
На слици в – праве су испод равни, али могуће је и да се секу.

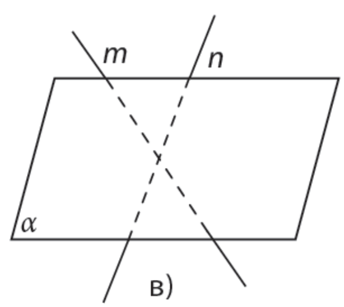
Дакле, на слици б – приказане су мимоилазне праве.



а)



б)

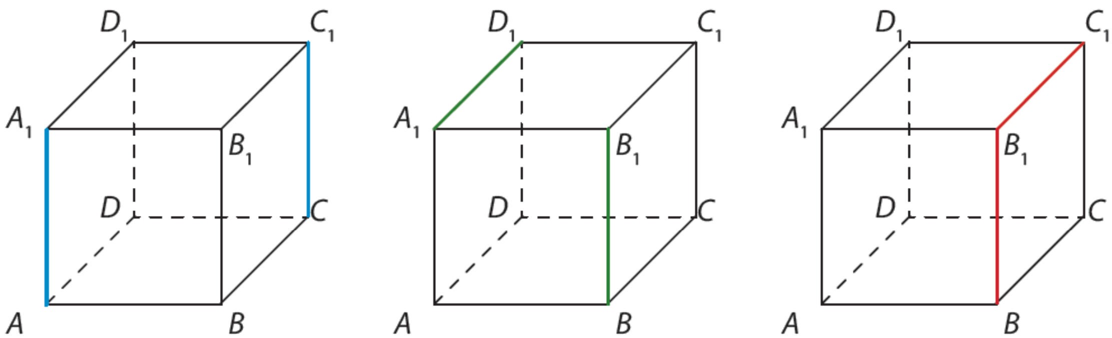


в)

пример 4

На следећим сликама одреди међусобни положај правих које садрже обојене ивице коцке.

Решење:



На првој слици праве одређене ивицама коцке су паралелне, на другој мимоилазне, а на трећој се секу.

пример 5

На моделу коцке $ABCDA_1B_1C_1D_1$ утврди које праве одређене њеним ивицама су мимоилазне са правом одређеном тачкама A и B.

Решење:

Можемо уочити да су праве $p_1(A_1, D_1)$, $p_2(B_1, C_1)$, $p_3(C, C_1)$, $p_4(D, D_1)$ мимоилазне са правом $p(A, B)$.

пример 6

На моделу коцке $ABCDA_1B_1C_1D_1$ утврди које праве одређене паровима темена коцке су мимоилазне са правом одређеном тачкама A и B.

Решење:

Са правом $p(A, B)$ мимоилазне су следеће праве: $p_1(A_1, D_1)$, $p_2(B_1, C_1)$, $p_3(C, C_1)$, $p_4(D, D_1)$, $p_5(A_1, C_1)$, $p_6(B_1, D_1)$, $p_7(C, D_1)$, $p_8(D, C_1)$, $p_9(D, A_1)$, $p_{10}(C, B_1)$. Има их десет.

ЗАДАЦИ

35. На моделу квадра $ABCDA_1B_1C_1D_1$ утврди које праве одређене његовим ивицама су мимоилазне са правом одређеном тачкама C и C_1.

36. У каквом су односу праве $p(A, D)$ и $q(C, C_1)$ које одређују темена квадра $ABCDA_1B_1C_1D_1$?

37. У каквом су међусобном положају две различите праве ако:

а) имају бар две различите заједничке тачке;

б) имају тачно једну заједничку тачку;

в) немају заједничких тачака?

38. Нека је $ABCDA_1B_1C_1D_1$ квадар. Заокружи слова испред тачних тврђења:

а) права одређена тачкама A и A_1 и права одређена тачкама B_1 и C_1 се секу.

б) права одређена тачкама A и A_1 и права одређена тачкама B_1 и C_1 су мимоилазне.

в) права одређена тачкама A и A_1 и права одређена тачкама B_1 и C_1 су паралелне.

г) права одређена тачкама D_1 и C_1 и права одређена тачкама B и B_1 су мимоилазне.

39. Нацртај модел коцке $ABCDA_1B_1C_1D_1$ па одреди:

а) све праве одређене теменима коцке паралелне са правом одређеном теменима A_1 и D_1;

б) све праве одређене теменима коцке нормалне на праву одређену теменима A и D;

в) све праве одређене теменима коцке мимоилазне са правом одређеном теменима B и C;

г) све ивице коцке садржане у равни одређеној теменима D, C, C_1.

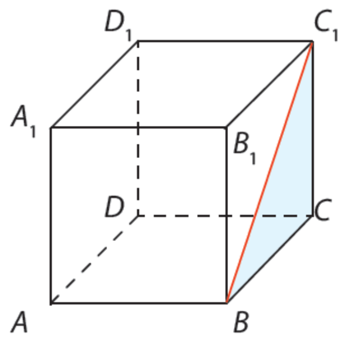
За сваки пример нацртај нову слику.

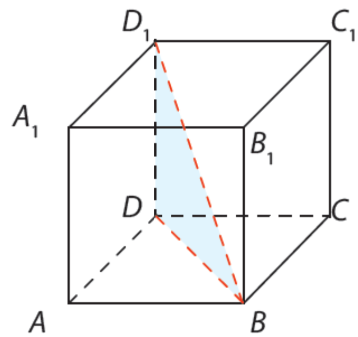
40. Праве p и q су мимоилазне. Ако права r сече сваку од правих p и q, колико је равни одређено паровима правих p, q и r?

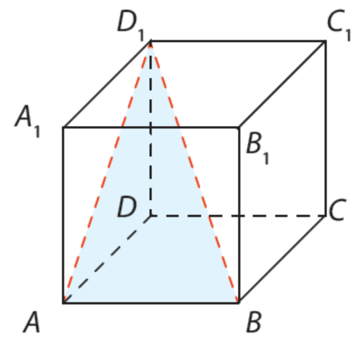
41. Праве a и b мимоилазне су са правом c, а међусобно су паралелне. Ако су тачке A, B, C такве да је $A \in a$, $B \in b$, $C \in c$, колико је највише равни одређено тачкама A, B, C и правама a, b, c?

42. Праве a и b секу се у тачки P. Праве a и c су паралелне, а праве b и c мимоилазне. Ако су тачке A, B, C такве да је $A \in a$ и $A \neq P$, $B \in b$ и $B \neq P$, а $C \in c$, одреди највећи број равни одређених тачкама A, B, C и правама a, b, c.

43. За сваки правоугли троугао обележен на сликама означи прав угао:





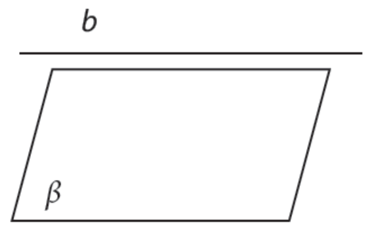


2.5. Односи праве и равни Нормала на раван Растојање тачке од равни

У каквом међусобном положају могу бити свеска и оловка?

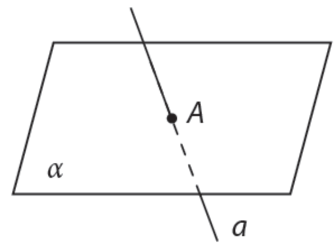
Уочавамо да постоје три могућности.

1) Права и раван немају заједничких тачака.



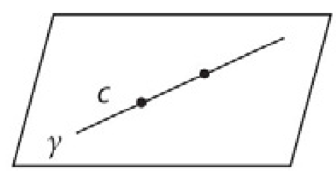
Права b и раван β немају заједничких тачака.
Тада је права b паралелна равни β.
Ту чињеницу записујемо као $b \parallel \beta$, што суштински значи да је $b \cap \beta = \varnothing$.

2) Права и раван имају тачно једну заједничку тачку.



Права a и раван α имају заједничку тачку A. Тада кажемо да права a продире раван α у тачки A. Тачку A називамо тачка продора, и ту чињеницу записујемо као $\alpha \cap a = \{A\}$.

3) Права и раван имају бар две различите заједничке тачке.

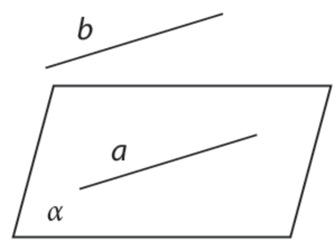


Ако права c и раван γ имају две различите заједничке тачке, тада су све тачке праве c у равни γ, па кажемо да је права c у равни γ или да раван γ садржи праву c.
Ту чињеницу записујемо као $c \subset \gamma$ што заправо значи да је $c \cap \gamma = c$.

пример 1

Права a је у равни α, а права b је ван те равни и паралелна је са правом a. У каквом је положају права b према равни α?

Решење:

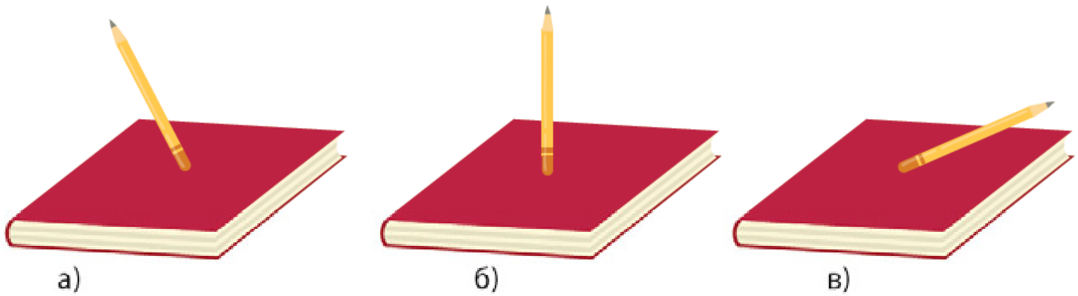


Из услова да права не припада равни α, следи да је права b или сече или је паралелна са равни α. Ако би права b пресецала раван α у некој тачки M, онда би због паралелности са правом a, права b била у равни α, што је супротно претпоставци. Према томе, права b је паралелна са равни α.

Посебан положај праве која продире раван је *права нормална на раван*.

пример 2

Међусобни положаји оловке и свеске су представљени на сликама (а, б, в). По твом мишљењу, која слика представља оловку која је нормална на свеску?

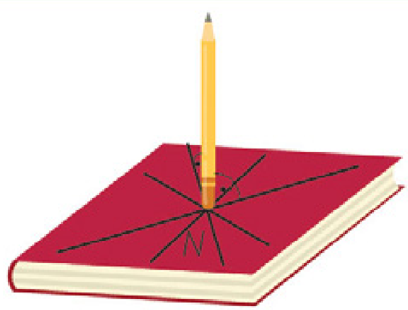


Решење:

На слици б) оловка је нормална на раван свеске.

Обележимо тачку продора са N и нацртајмо неколико правих у свесци, тако да садрже ту тачку продора. Замишљена права одређена оловком гради праве углове са правама које су у равни и садрже тачку продора N.

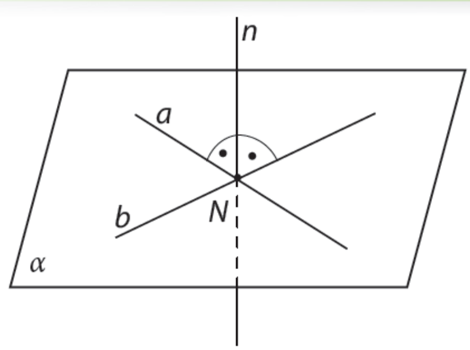
Кажемо да је права a нормална на раван α ако је нормална на сваку праву те равни која садржи тачку продора праве a и равни α.



Ако треба да проверимо да је нека права нормална на раван, да ли треба да проверавамо угао између те праве и сваке праве те равни, која садржи тачку продора? Јасно је да је такав захтев тешко изводљив! Зато ћемо користити следеће тврђење:

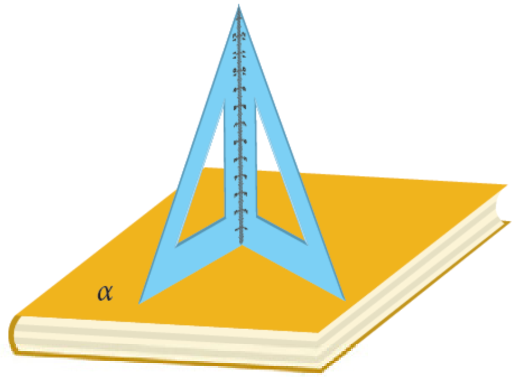
тврђење

Ако је права n, која продире раван α у тачки N, нормална на две различите праве те равни које садрже тачку N, онда је права n нормална на раван α.



пример 3

Два троугаона лењира постави тако да им је по једна катета у равни свеске, а да се други пар катета састави. У каквом је положају права одређена састављеним паром катета према равни свеске?



Решење:

Права одређена састављеним паром катета нормална је на правама које су одређене другим паром катета тих лењира, па је, према томе, нормална и на раван свеске.

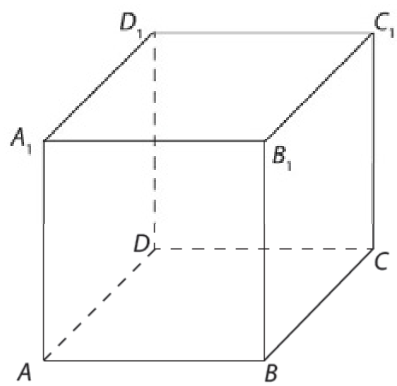
пример 4

Посматрај коцку $ABCDA_1B_1C_1D_1$. У каквом су односу права одређена тачкама D и D_1 и раван одређена тачкама A, B, C? Које праве одређене ивицама коцке су нормалне на раван $ABCD$?

Решење:

Права одређена тачкама D и D_1 нормална је на праве одређене тачкама A и D, тј. D и C, па је нормална и на раван одређену тачкама $\alpha(A, B, C)$.

Права одређена тачкама A и A_1 нормална је на праве одређене тачкама A и B односно A и D, па је нормална и на раван $\alpha(A, B, C)$. Слично се може показати и да су праве $p(B, B_1)$ и $q(C, C_1)$ нормалне на раван $\alpha(A, B, C)$.



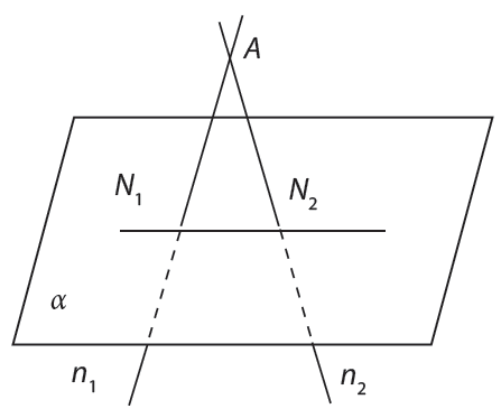
пример 5

Нека је тачка A ван равни α. Одреди број правих које садрже тачку A и нормалне су на раван α.

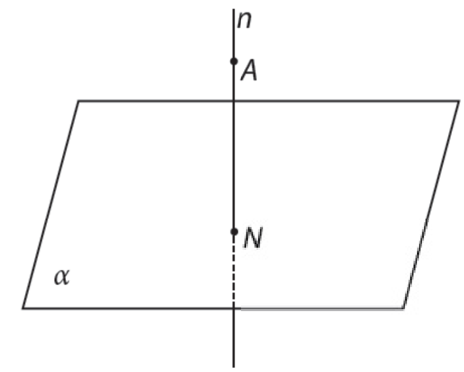
Решење:

Претпоставимо да кроз тачку A постоје две праве n_1 и n_2 које су нормалне на раван α и које раван α продиру у тачкама N_1 и N_2 што значи да права $p(N_1, N_2)$ припада равни α.

Посматрамо добијени троугао AN_1N_2. Како је права AN_1 нормална на раван α, то је права AN_1 нормална на сваку праву која садржи тачку N_1, па и на праву N_1N_2 и тада је $\sphericalangle AN_1N_2 = 90°$. Слично је и права AN_2 нормална на сваку праву која садржи тачку N_2, па и на праву N_1N_2 и тада је $\sphericalangle AN_2N_1 = 90°$. Следи да је у уоченом троуглу AN_1N_2 трећи $\sphericalangle N_1AN_2 = 0°$, што значи да се праве n_1 и n_2 поклапају и чине јединствену нормалу n из тачке A на раван α.



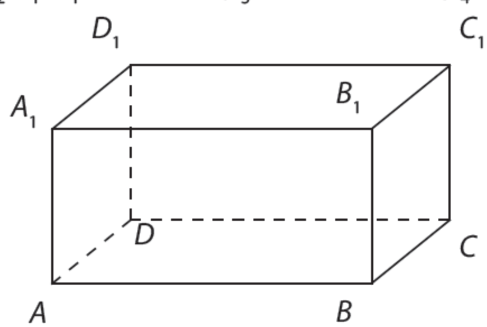
Нека је N тачка продора нормале n из тачке A кроз раван α. Кажемо да је дужина дужи AN растојање тачке A од равни α.



ЗАДАЦИ

44. На моделу квадра $ABCDA_1B_1C_1D_1$ приказаном на слици, раван α је одређена тачкама A, D, A_1. Одреди у каквом су положају у односу на раван α следеће праве:

а) $p_1(A_1, B_1)$; **б)** $p_2(B_1, C_1)$; **в)** $p_3(B, D)$; **г)** $p_4(B, C_1)$; **д)** $p_5(C, D_1)$.



45. На моделу квадра $ABCDA_1B_1C_1D_1$ раван α је одређена тачкама D, C, C_1. У празно поље упиши један од знакова $\subset$, $||$, $\perp$ тако да настали записи буду тачни.

а) $p_1(A, D)$_____ α

б) $p_2(A_1, B_1)$_____ α

в) $p_3(C, D_1)$_____ α

г) $p_2(B, C)$_____ α

46. Праве a и b су нормалне на раван α. Тада можемо рећи да:

а) се праве a и b секу;

б) су праве a и b паралелне;

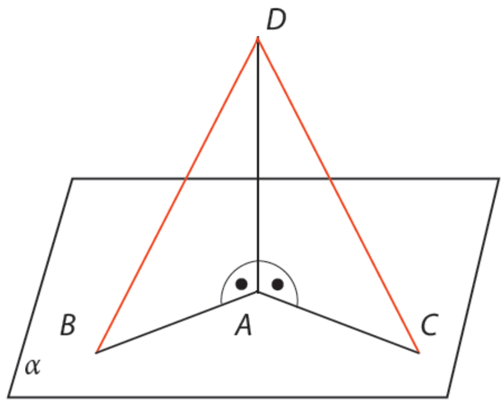
в) су праве a и b мимоилазне.

Заокружи слово испред тачног одговора.

47. Права a је у равни α, а права b је ван те равни и паралелна је са њом. У каквом међусобном положају могу бити праве a и b?

48. Нацртај у свесци троугао ABC и изабери тачку S у том троуглу. У тачки S постави праву p која продире раван ABC. На правој p изабери тачку M, тако да је $\sphericalangle ASM = \sphericalangle BSM = 90^\circ$. Одреди $\sphericalangle CSM$.

49. Тачке A, B, C су у равни α, а тачка D је ван те равни, тако да је права AD нормална на раван α. Види слику! Ако је $DB = DC$, докажи да је $AB = AC$.



50. Дата је коцка $ABCDA_1B_1C_1D_1$ ивице дужине 12 cm и раван α која је одређена тачкама B, C, B_1. Израчунај растојање тачке D од равни α.

51. Дата је коцка $ABCDA_1B_1C_1D_1$ ивице дужине 10 cm и раван α која је одређена тачкама B, C, B_1. Израчунај растојање:

а) тачке M која је одређена пресеком правих $p_1(A, D_1)$ и $p_2(A_1, D)$ од равни α;

б) тачке N која је одређена пресеком правих $q_1(A_1, C_1)$ и $q_2(B_1, D_1)$ од равни α.

52. Дат је квадар $ABCDA_1B_1C_1D_1$ ивица $AB = 3$ cm, $BC = 4$ cm, $AC = 5$ cm. Израчунај растојање тачке D_1 од равни α која је одређена тачкама A, B, C.

53. Дат је квадар $ABCDA_1B_1C_1D_1$ ивица $AB = 3$ cm, $BC = 4$ cm, $AC = 5$ cm и раван α која је одређена тачкама A, B, C. Израчунај растојање:

а) тачке M која је одређена пресеком правих $p_1(A_1, C_1)$ и $p_2(C_1, D_1)$ од равни α;

б) тачке N која је одређена пресеком правих $q_1(A, C_1)$ и $q_2(B, D_1)$ од равни α.

54. У равни π дат је једнакостранични троугао ABC странице 12 cm. Ван те равни дата је тачка M која је од сваког темена троугла удаљена 20 cm. Израчунај растојање тачке M од равни троугла ABC.

55. У равни π дат је квадрат $ABCD$ странице 12 cm. Ван те равни дата је тачка M која је од сваког темена квадрата удаљена 20 cm. Израчунај растојање тачке M од равни квадрата $ABCD$.

Односи две равни 2.6.

пример 1

Утврди у каквом су међусобном положају раван пода твоје учионице и:
а) равни зидова; б) раван плафона.

Решење:

а) Раван пода сече се са равнима зидова;

б) Раван пода и раван плафона су паралелне (ако таваница није коса).

пример 2

Ако равни α и β имају две различите заједничке тачке, онда оне имају и заједничку праву. Докажи.

Решење:

Нека су A и B две различите заједничке тачке равни α и β. Како тачке A и B припадају равни α то и права $p(A, B)$ припада равни α.

На исти начин, тачке A и B припадају равни β, па и права $p(A, B)$ припада равни β. Закључујемо да је: $\alpha \cap \beta = p(A, B)$.

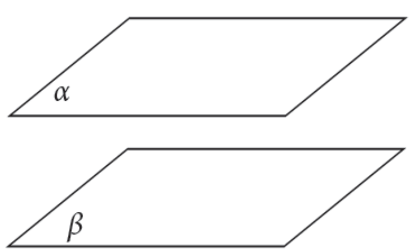
Из претходних примера можемо уочити да за две различите равни α и β постоје три различита међусобна положаја.

1) Две равни имају све заједничке тачке, тј. оне се поклапају. То се записује: $\alpha \equiv \beta$ или $\alpha \cap \beta = \alpha = \beta$

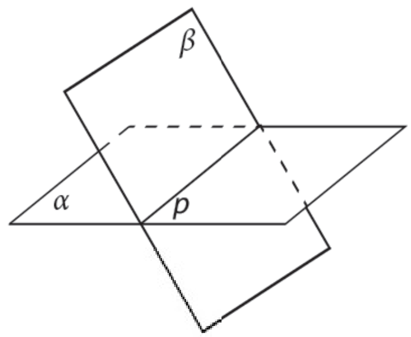
2) Две равни немају ниједну заједничку тачку, што записујемо: $\alpha \parallel \beta$, или $\alpha \cap \beta = \varnothing$.

3) Две равни се секу, што записујемо на следећи начин: $\alpha \cap \beta \neq \varnothing$ или $\alpha \cap \beta = p$.

За две равни које немају ниједну заједничку тачку или се поклапају – кажемо да су паралелне.



За две равни које имају заједничку праву – кажемо да се секу.



пример 3

Дата је коцка $ABCDA_1B_1C_1D_1$. Испитај међусобни положај:

а) равни одређене тачкама A, B, C и равни одређене тачкама A, D, D_1;

б) равни одређене тачкама A, D, D_1 и равни одређене тачкама B, B_1, C_1;

в) равни одређене тачкама A, B, C и равни одређене тачкама B, D, C_1;

Уколико се равни секу, одреди пресечну праву.

Решење:

а) Равни одређене тачкама A, B, C и A, D, D_1 се секу, и њихова пресечна права је $p(A, D)$.

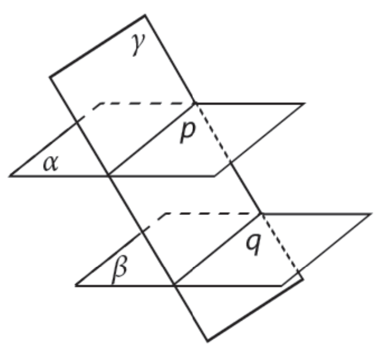
б) Равни одређене тачкама A, D, D_1 и B, B_1, C_1 су паралелне.

в) Равни одређене тачкама A, B, C и B, D, C_1 се секу, њихова пресечна права је $q(B, D)$.

пример 4

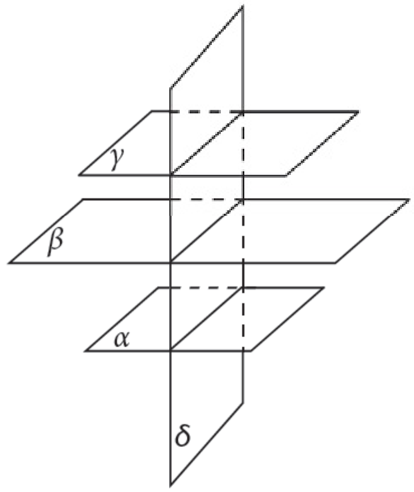
Раван γ сече раван α по правој p и раван β по правој q. Ако су равни α и β паралелне, у каквом су међусобном положају праве p и q?

Решење:



Ако су равни α и β паралелне и раван γ сече раван α по правој p, онда раван γ може бити паралелна, или сећи раван β. Како би, у случају да је $\gamma \parallel \beta$ и $\beta \parallel \alpha$, било $\gamma \parallel \alpha$ (што је супротно услову да се γ и α секу), то остаје да се γ и β секу. Како права p припада равни α, а права q њој паралелној равни β, то праве p и q немају заједничких тачака. Дакле, p и q су или мимоилазне или паралелне. Како и p и q припадају равни γ, оне нису мимоилазне већ су паралелне.

56. Одредити однос сваке две равни приказане на слици.



57. Нека су α и β различите паралелне равни. Права a је у равни α, а права b је у равни β. У каквом међусобном положају могу бити праве a и b?

58. Нека су α и β равни које се секу. Права a је у равни α, а права b је у равни β. У каквом су међусобном положају праве a и b?

59. Нека је права m паралелна равни α. Ако раван β садржи праву m, тада се равни α и β:

а) секу;

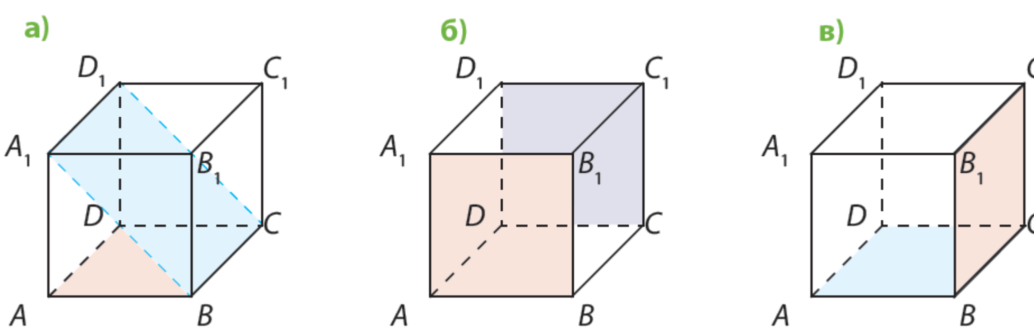
б) паралелне су;

в) поклапају се.

Заокружи слова испред тачних одговора.

60. Раван α сече раван β по правој a и раван γ по правој b. Ако су праве a и b паралелне, у каквом су међусобном положају равни β и γ?

61. На слици је приказана коцка $ABCDA_1B_1C_1D_1$. Утврди у ком су међусобном положају делови равни означених на сликама.



62. Наброј парове међусобно паралелних равни које су одређене странама коцке.

2.7. Нормална пројекција тачке, праве и дужи на раван

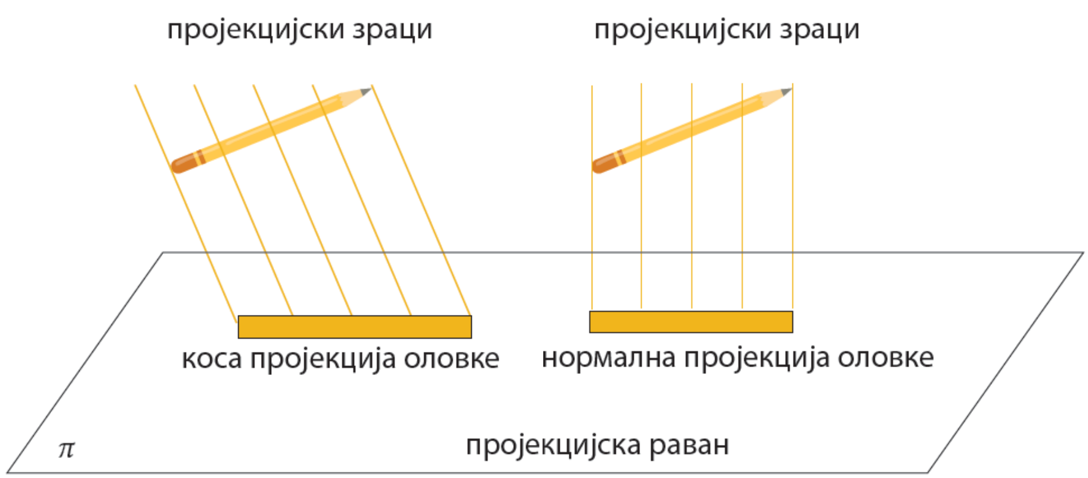
У техничким наукама, али и примењеним уметностима, **пројектовање** је метод којим се реални просторни облици, које је у највећем броју случајева због огромних димензија немогуће транспортовати, трансформишу у фигуре у равни, које се онда много лакше користе за конструкцију оригиналних предмета (зграда, машина, мостова...).

Елементи пројектовања су: извор светлости, оригиналан предмет, пројекцијска раван и пројекција. Извор светлости може емитовати зраке који су коси у односу на пројекцијску раван, али и оне који су нормални на пројекцијску раван. У првом случају говоримо о косом, а у другом о нормалном (ортогоналном) пројектовању.

пример 1

Прикажи косу и нормалну пројекцију оловке О на хоризонталну пројекцијску раван π.

Решење:



На основу претходног примера, дефинишемо нормалну (ортогоналну) пројекцију тачке на раван.

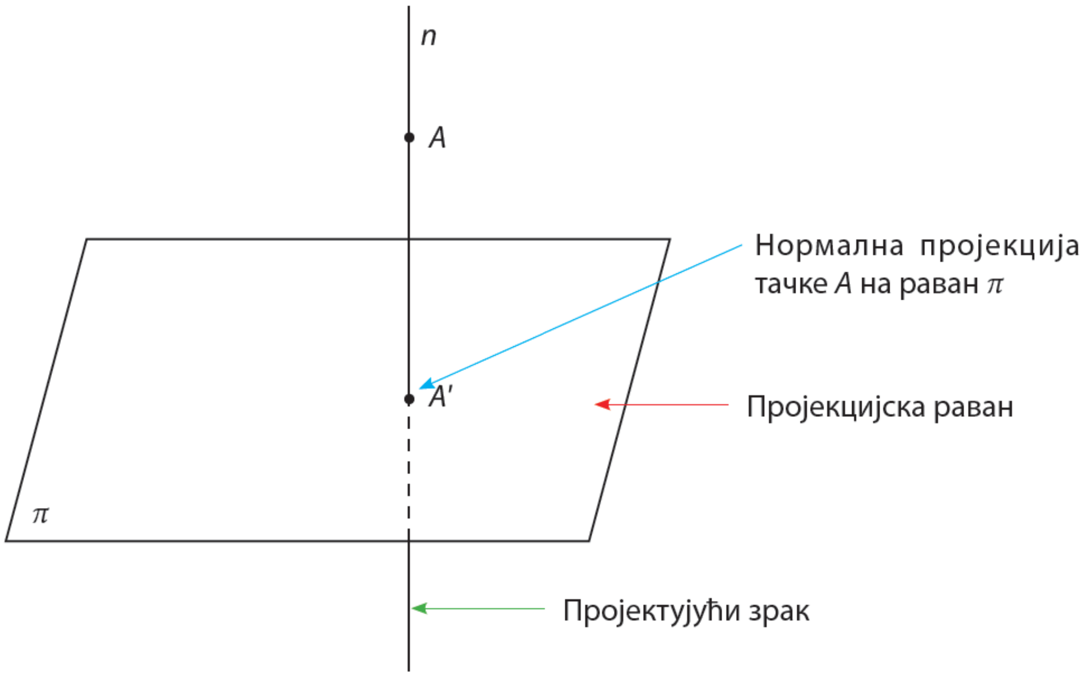
Нека је тачка A ван равни π. Нека је A' продор нормале n из тачке A кроз раван π. Нормална (ортогонална) пројекција тачке A на раван π је тачка A' у којој нормала из тачке A на раван π продире раван π.

Права AA' назива се **пројектујући зрак** тачке A. Раван π је **пројекцијска раван**.

пример 2

Нацртај нормалну пројекцију тачке A на раван π.

Решење:



Први корак у решавању датог задатка јесте конструкција праве n (пројектујући зрак) која садржи дату тачку A и нормална је на дату раван π (пројекцијска раван). Доказали смо да постоји само једна таква права, па је тада: $n \cap \pi = \{A'\}$.

Тачка A' је нормална (ортогонална) пројекција тачке A на пројекцијску раван π.

пример 3

Шта је пројекција тачке X која припада пројекцијској равни π?

Решење:

Пројектујући зрак n поставља се кроз тачку X нормално на раван π. Како нормална пројекција тачке X припада пројекцијској равни π, то је $X' \equiv X$, што значи да се свака тачка која припада пројекцијској равни пројектује у саму себе, тј. да, ако је $X \in \pi$, онда је нормална пројекција X' иста та тачка.

Из претходна два примера можемо закључити следеће:

тврђење

Нормална (ортогонална) пројекција тачке увек је тачка.

пример 4

Размотримо све могуће случајеве нормалне пројекције дужи AB на раван π, ако су A' и B' нормалне пројекције тачака A и B на раван π.

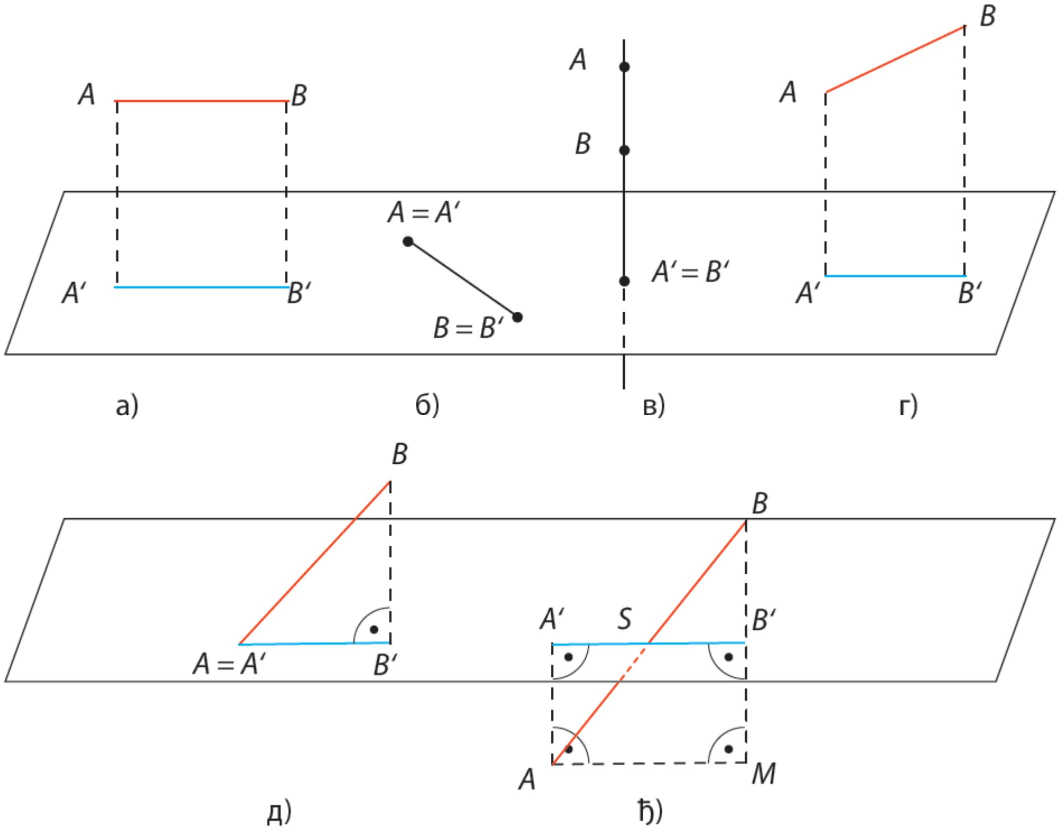
Решење:

а) Ако је дуж паралелна равни π, тада је четвороугао $A'B'BA$ правоугаоник, па је пројекција дужи AB дуж $A'B'$, при чему је $AB = A'B'$.

б) Ако је AB у равни π, онда је $A' = A$ и $B' = B$, па је ортогонална пројекција дужи AB сама та дуж. Тада је дуж $AB = A'B'$.

в) Ако је дуж AB нормална на раван π, онда је пројекција дужи AB, продор праве AB кроз раван π. Дакле, једна тачка, па је дужина пројекције једнака 0.

г) Ако дуж AB није ни нормална ни паралелна са равни, онда је дуж AB дужи крак правоуглог трапеза $A'B'BA$, па је њена пројекција – дуж $A'B' < AB$.



д) Ако је дуж AB коса према равни π и једна крајња тачка, на пример A, јесте у равни π, њена пројекција је дуж $A'B'$ и важи да је у правоуглом троуглу ABB' хипотенуза $AB > AB'$.

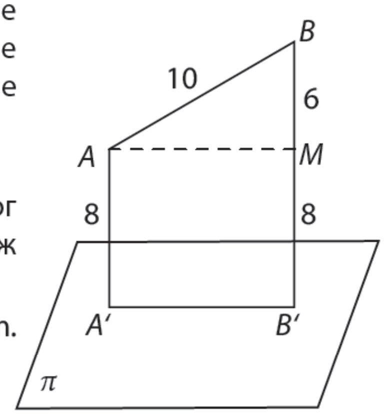
ђ) Ако су тачке A и B са разних страна равни π и нека је S тачка продора, тада је пројекција дужи AB на раван π дуж $A'B'$. Како је $A'B' = A'S' + SB'$, $AB = AS + SB$, $A'S < AS$, $SB' < SB$ следи да је $A'B' < AB$.

Разматрањем претходног примера закључујемо:

тврђење **Нормална (ортогонална) пројекција дужи на раван је дуж или тачка.**

пример 5

Са исте стране равни π дате су тачке A и B, такве да је тачка A од равни удаљена 8 cm, а тачка B 14 cm. Ако је $AB = 10$ cm, одреди дужину ортогоналне пројекције дужи AB на раван π.



Решење:

Из услова задатка представљених на скици нормалног пројектовања дужи AB на раван π, јасно следи да је дуж $AA' = 8$ cm, а дуж $BB' = 14$ cm.

Ако је $AM \parallel A'B'$, онда је $MB = BB' - BM = 14\text{ cm} - 8\text{ cm} = 6\text{ cm}$.

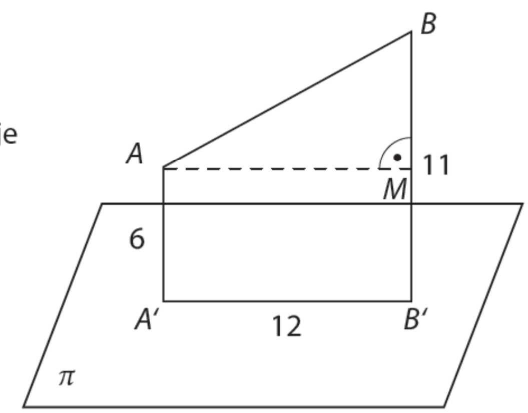
Применом Питагорине теореме на правоугли троугао AMB добија се да је

$AB^2 = AM^2 + MB^2$ или $AM^2 = AB^2 - MB^2 = 10^2 - 6^2 = 100 - 36 = 64$, па је $AM = 8$ cm.
Како је $AM = A'B'$ то је и нормална пројекција дужи AB дуж $A'B' = 8$ cm.

пример 6

На слици је дуж AB и њена ортогонална пројекција $A'B'$ на раван π. На основу података са слике одреди дужину дужи AB.

Решење:

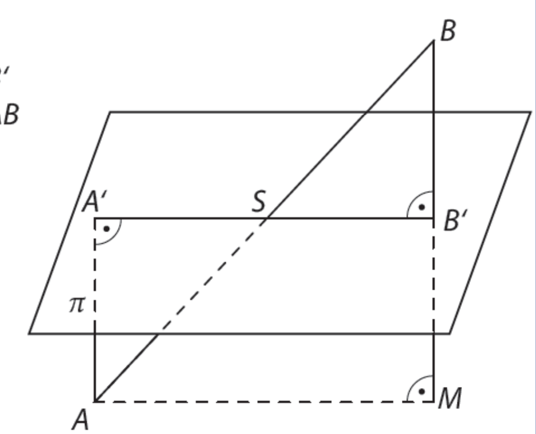


Нека је A' пројекција тачке A на раван π, а B' пројекција тачке B. Тада је $A'B'$ пројекција дужи на раван π. Четвороугао $A'B'BA$ је правоугли трапез чије су основице $AA' = 6$ cm и $BB' = 11$ cm и краћи крак $A'B' = 12$ cm. Разлика растојања $BM = BB' - B'M = 11\text{ cm} - 6\text{ cm} = 5\text{ cm}$.
Пошто је: $AM = A'B' = 12$ cm,
то је $AB^2 = AM^2 + MB^2 = 12^2 + 5^2 = 169$,
па следи да је $A'B = 13$ cm.

пример 7

Израчунај дужину пројекције $A'B'$ дужи AB на раван π ако је $AB = 17$ cm, $AA' = 7$ cm, $BB' = 8$ cm. Тачке A и B су са разних страна равни π.

Решење:



Нека је A' пројекција тачке A на раван π, а B' пројекција тачке B и тачка S продор дужи AB кроз раван π.
Тада је $A'B'$ пројекција дужи на раван π.
Дужина дужи AB је 17 cm. Троугао AMB је правоугли троугао чије су катете AM и BM, а хипотенуза AB.
Пошто је:
$AM = A'B'$, $AA' = B'M$,
$BM = BB' + B'M = 8\text{ cm} + 7\text{ cm} = 15\text{ cm}$
то је $AM^2 = AB^2 - MB^2$,
па следи да је $AM = A'B' = 8$ cm.

ЗАДАЦИ

63. Шта може бити нормална пројекција на раван једне:

а) тачке;

б) дужи?

64. Одреди међусобни положај дужи и пројекцијске равни ако је нормална пројекција те дужи на пројекцијску раван:

а) тачка;

б) дуж исте дужине;

в) дуж мање дужине.

65. Дужи AB и CD су једнаке и паралелне. Шта може бити њихова нормална пројекција на пројекцијску раван π?

66. Темена B, C и D квадра $ABCDA_1B_1C_1D_1$ одређују раван π. Одреди нормалне пројекције на раван π:

а) тачке B_1;

б) тачке A;

в) ивице AA_1;

г) ивице A_1B_1.

67. Израчунај дужину нормалне пројекције дужи $AB = 15$ cm на раван α, ако тачка A припада равни α, а тачка B је удаљена 9 cm од равни α.

68. Израчунај дужину дужи AB чија је нормална пројекција на раван α дужине 15 cm, тачка B припада равни α, а тачка A је удаљена 8 cm од равни α.

69. Нека су A' и B' нормалне пројекције тачака A и B на раван α (тачке A и B су са исте стране равни α). Ако је $AB = 12$ cm, $AA' = 3$ cm, $BB' = 9$ cm, одреди дужину $A'B'$.

70. Нека су A' и B' ортогоналне пројекције тачака A и B на раван α (тачке A и B су са исте стране равни α). Одреди дужину дужи AB ако је :

а) $AA' = 1$ cm, $BB' = 4$ cm и $A'B' = 4$ cm;

б) $AA' = 4$ cm, $BB' = 6$ cm и $A'B' = 6$ cm.

71. Одреди дужину дужи $A'B'$ где су A' и B' нормалне пројекције тачака A и B на раван α ако је $AB = 15$ cm, $AA' = 4$ cm, $BB' = 8$ cm и тачке A и B су са разних страна равни α.

72. Нека су A' и B' нормалне пројекције тачака A и B на раван α (тачке A и B су са разних страна равни α). Одреди дужину дужи AB ако је $AA' = 4$ cm, $BB' = 8$ cm и $A'B' = 5$ cm.

73. Нека су A' и B' нормалне пројекције тачака A и B на раван α (тачке A и B су са исте стране равни α). Одреди дужину дужи BB' ако је: $AA' = 10$ cm, $AB = 13$ cm и $A'B' = 12$ cm.

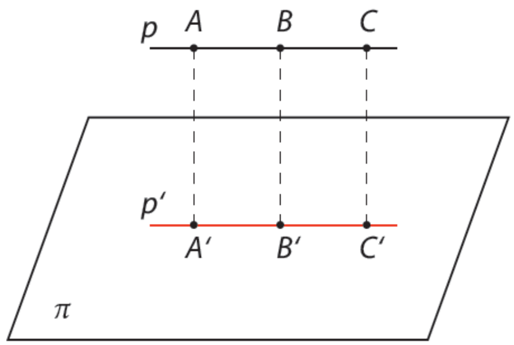
Нормална пројекција праве, угао између праве и равни 2.8.

Већ смо научили како се одређује нормална пројекција тачке и дужи на пројекцијску раван. Видели смо да је нормална пројекција дужи на раван тачка или дуж. Размотримо како се пројектује права.

пример 1

Одреди нормалну пројекцију праве p која је паралелна пројекцијској равни π.

Решење:

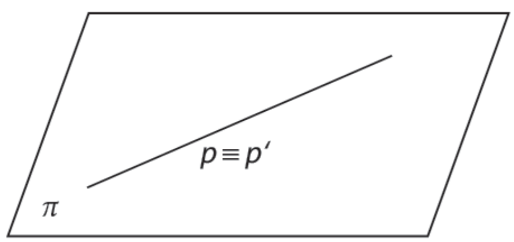


Ако је права p паралелна пројекцијској равни π, онда је паралелна својој пројекцији на ту раван.

пример 2

Одреди нормалну пројекцију праве p која припада пројекцијској равни π.

Решење:

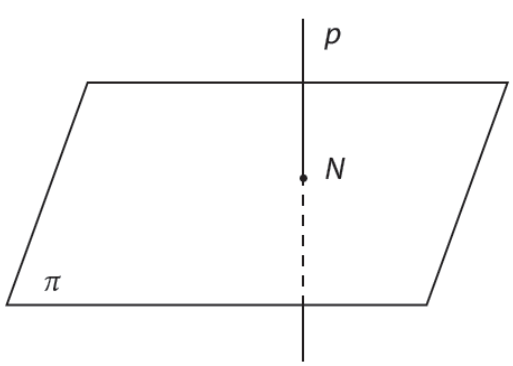


Права која је у пројекцијској равни, поклапа се са својом пројекцијом на ту раван.

пример 3

Одреди ортогоналну пројекцију праве p која је нормална на пројекцијску раван π.

Решење:



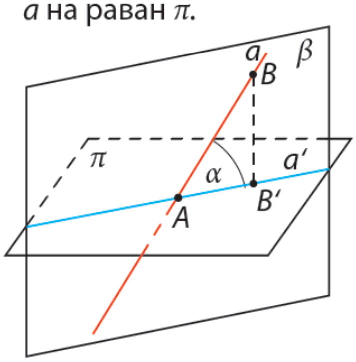
Ортогонална пројекција праве нормалне на раван је тачка (тачка продора) N.

пример 4

Одреди ортогоналну пројекцију праве a која сече пројекцијску раван π и није нормална на њу.

Решење:

Пројекцију праве, која са пројекцијском равни заклапа неки угао, добићемо тако што пројектујемо две произвољне тачке те праве. Нека су то тачке A и B. Ако је A продор праве a кроз раван π, онда је $A \equiv A'$, а пројекција тачке B је тачка B'. Тачке A' и B' одређују праву a' која је ортогонална (нормална) пројекција праве a на раван π.



Права a и њена пројекција a' припадају равни β. Права a' припада равни π и припада равни β, па је права a' (нормална пројекција праве a), у ствари, пресек равни β (која садржи праву a и нормална је на пројекцијску раван) и равни π.

Оштар угао α који образује права a са својом пројекцијом a' на раван π назива се угао између праве a и равни π. За угао α се каже и да је нагибни угао праве a према равни π.

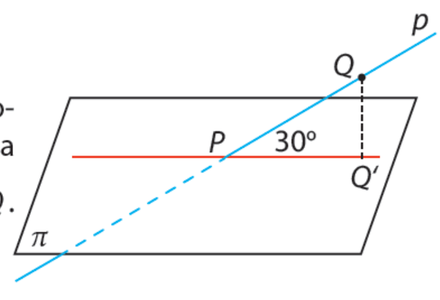
пример 5

Права p гради са равни π угао од 30° и продире је у тачки P. Тачка Q је на правој p тако да је $PQ = 6$ cm. Израчунај дужину пројекције дужи PQ на раван π и растојање тачке Q од равни π.

Решење:

Тачка P се поклапа са својом пројекцијом. Троугао PQQ' је правоугли. Хипотенуза $PQ = 6$ cm, а $\sphericalangle Q'PQ = 30^\circ$. Важи $PQ^2 = PQ'^2 + Q'Q^2$ и $QQ' = \frac{1}{2}PQ$.

Следи да је $PQ' = 3\sqrt{3}$ cm, $QQ' = 3$ cm.



пример 6

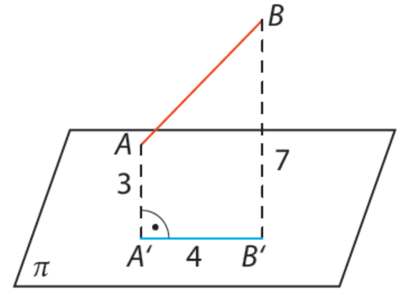
Тачке A и B су са исте стране равни π, од пројекцијске равни π редом на растојању 3 cm и 7 cm. Ако је дужина пројекције дужи на раван π једнака 4 cm, колика је дужина дужи AB? Колики је угао између праве AB и равни π?

Решење:

Обележимо са A' и B' пројекције тачака A и B на раван π. Четвороугао $A'B'BA$ је правоугли трапез чије су основице 3 cm и 7 cm, а краћи крак 4 cm.

Дуж AB је дужи крак овог трапеза и једнака је $4\sqrt{2}$ cm.

Угао између праве AB и равни π је 45°.

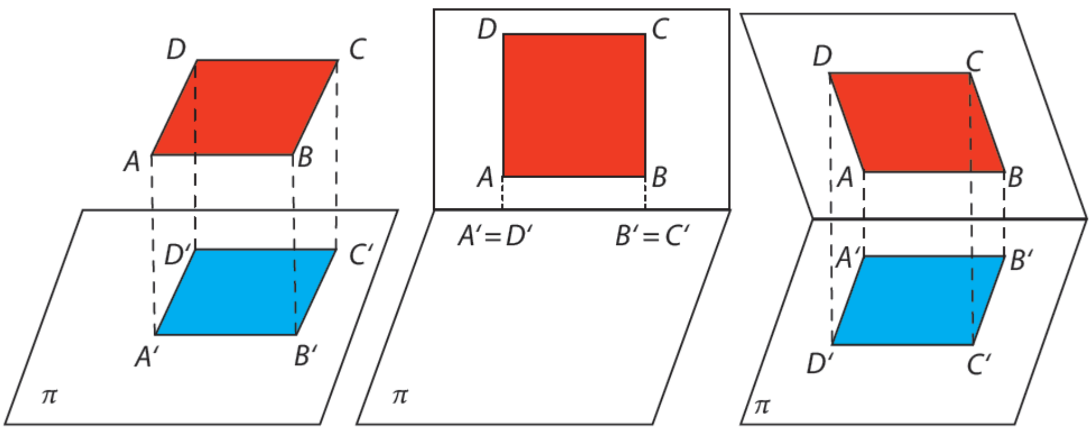


пример 7

Одреди пројекцију квадрата *ABCD* на раван π ако је бар један пар његових страница паралелан равни π.

Решење:

Ако је раван квадрата паралелна са равни π, пројекција квадрата је њему подударан квадрат (слика а).
Ако је раван квадрата нормална на раван π, пројекција квадрата је дуж једнака страници квадрата (слика б).
Ако је раван квадрата коса према равни π, пројекција квадрата је правоугаоник. При томе, странице *AB* и *CD* које су паралелне равни π пројектују се у правој величини, а странице *AD* и *BC* пројектују се у мање дужи (слика в).



а) б) в)

ЗАДАЦИ

74. Пројекције на раван двеју паралелних различитих правих могу бити:

а) различите паралалне праве;

б) праве које се секу;

в) две тачке;

г) једна права.

Само један одговор је нетачан. Који?

75. Пројекције на раван двеју правих које се секу могу бити:

а) различите паралалне праве;

б) праве које се секу;

в) две тачке;

г) једна права;

д) права и тачка ван ње.

Заокружи слова испред тачних одговора.

76. Пројекције двеју правих које су мимоилазне на раван могу бити:

а) различите паралелне праве;

б) праве које се секу;

в) две тачке;

г) једна права.

Заокружи слова испред тачних одговора.

77. Права p продире раван π у тачки P. Тачка M припада правој p, а од равни π удаљена је 12 cm. Колико је тачка M удаљена од тачке продора P ако је нагибни угао праве p према равни π:

а) 30°; **б)** 45°; **в)** 60°.

78. Права p продире раван π у тачки P. Тачке M и N су са исте стране равни π и припадају правој p. Од равни π удаљене су 18 cm и 12 cm. Одреди дужину дужи MN и дужину њене пројекције $M'N'$ на раван π, ако је нагибни угао праве p према равни π:

а) 30°; **б)** 45°; **в)** 60°.

79. Права p продире раван π у тачки P. Нагибни угао праве p према равни π је 45°. На правој p са различитих страна равни π дате су тачке M и N које су удаљене 6 cm и 10 cm од равни π. Одредити дужину дужи MN и дужину њене пројекције на раван π.

80. Нека су A' и B' ортогоналне пројекције тачака A и B на раван α. Тачка A припада равни α, а тачка B је удаљена од ње 8 cm. Одреди дужину $A'B'$ и AB ако је угао између праве одређене тачкама A и B и равни α:

а) 30° **б)** 45° **в)** 60°

81. Тачке A и B су са исте стране равни α. Тачка A је на растојању 17 cm од равни α, а тачка B је на растојању 29 cm од равни α. Одредити растојање од равни α средишта S дужи AB.

82. Тачке A и B су са разних страна равни α. Тачка A је на растојању 17 cm од равни α, а тачка B је на растојању 29 cm од равни α. Одредити растојање од равни α средишта дужи AB.

83. Једнакостранични троугао ABC, $AB = 4$ cm, налази се у равни α која сече раван π по правој AB. Растојање тачке C од равни π је $\sqrt{3}$ cm. Израчунај површину троугла ABC', који је пројекција троугла ABC на раван π.

84. Квадрат $ABCD$, $AB = 6$ cm , налази се у равни α која сече раван π по правој AB. Растојање тачке C од равни π је 2 cm. Израчунај обим и површину четвороугла $ABC'D'$, који је нормална пројекција квадрата $ABCD$ на раван π.

85. Правоугаоник $ABCD$, $AB = 6$ cm, $BC = 8$ cm налази се у равни α која сече раван π по правој AB. Растојање тачке C од равни π је $4\sqrt{2}$ cm. Израчунај обим и површину четвороугла $ABC'D'$, који је нормална пројекција правоугаоника $ABCD$ на раван π.

Полиедри 2.9.

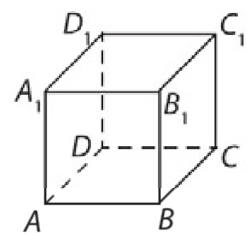
Са геометријским телима смо се сретали у математици још од првог разреда. Можемо уочити да је геометријско тело део простора ограничен са свих страна неким површима. „Граница” која раздваја део простора који припада геометријском телу од остатка простора назива се **површ геометријског тела**. Површ геометријског тела и унутрашња област простора заједно чине **геометријско тело**. Површ геометријског тела може да буде састављена од делова **равних** или од делова **кривих површи**.

Геометријско тело чија је површ састављена од коначно много многоуглова – назива се полиедар.

При томе, два многоугла имају највише једну заједничку страницу, три или више многоуглова имају највише једно заједничко теме. На пример, коцка и квадар су полиедри.

пример 1

Колико темена, ивица, страна има коцка?

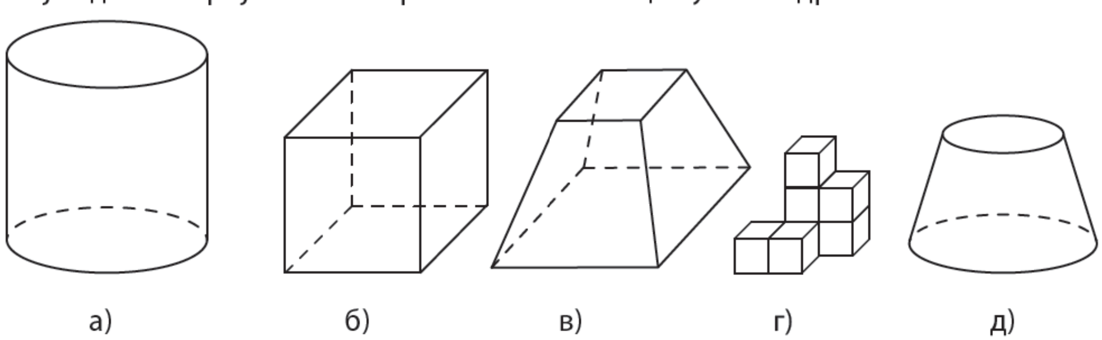


Решење:

Коцка има 8 темена, 12 ивица и 6 страна (квадрата).

пример 2

Која од геометријских тела приказаних на слици су полиедри?



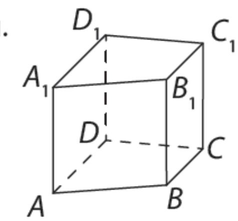
Решење:

Полиедри су на сликама: б), в) и г). Тела на првој и петој слици нису полиедри, јер њихове површи нису многоугаоне.

Многоуглови који чине површ полиедра називају се **стране полиедра**.
Стране полиедра, које имају заједничку страницу, називају се суседне стране полиедра, а њихова заједничка страница се назива **ивица полиедра.** Три или више страна полиедра (многоуглова) могу имати заједничку тачку која се назива **теме полиедра**. Дуж чије су крајње тачке два темена полиедра која нису на истој страни, назива се **дијагонала полиедра**.

пример 3

Наброј темена, ивице и стране полиедра приказаног на слици.



Решење:

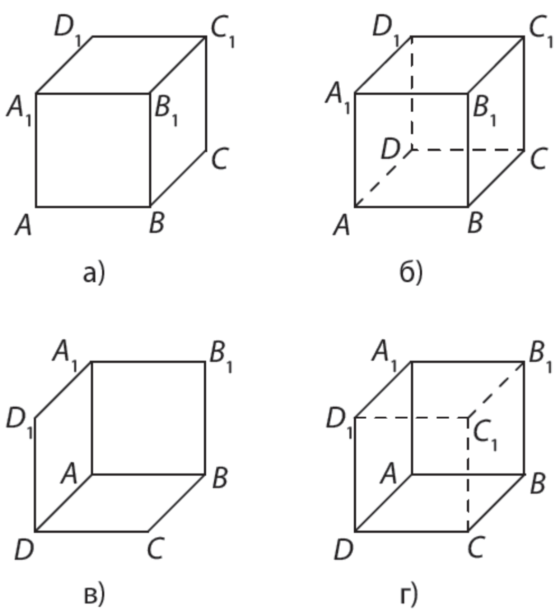
Темена су: $A, B, C, D, A_1, B_1, C_1, D_1$.

Ивице су: $AB, BC, CD, DA, AA_1, BB_1, CC_1, DD_1, A_1B_1, B_1C_1, C_1D_1, D_1A_1$.

Стране су: $ABCD, ABB_1A_1, BCC_1B_1, CDD_1C_1, ADD_1A_1, A_1B_1C_1D_1$.

пример 4

Коцку $ABCDA_1B_1C_1D_1$ можемо представити као што је приказано на сликама. Обележи видљива темена.



Решење:

На слици а) сасвим је јасно да је теме D „скривено", кажемо „невидљиво" посматрачу. Невидљиве су и ивице DA, DC и DD_1.

На слици б) су невидљиво теме и невидљиве ивице уцртане испрекиданом линијом. Дакле, невидљиво теме је на невидљивим ивицама.

На слици в) исту коцку гледамо из другог правца, па је невидљиво теме C_1.

На слици г) је уцртано невидљиво теме C_1 и ивице које из њега полазе.

пример 5

Одреди најмањи број многоуглова који чине површ полиедра. Колико темена и ивица има тај полиедар?

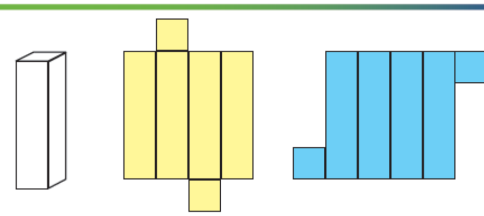
Решење:

Најмање четири многоугла могу чинити полиедарску површ. Том површи је одређен полиедар са четири стране, четири темена и шест ивица.

Ако површ полиедра „исечемо" дуж неких ивица, тако да све стране полиедра могу да буду у једној равни, добијамо једну фигуру састављену од многоуглова, која се зове **мрежа полиедра.**

пример 6

Која фигура је мрежа датог полиедра?

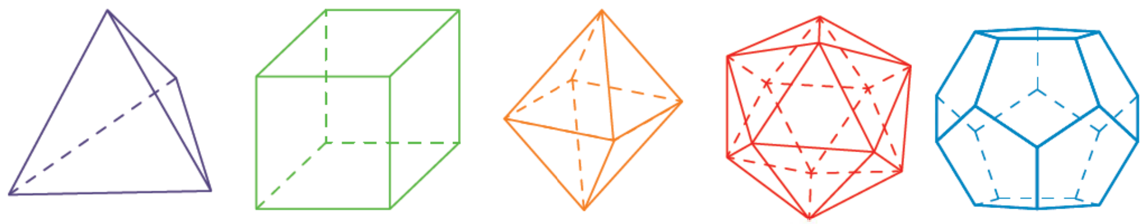


Решење:

Прва фигура је мрежа датог полиедра.

Конвексан полиедар ограничен правилним подударним многоугловима јесте **правилан полиедар**. Постоји тачно пет правилних полиедара, познатих као „Платонова тела" (старогрчки филозоф Платон 427–347. г. п. н. е.).

„Платонова тела" су: тетраедар, хексаедар, октаедар, икосаедар, додекаедар.



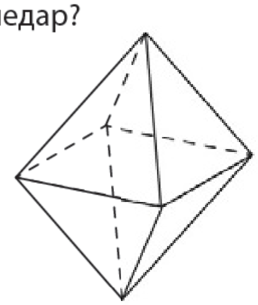
ЗАНИМЉИВОСТ

Како је наука напредовала, долазило се до занимљивих открића у виду повезаности правилних полиедара са живим и неживим светом у нашој околини. Веза између „Платонових тела" и хемије и биологије јесте велика. Структурне формуле одређених хемијских једињења имају облике правилних полиедара, док су нека од њих вештачки направљена по облику ових тела. *Pariacoto Virus* (PaV), који је изолован пре десетак година у Перуу, има структуру сачињену од додекаедарских кавезних обостраних РНК ланаца. Мањи вируси су у облику икосаедра, док се код биљних вируса јављају и други правилни облици.

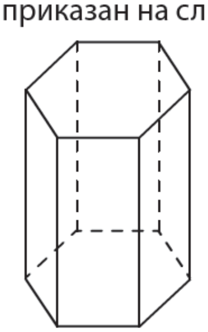
ЗАДАЦИ

86. Да ли постоји полиедар чија површ је састављена од квадрата?

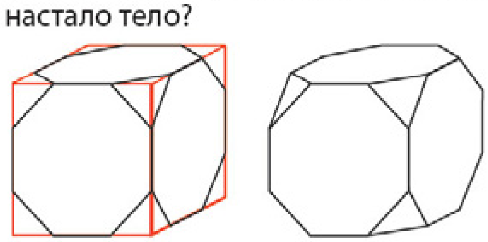
87. Од којих многоуглова је састављена површ полиедра на слици? Колико страна, ивица и темена има тај полиедар?



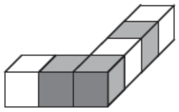
88. Колико темена, ивица и страна има полиедар приказан на слици?



89. Равнима се одсеку делови коцке као на слици (код сваког темена коцке). Колико темена, страна и ивица има настало тело?



90. Гледајући тело које је састављено од сивих и белих коцки слева, здесна, од напред и од назад, добијају се 4 „исправне” слике. Заокружи слово испред слике која није исправна.



а) 

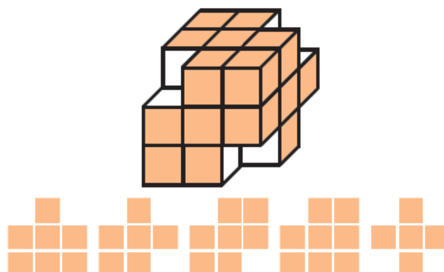
б) 

в) 

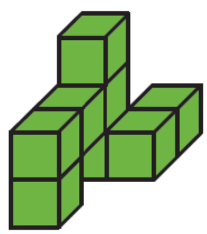
г) 

д) 

91. Ива је склонила по једну малу коцку са четири угла веће коцке. Затим је, користећи добијене стране, ударала печате. Које је од следећих печата она могла направити?

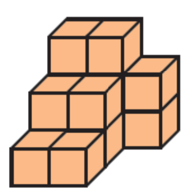


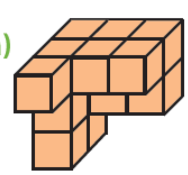
92. Тело на слици направљено је лепљењем осам једнаких коцки. Како ово тело изгледа одозго?

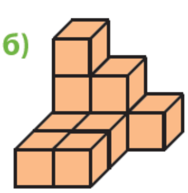


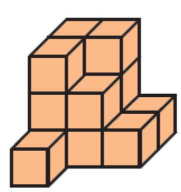
а) б) в) г) д)

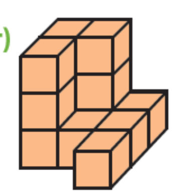
93. Сви приказани полиедри су састављени од коцкица ивице 1 cm. Који од понуђених полиедара допуњује дати полиедар до коцке ивице 3 cm. Заокружи тачан одговор!



а) 

б) 

в) 

г) 

Предлог задатака за додатни рад

1. У равни α је дато 10 различитих тачака. Колико је најмање, а колико највише правих одређено паровима датих тачака?

2. Дато је 7 различитих тачака. Колико дужи одређују дате тачке?

3. Може ли 5 различитих тачака које припадају равни β одређивати:
а) 5 правих;
б) 8 правих;
в) 11 дужи?
Одговарајућим цртежима илуструј могуће ситуације.

4. Одредити природан број n, ако n тачака одређује тачно 120 дужи.

5. Број дијагонала конвексног многоугла већи је од броја његових страница за 33. Колико темена има тај многоугао?

6. Нека су A_1, A_2, A_3, A_4, A_5 различите тачке које припадају кружници $k(O, r)$.
Колико је:
а) најмање;
б) највише правих
одређено паровима тачака $O, A_1, A_2, A_3, A_4, A_5$?

7. Колико је равни одређено са **а)** 7 тачака; **б)** 10 тачака; **в)** n тачака, ако не постоје четири међусобно компланарне тачке?

8. Колико је правих, а колико равни одређено са 21 тачком, међу којима никоје три нису колинеарне и међу којима нема четворки компланарних тачака?

9. Дате су 4 различите тачке. Могу ли дате тачке одређивати тачно: **а)** 1; **б)** 2; **в)** 3; **г)** 4; **д)** 5 равни? Одговарајућим цртежима илуструј могуће ситуације.

10. Колики је најмањи број тачака којима је одређено укупно 220 равни?

11. Дато је 9 међусобно паралелних правих од којих никоје три нису у једној равни. Колико равни је одређено паровима датих правих?

12. У простору је дато 11 међусобно паралелних правих, од којих 6 припада равни α, а 5 равни β. Колико равни је одређено паровима датих правих?

13. У равни α дат је конвексан десетоугао, а ван равни α тачка S. Колико равни је одређено теменима датог многоугла и тачком S?

14. У равни α дате су две паралелне праве a и b и тачке A, B и C које не припадају равни α. Колико најмање, а колико највише равни је одређено датим тачкама и правама?

15. У простору је дата тачка S и 7 правих које садрже тачку S. Колико најмање, а колико највише равни је одређено датим правама?

16. Дата је раван β, права p која јој припада и тачка M ван равни β. Колико има правих које садрже дату тачку M, и које су мимоилазне са правом p?

17. Праве p и q су мимоилазне. На правој p је дато 8, а на правој q 12 тачака. Колико равни је одређено датим правама p и q и датим тачкама?

18. Нека се праве a и b секу у тачки M, а праве b и c у тачки N. Могу ли се праве a и c:
а) сећи? **б)** бити паралелне? **в)** бити мимоилазне?

19. Тачке A, B, C, D, A', B', C' и D' су темена коцке $ABCDA'B'C'D'$. Колико има правих одређених датим тачкама које су паралелне са правом одређеном тачкама C и D?

20. Тачке A, B, C, D, A', B', C' и D' су темена коцке $ABCDA'B'C'D'$. Колико има правих одређених датим тачкама које су нормалне на праву одређену тачкама C и D?

21. Тачке A, B, C, D, A', B', C' и D' су темена коцке $ABCDA'B'C'D'$. Колико има правих одређених датим тачкама које су мимоилазне са правом одређеном тачкама C и D?

22. Ако је дужина дужи $AB = 7$ cm, може ли дужина њене ортогоналне пројекције на раван π бити: а) 5 cm; б) 7 cm; в) 9 cm?

23. Дужина дужи AB је 12 cm, а дужина њене ортогоналне пројекције на раван π је 6 cm. Колики угао образују права одређена тачкама A и B и раван π? Утврди да ли тражени угао зависи од положаја крајева дужи у односу на раван π.

24. Ако је угао између праве одређене тачкама A и B и равни π једнак $45°$, одреди однос дужина дужи AB и њене ортогоналне пројекције на раван π.

25. Однос дужине дужи AB и дужине њене ортогоналне пројекције на раван π једнак је $2:\sqrt{3}$. Одреди угао између праве одређене тачкама A и B и равни π.

26. Удаљеност тачке A од равни π је за 3 cm већа него тачке B од равни π (тачке A и B су са исте стране равни π). Колика је дужина дужи AB, ако њена ортогонална пројекција на раван π има дужину 4 cm?

Питалице

1.	Три дате тачке одређују највише 3 различите праве.	да	не
2.	Ако је $a \parallel b$ и $b \parallel c$, онда је права a нормална на праву c.	да	не
3.	Ако је $a \cap b = \varnothing$, онда су праве a и b паралелне.	да	не
4.	Ако су праве a и b мимоилазне и праве b и c мимоилазне, онда је увек права a паралелна са правом c.	да	не
5.	Пет паралелних правих одређује највише 10 равни.	да	не
6.	Могу ли две равни бити мимоилазне?	да	не
7.	Ако је $\alpha \parallel \beta$ и $\alpha \parallel \gamma$, онда је и $\gamma \parallel \beta$.	да	не
8.	Пет правих одређују највише 12 пресечних тачака.	да	не
9.	Може ли дужина ортогоналне пројекције дужи бити већа од дужине дужи?	да	не
10.	Ако је дужина дужи AB већа од дужи CD, онда је и ортогонална пројекција дужи AB већа од ортогоналне пројекције дужи CD.	да	не
11.	Могу ли дуж AB и њена ортогонална пројекција $A'B'$ бити једнаке дужине?	да	не

Предлог теста знања

1. Колико најмање правих је одређено са 17 различитих тачака?

(А) 1 **(Б)** 17 **(В)** 34 **(Г)** 68 **(Д)** 136

2. Колико правих одређују темена конвексног петоугла *ABCDE*?

(А) 6 **(Б)** 8 **(В)** 10 **(Г)** 12 **(Д)** 14

3. Дато је 14 различитих паралелних правих. Одреди најмањи број равни одређених паровима датих правих.

(А) 28 **(Б)** 14 **(В)** 7 **(Г)** 4 **(Д)** 1

4. Колико равни одређује 5 различитих тачака од којих никоје 4 нису у истој равни?

(А) 6 **(Б)** 8 **(В)** 10 **(Г)** 12 **(Д)** 14

5. Дуж *AB* има дужину 6 cm и нормална је на раван π. Ортогонална пројекција дужи *AB* има дужину:

(А) 0 cm **(Б)** 3 cm **(В)** 4 cm **(Г)** 5 cm **(Д)** 6 cm

6. Тачка *A* је од равни стола удаљена 7 cm, а тачка *B* је удаљена 13 cm. Дужина дужи *AB* је 10 cm, а тачке *A* и *B* су са исте стране равни стола. Колика је дужина ортогоналне пројекције дужи *AB* на раван стола?

(А) 6 cm **(Б)** 8 cm **(В)** 10 cm **(Г)** 12 cm **(Д)** 14 cm

7. Колико равни одређују темена коцке *ABCDA'B'C'D'*?

(А) 6 **(Б)** 9 **(В)** 10 **(Г)** 12 **(Д)** 18

8. Ако *n* паралелних правих, од којих никоје три нису у једној равни, одређује тачно 45 равни, онда је *n* једнако:

(А) 8 **(Б)** 9 **(В)** 10 **(Г)** 11 **(Д)** 12

Предлог контролне вежбе

2.1.	Колико највише правих је одређено са 6 тачака?	**15**
2.2.	Тачке A, B, C и D припадају правој p, а тачке E, F и G припадају правој q. Колико правих је одређено паровима датих тачака?	**20**
2.3.	Дато је n тачака од којих никоје 3 нису на једној правој. Одреди број n, ако парови датих тачака одређују 66 правих.	**25**
2.4.	Дата је коцка $ABCDA'B'C'D'$. Нацртај одговарајућу слику и одреди које ивице коцке: а) се секу са ивицом BC; б) су паралелне са BC; в) се мимоилазе са ивицом BC.	**15**
2.5.	Колико најмање, а колико највише равни одређује 5 тачака?	**20**
2.6.	Дат је паралелограм $ABCD$ и тачка S ван равни датог паралелограма. Колико равни је одређено тачкама A, B, C, D и S?	**25**
2.7.	Дата је коцка $ABCDA'B'C'D'$. Нацртај одговарајућу слику и одреди које стране коцке су: а) паралелне са страном $ABB'A'$; б) нормалне на страну $ABB'A'$.	**15**
2.8.	Дата је коцка $ABCDA'B'C'D'$. Нацртај одговарајућу слику и одреди колико равни одређују дата темена коцке.	**20**
2.9.	У равни α дато је шест тачака од којих никоје три нису на једној правој и дата је тачка А која не припада равни. Колико има равни које садрже тачку А и две од шест датих тачака?	**25**
2.10.	Тачке A и B се налазе са исте стране дате равни π и од равни π су удаљене по 4 cm. Ако је дужина дужи $AB = 7$ cm, колика је дужина њене ортогоналне пројекције $A'B'$?	**15**
2.11.	Тачка A је од равни π удаљена 2 cm, а тачка B је удаљена 3 cm. Дужина дужи AB је 13 cm, а тачке A и B су са разних страна равни π. Колика је дужина ортогоналне пројекције дужи AB на раван π?	**20**
2.12.	Дужина дужи AB је 12 cm, а дужина њене ортогоналне пројекције на раван π је 6 cm. Колики угао образују права AB и раван π?	**25**

3 ЛИНЕАРНЕ ЈЕДНАЧИНЕ И НЕЈЕДНАЧИНЕ СА ЈЕДНОМ НЕПОЗНАТОМ

Задатак

Летеле су вране, и спазиле гране.
По две вране – врана више.
По три вране – грана више.
Кол'ко грана? Кол'ко врана?

ЛИНЕАРНЕ ЈЕДНАЧИНЕ И НЕЈЕДНАЧИНЕ СА ЈЕДНОМ НЕПОЗНАТОМ

У једној старој рачуници (тако су се некада називали уџбеници из математике), између осталих, налазио се и следећи задатак:

пример 1

Четири златара су поделила 132 златника. Други златар је добио два пута више златника од првог; трећи – три пута више од другог, а четврти – четири пута више од трећег. Колико златника је добио сваки од златара?

Решење:

Ако је први златар добио x златника, онда је други златар добио $2x$ златника; трећи $3 \cdot 2x = 6x$ златника и четврти златар је добио $4 \cdot 6x = 24x$ златника.

Следи да је $x + 2x + 6x + 24x = 132$. Тада је $33x = 132$, па је $x = 132 : 33 = 4$ златника. Дакле, златари су добили редом 4, 8, 24 и 96 златника.

Познато нам је да се једнакост $x + 2x + 6x + 24x = 132$ назива једначина.
Циљ ове наставне теме јесте да знања о једначинама и неједначинама значајно употпунимо и искористимо за решавање сличних и сложенијих проблема теоријске или практичне природе.

3.1. Појам једначине

подсетник

Математички језик, слично као говорни, садржи различите симболе. У математичком језику постоје слова која имају непромењиву (сталну вредност), која називамо константе ($3, \sqrt{2}, -0{,}27, \pi$ ...) и слова која имају промењиву вредност ($x, y, z \ldots a, b, c \ldots$), као и ознаке ($+, -, \cdot, :, >, <, =, \neq, \leq, \cup$ ...).
Ако се другачије не нагласи, непромењиве (**константе**) и промењиве (**непознате**) припадају скупу реалних бројева R. Знамо да записивањем слова и знакова настају рационални алгебарски изрази (полиноми), али смо говорили и о једначинама, као о једнакостима које садрже слова од којих је бар једно непознате (или промењиве) вредности: $18n = 9$, $8x + 7 = 15$, $7m + 3 = 0$, $3y - 5 = y + 8$...

пример 2

Дати су рационални алгебарски изрази: $A = 3 + 8$, $B = 17 - 6$ и $C = 2x + 5$ ($x \in R$). Шта се добија ако дате изразе међусобно повежемо релацијом једнакости?

Решење:

Од три дата израза добијају се три једнакости: $A = B$, $A = C$ и $B = C$.
Добијене једнакости су: $3 + 8 = 17 - 6$ и $3 + 8 = 2x + 5$ и $17 - 6 = 2x + 5$.
По чему се оне разликују?
Једнакост $3 + 8 = 17 - 6 = 11$ је увек тачна, садржи само бројеве и не садржи непознате. Друга и трећа једнакост су исте једнакости $11 = 2x + 5$, садрже непознату x и тачне су за неке вредности непознате x (на пример за $x = 3$), и нису тачне за неке друге вредности x (на пример за $-4, 0, 7$...).

ПОДСЕТНИК

Нека су A и B изрази. Формула $A = B$ назива се једнакост.

Једнакост $A = B$ у којој изрази A и B садрже само константе назива се бројевна једнакост.

Једнакост $A = B$ у којој бар један од израза A и B садржи бар једну непознату назива се једначина.

Израз A представља леву, а израз B десну страну бројевне једнакости, односно једначине $A = B$.

Бројевна једнакост може бити **тачна** (на пример, $2 + 7 = 9$) или **нетачна** (на пример $36 : 4 = 11$).

Једначина је за неке вредности непознате тачна, а за неке нетачна.
На пример, једначина $3x + 2 = 17$ је тачна за $x = 5$, а нетачна за $x = 6$.

ПРИМЕР 3

Дати су изрази: $A = 9 + 12$, $B = 3x + 8$, $C = 11 - 6$ и $D = 24 - 3$ ($x \in R$). Користећи дате изразе A, B, C и D направи тачне бројевне једнакости и једначине.

Решење:

Од израза A, B, C и D може се направити шест једнакости:
$A = B$, $A = C$, $A = D$, $B = C$, $B = D$ и $C = D$.

Тачна бројевна једнакост је само $A = D$, тј. $9 + 12 = 24 - 3$.
Једначине су: $A = B$, тј. $9 + 12 = 3x + 8$; $B = C$, тј. $3x + 8 = 11 - 6$ и $B = D$, тј. $3x + 8 = 24 - 3$.

Бројевне једнакости $A = C$ и $C = D$ су нетачне, јер је $9 + 12 = 24 - 3 \neq 11 - 6$, тј. израз C није једнак са A и са D.

ПРИМЕР 4

Дати су изрази: $A = 2y + 7$, $B = 3y - 8$ и $C = 4y + 9$ ($y \in R$). Користећи изразе A, B и C направи неколико једначина.

Решење:

Од три дата израза можемо направити три различите једначине:
$A = B$, тј. $2y + 7 = 3y - 8$; $B = C$, тј. $3y - 8 = 4y + 9$ и $C = A$, тј. $4y + 9 = 2y + 7$.
Из претходног примера у коме је непозната y закључујемо да непозната не мора бити само реалан број означен са x, већ се непознате могу означити и другим словима y, z, t... a, b, c... m, n, p...

ПРИМЕР 5

Дати су изрази: $M = 14 : 2 + 3$, $N = 5x + 7$, $P = 9y - 4$ ($x, y \in R$). Користећи изразе M, N и P направи све могуће једначине.

Решење:

Од три дата израза можемо направити три различите једначине: $M = N$, тј. $14 : 2 + 3 = 5x + 7$, $M = P$, тј. $14 : 2 + 3 = 9y - 4$ и $N = P$, тј. $5x + 7 = 9y - 4$.

Из претходног примера закључујемо да је прва једначина – једначина по непознатој x, друга једначина – једначина по непознатој y, а трећа једначина садржи две непознате x и y.

пример 6

Дата је једначина $2x + 3 = 4x - 5$ ($x \in R$). Допуни следећу таблицу како је започето.

x	-2	$-1,5$	0	$0,5$	2	$\sqrt{5}$	4	5	6
$2x + 3$		0	3						
$4x - 5$	-13		-5						

Решење:

Ако полином $2x + 3$ означимо са $A(x)$, а полином $4x - 5$ са $B(x)$, онда на основу знања из седмог разреда рачунамо и у таблицу уносимо бројевну вредност датих полинома када непозната x узима тачно одређене, конкретне вредности које исказујемо у таблици:

x	-2	$-1,5$	0	$0,5$	2	$\sqrt{5}$	4	5	6
$A(x) = 2x + 3$	-1	0	3	4	7	$2\sqrt{5} + 3$	11	13	15
$B(x) = 4x - 5$	-13	-11	-5	-3	3	$4\sqrt{5} - 5$	11	15	19

Уочавамо да је за скоро све дате вредности реалног броја x, $A(x) \neq B(x)$.
Изузетак представља само број 4 (који је осенчен), када је $A(4) = 2 \cdot 4 + 3 = 11$ и $B(4) = 4 \cdot 4 - 5 = 11$.
Због тога ћемо број 4 звати решењем једначине $2x + 3 = 4x - 5$.

Број x_o је решење једначине $A(x) = B(x)$ ако су вредности израза A и B за $x = x_o$ једнаке, тј. ако је $A(x_o) = B(x_o)$.

Једнакост $x = x_o$ назива се једначина у решеном облику.

Скуп решења једначине је скуп свих реалних бројева x, за које је $A(x) = B(x)$.

пример 7

Који од бројева -1, 0 и 1 су решења једначине $6a + 5 = 4a + 3$ ($a \in R$)?

Решење:

Како је $6 \cdot (-1) + 5 = -1$ и $4 \cdot (-1) + 3 = -1$, то је број -1 решење дате једначине.
Како је $6 \cdot 0 + 5 = 5 \neq 3 = 4 \cdot 0 + 3$ и $6 \cdot 1 + 5 = 11 \neq 7 = 4 \cdot 1 + 3$, то бројеви 0 и 1 нису решења дате једначине.

пример 8

Покажи да једначина $x^2 + 4 = 0$ ($x \in R$) нема решења?

Решење:

Квадрат сваког реалног броја већи је или једнак нули, тј. $x^2 \geq 0$,
Следи да је $x^2 + 4 \geq 0 + 4 > 0$, па дата једначина нема решења ако је x реалан број.
Може се записати да је скуп решења једначине $S = \varnothing$.

пример 9

Колико решења има једначина $y^2 - 49 = 0$ ($y \in R$)?

Решење:

Из $y^2 - 49 = 0$ следи да је $y^2 - 7^2 = 0$, односно $y^2 = 7^2$. У седмом разреду смо видели да ова једначина има два решења: $y = \sqrt{7^2} = 7$ и $y = -\sqrt{7^2} = -7$, тј. $S = \{-7, 7\}$.

ЗАДАЦИ

1. Које од датих једнакости су бројевне једнакости:

а) $16 : 2 = 11 - 3$;

б) $10 - 3a = 1$ ($a \in R$);

в) $81 = 5^2 + 55$;

г) $10 \cdot 8 = 200 : 20 + 70$.

2. Дати су изрази: $M = 12 : 4$, $N = 9 - 6$ и $P = 3y - 15$ ($y \in R$). Колико бројевних једнакости, а колико једначина се добија ако дате изразе повежемо знаком једнакости?

3. Напиши:

а) једну бројевну једнакост;

б) једну једначину чија је непозната b.

4. Дати су изрази: $A = 4c - 9$, $B = 3c + 12$ и $C = 6 - 11c$ ($c \in R$). Колико једначина се може добити међусобним повезивањем датих израза релацијом једнакости?

5. Одреди који од елемената скупа $S = \{-2, -1, 0, 1, 2, 3, 4\}$ су решења једначине $5x - 9 = 2x - 6$.

6. Напиши једначину по непознатој y чије је решење број 7.

7. Дати су симболи (знаци): 7, 2, 5, x, +, = , ( ). Напиши једну једнакост и три једначине у којима ћеш само по једном користити неке или све дате симболе.

8. Воја је написао једну једначину. Лаза је избрисао тачно један пар заграда и добијен је следећи запис: $2 \cdot x - 3 + x = 4$. Напиши неке од могућих једначина које је написао Воја.

9. Збир три узастопна природна броја је 39. Напиши одговарајућу једначину. Колико непознатих садржи та једначина?

10. Странице правоугаоника имају дужину a и b, а обим правоугаоника је 24 cm. Напиши одговарајућу једначину. Колико непознатих садржи та једначина?

11. Напиши бар две једначине које немају решења.

12. Напиши једначину по непознатој m чији скупови решења су: а) $S = \{0,5\}$; б) $S = \{-6\}$.

13. Да ли постоји једначина која има бесконачно много решења? Ако постоји, наведи бар два примера таквих једначина.

3.2. Еквивалентне једначине Линеарна једначина

Видели смо и да постоје једначине које немају решења, имају једно или више решења, али и да постоје једначине које имају једну, две или више непознатих. Даља истраживања једначина настављамо анализом неких једначина, које су вам познате из претходних разреда.

пример 1

Реши једначину $9x - 13 = 23$ ($x \in R$).

Решење:

Решавање дате једначине приказујемо кроз неколико познатих корака.

J_1	Дата једначина	$9x - 13 = 23$
J_2	Непознати сабирак $9x$ је једнак разлици збира и познатог сабирка	$9x = 23 - (-13) = 23 + 13 = 36$
J_3	Непознати чинилац x је једнак количнику производа и познатог чиниоца.	$x = 36 : 9$
J_4	Једначина у решеном облику.	$x = 4$

Приметимо да је скуп решења дате једначине $S(J_1) = \{4\}$, тј. број 4 је решење све четири једначине (J_1, J_2, J_3, J_4). Када у свакој од једначина заменимо x са 4, добијамо тачну бројевну једнакост.

пример 2

Одреди сва решења једначине $5y^2 - 24 = 56$ ($y \in R$).

Решење:

Решавање дате једначине приказујемо кроз неколико познатих корака.

J_5	Дата једначина	$5y^2 - 24 = 56$.
J_6	Умањеник $5y^2$ једнак је збиру разлике 56 и умањиоца 24	$5y^2 = 56 + 24$, тј. $5y^2 = 80$.
J_7	Непознати чинилац y^2 је једнак количнику производа 80 и познатог чиниоца 5	$y^2 = 80 : 5$, тј. $y^2 = 16$.
J_8	Решења претходне једначине су	$y = \sqrt{16}$ и $y = -\sqrt{16}$
J_9	Једначине у решеном облику.	$y = 4$ или $y = -4$

И у овом примеру се може запазити да је скуп решења дате једначине $S(J_5) = \{-4, 4\}$, тј. да су бројеви -4 и 4 решења свих једначина (J_5, J_6, J_7, J_8, J_9) у низу и да, када у свакој од једначина y заменимо са -4 или 4, добијамо тачне бројевне једнакости.

Претходни примери нас упућују да дефинишемо још један важан појам везан за једначине, а то је појам еквивалентних једначина.

Једначина J_1 еквивалентна је једначини J_2, ако је скуп решења једначине J_1 једнак скупу решења једначине J_2, тј. $S(J_1) = S(J_2)$.

На основу претходне дефиниције, једначине J_1, J_2, J_3, J_4 су међусобно еквивалентне, и једначине J_5, J_6, J_7, J_8, J_9 су међусобно еквивалентне.

Али, једначине $9x - 13 = 23$ и $5y^2 - 24 = 56$ нису еквивалентне, јер скуп решења прве једначине $S_1 = \{4\}$ и скуп решења друге једначине $S_2 = \{4, -4\}$ нису једнаки, иако имају један заједнички елеменат – број 4.

пример 3

Да ли су еквивалентне једначине (А) $7a + 17 = 3a + 29$ и (В) $\dfrac{8b-10}{7} = 2$ $(a, b \in R)$?

Решење:

Решавањем датих једначина добија се:

$7a + 17 = 3a + 29$	$\dfrac{8b-10}{7} = 2$
$7a = 3a + 29 - 17$	$8b - 10 = 2 \cdot 7$
$7a = 3a + 12$	$8b - 10 = 14$
$7a - 3a = 12$	$8b = 14 + 10$
$4a = 12$	$8b = 24$
$a = 12 : 4$	$b = 24 : 8$
$a = 3$	$b = 3$

Како је $S(\text{A}) = \{3\} = S(\text{B})$, дате једначине су еквивалентне.

Напоменимо и то, да смо у записивању решења претходних једначина, ради бољег разумевања корака, користили табеларно текстуално објашњење сваког корака. Убудуће, табеларно приказивање решења замениђемо записима у којима ће се кораци, тј. трансформација једне једначине у њој еквивалентну једначину текстуално образлагати.

Линеарна једначина по непознатој x је једначина облика $ax = b$, где су a и b реални бројеви.

Важна напомена у вези са исказаном дефиницијом. Ако једначина није по непознатој x, већ по некој другој непознатој $\square$, критеријум линеарности је облик једначине $a \cdot \square = b$.

На основу претходне дефиниције, једначине: $9x - 13 = 23$, $7a + 17 = 3a + 29$ и $\dfrac{8b-10}{7} = 2$ су линеарне, јер су редом еквивалентне са једначинама $9x = 36$, $4a = 12$, $8b = 24$, па имају облик $a \cdot \square = b$.

Једначине $y^2 = 49 = 0$ и $5y^2 = 80$ нису линеарне, јер немају облик $a \cdot \square = b$.

пример 4

Дате су једначине: (J_1) $17x + 3 = 11x + 5$, (J_2) $(y + 8)(y - 8) = 2y$ и (J_3) $15 : z = 9$.

Одреди које од датих једначина су линеарне.

Решење:

(J_1) је еквивалентна са $6x = 2$; (J_2) је еквивалентна са $y^2 - 64 = 2y$, а (J_3) је еквивалентна са $15 = 9z$.

Једначине (J_1) и (J_3) имају облик $a \cdot \boxed{} = b$ и јесу линеарне.

Једначина (J_2) нема облик $a \cdot \boxed{} = b$ и није линеарна.

ЗАДАЦИ

14. Да ли су једначине $5x = 45$ и $3x + 7 = 34$ еквивалентне?

15. Зашто једначине $11y = 66$ и $y^2 = 36$ нису еквивалентне?

16. Дате су једначине: $6z = 54$, $z^2 - z = 72$ и $63 : z = 7$. Које од њих су еквивалентне? Које од њих су линеарне?

17. Покажи да су једначине $5a^4 + 3 = 2$ и $|a| + 1 = 0$ еквивалентне.

18. Напиши бар једну једначину која је еквивалентна са једначином $6x = 10$.

19. Напиши једну једначину по променљивој a која је линеарна, и једну једначину по променљивој b која није линеарна.

20. Колико има једначина које су еквивалентне са једначином $2y + 17 = 0$?

21. Зашто једначине $a^2 - 100 = 0$ и $a = \sqrt{100}$ нису еквивалентне?

22. Одреди да ли су једначине $2x = 12$ и $x = 6$ еквивалентне?

23. Да ли су једначине $y = 0$, $y^2 = 0$ и $y^5 = 0$ еквивалентне?

24. Одреди реалан број m, тако да су једначине $9x = 63$ и $mx = 77$ еквивалентне.

25. Одреди реалан број n тако да једначине $5y + 20 = 0$ и $11y = n$ буду еквивалентне.

26. Зашто једначине $2a = 28$ и $|a| = 14$ нису еквивалентне?

27. Одреди скуп решења једначина $6x + 7x = 13x$ и $8x - 3x = 5x$. Да ли су те једначине еквивалентне?

28. Покажи да је једначина $\frac{1}{x} = \frac{4}{3}$ $(x \neq 0)$ линеарна.

29. Да ли је једначина $y^4 + y^2 + 1 = 0$ линеарна?

Еквивалентне трансформације једначина 3.3.

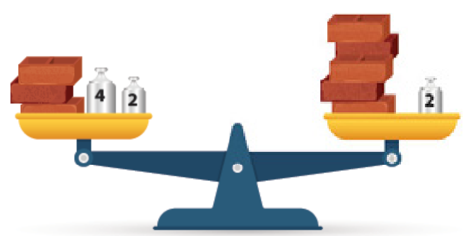
Већ је речено да је циљ ове наставне теме да се детаљније упознамо са једначинама и неједначинама и њиховим применама, а то значи и са њиховим решавањем. До сада смо једначине решавали применом особина рачунских операција у скупу реалних бројева. Али, реални бројеви, поред већ коришћених особина, имају и друге особине погодне за решавање једначина. За илустрацију неких од тих особина и њихову примену на решавање једначина, користићемо следећи једноставан пример.

пример 1

Теразије показују да три цигле и тегови од 4 и 2 килограма имају једнаку масу као и пет цигли и тег од 2 килограма. Колика је маса једне цигле?

Решење:

Уравнотежене теразије подсећају на једначину, јер равнотежа левог и десног таса теразија, у ствари, представља једнакост $A = B$, па наредна слика у потпуности моделира дати пример.



Очигледно је да се равнотежа теразија неће нарушити ако и са левог и са десног таса теразија скинемо, или на оба таса додамо једнаке масе. Ако, у првом кораку и са левог и са десног таса скинемо по три цигле (слика лево), а у другом кораку тег од 2 килограма (слика десно), добијамо да су две цигле у равнотежи са тегом од 4 килограма. Тада је јасно да једна цигла има масу 2 килограма.

Користећи се практичним искуствима, претходним примером и знањима о реалним бројевима стеченим у претходним разредима, можемо извести следеће важне особине које важе за ма које реалне бројеве a, b и c:

тврђење

(1) Ако је $a = b$, онда је $a + c = b + c$ и обрнуто: ако је $a + c = b + c$, онда је $a = b$;

(2) Ако је $a = b$ и $c \neq 0$, онда је $a \cdot c = b \cdot c$ и обрнуто: ако је $a \cdot c = b \cdot c$, онда је $a = b$;

(3) Ако је $a = b$ и $b = c$, онда је и $a = c$.

Прва особина подразумева да ако и на леву и на десну стране једнакости **додамо** (или **одузмемо**) **исти број**, једнакост се не нарушава, тј. добија се нова једнакост. Ова особина се назива сагласност једнакости са сабирањем.

Друга особина подразумева да ако и леву и десну стране једнакости **помножимо** (или **поделимо**) **истим бројем** (који је различит од нуле), једнакост се не нарушава, тј. добија се нова једнакост. Ова особина се назива сагласност једнакости са множењем.

Трећа особина се односи на ланчану **преносивост једнакости два броја**, тј. ако је $a = b$ и $b = c$ и $c = d$... онда је први број у низу једнакости једнак последњем у том низу. Ова особина се назива **транзитивност (преносивост) једнакости.**

пример 2

Реши једначину $7x - 15 = 4x - 3$ ($x \in R$).

Решење:

Ако у датој једначини $7x - 15 = 4x - 3$ и на леву и на десну страну једнакости додамо број 15, добија се $7x - 15 + 15 = 4x - 3 + 15$ или $7x = 4x + 12$. Ако се сада и на леву и на десну страну једнакости дода израз $(-4x)$, једначина постаје $7x - 4x = 4x + 12 - 4x$ или $3x = 12$. Дељењем и леве и десне стране једначине са 3 добија се једначина у решеном облику $x = 4$, па је $S = \{4\}$.

пример 3

Реши једначину $\frac{x}{2} - \frac{1}{3} = \frac{x}{4} - \frac{1}{5}$ ($x \in R$).

Решење:

Ако и леву и десну страну једначине $\frac{x}{2} - \frac{1}{3} = \frac{x}{4} - \frac{1}{5}$ помножимо са НЗС $(2, 3, 4, 5) = 60$ добиће се еквивалентна једначина $60\left(\frac{x}{2} - \frac{1}{3}\right) = 60\left(\frac{x}{4} - \frac{1}{5}\right)$, односно $30x - 20 = 15x - 12$. Ако обема странама једначине додамо израз $20 - 15x$, добија се $30x - 20 + 20 - 15x = 15x - 12 + 20 - 15x$, тј. $15x = 8$. Дељењем обе стране једначине са 15, добија се једначина у решеном облику $x = \frac{8}{15}$.

Закључујемо и да се решавање једначине $A = B$ (где су A и B рационални алгебарски изрази од којих бар један садржи непознату) може поједноставити коришћењем три, већ поменута својства реалних бројева, која важе и за рационалне алгебарске изразе A, B и C.

тврђење

(1) Ако је $A = B$, онда је $A + C = B + C$ и обрнуто: ако је $A + C = B + C$ онда је $A = B$; (особина сагласности једнакости са сабирањем)

(2) Ако је $A = B$ и $C \neq 0$, онда је $A \cdot C = B \cdot C$ и обрнуто: ако је $A \cdot C = B \cdot C$, онда је $A = B$; (особина сагласности једнакости са множењем)

(3) Ако је $A = B$ и $B = C$, онда је и $A = C$ (особина преносивости или транзитивности једнакости).

Наведена својства представљају еквивалентне трансформације једначина.

пример 4

Реши једначину $\frac{5y-4}{3} = 6 + y \ (y \in R)$.

Решење:

$$\frac{5y-4}{3} = 6 + y$$

$5y - 4 = 3(6 + y)$ (помножимо са 3 обе стране једначине)

$5y - 4 = 18 + 3y$

$5y - 4 + 4 - 3y = 18 + 3y + 4 - 3y$ (додамо израз $4 - 3y$ на обе стране)

$2y = 22$

$y = 11$ (поделимо са 2 обе стране једначине)

ЗАДАЦИ

30. Реши једначине ако је $x, y, z \in R$:

а) $7x + 8 = 22$; б) $8y - 12 = 60$; в) $34 - 9z = 7$;

31. Реши једначине ако $a, b, c \in R$:

а) $5a = 65$; б) $6b : 5 = 12$; в) $80 : 4c = 5$.

32. Реши једначине ако је $x, y \in R$:

а) $15x + 14 = 13x + 12$; б) $7y - 6 = 5 - 4y$.

33. Реши једначине ако је $x, y \in R$:

а) $23x = 24x$; б) $8y : 7 = 6y : 5$.

34. Да ли су једначине $17m - 16 = 15m - 14$ и $\frac{m}{2} - \frac{m}{7} = \frac{m}{6} - \frac{m}{5}$ еквивалентне ($m \in R$)?

35. Докажи да су једначине $\frac{9y-11}{2} = 3y + 7$ и $\frac{15}{4y} = 3$ ($y \in R, y \neq 0$) линеарне.

36. Постоји ли пет узастопних целих бројева таквих да је: а) збир три мања броја једнак збиру два већа; б) збир другог и четвртог броја једнак збиру преостала три броја?

37. Покажи да постоји бесконачно много једначина еквивалентних са једначином $3x - 4 = 5$.

38. Колико има линеарних једначина чије је решење број -13?

39. Да ли су једначине: $12x + 13 = 13x + 12$ и $12x \cdot 13 = 13x \cdot 12$ еквивалентне?

3.4. Решавање линеарних једначина

У претходној лекцији смо видели како се применом еквивалентних трансформација од полазне (дате) једначине добија низ еквивалентних једначина, при чему је последња у низу еквивалентних једначина – једначина у решеном облику $x = x_0$. Решавање једначине управо подразумева налажење поменутог низа еквивалентних једначина и евентуалну проверу да ли добијено решење $x = x_0$ задовољава полазну (дату) једначину.

Циљ ове лекције је да приказани поступак решавања линераних једначина детаљније илуструје и поједностави. За то је неопходно објаснити једну последицу приказаних еквивалентних трансформација, која се најчешће користи код решавања линеарних једначина.

тврђење

(4) Нека су $A(x)$ и $B(x)$ изрази који садрже непознату x, а a и b реални бројеви. Једначина $A(x) + a = B(x) + b$ еквивалентна је са једначином $A(x) - B(x) = b - a$.

Доказ овог тврђења је врло једноставан. Ако се у једначини $A(x) + a = B(x) + b$, и на леву и на десну страну једнакости, на основу еквивалентне трансформације једначина (1) дода израз $-a - B(x)$ добија се $A(x) + a - a - B(x) = B(x) + b - a - B(x)$, односно $A(x) - B(x) = b - a$.

Практично дејство ове еквивалентне трансформације јесте да се сваки елеменат једне стране једначине (без обзира на то да ли је константа или непозната) може „пребацити" на другу страну једначине са промењеним знаком. Ово се најчешће чини тако што се изрази који садрже непознате „пребаце" на једну, а константе на другу страну једнакости.

пример 1

Реши једначину $3(x - 5) = 2(x + 7)$ $(x \in R)$.

Решење:

$3(x - 5) = 2(x + 7)$

$3x - 15 = 2x + 14$

$3x - 2x = 14 + 15$ (примена трансформације (4))

$x = 29$

Заменом $x = 29$ у полазну једначину добија се да је

$3 \cdot (29 - 5) = 3 \cdot 24 = 2 \cdot (29 + 7) = 2 \cdot 36 = 72$, што доказује тачност решења.

пример 2

Реши једначину $9(3y + 1) - 6(5y - 7) = 4(y + 11)$ $(y \in R)$.

Решење:

$9(3y + 1) - 6(5y - 7) = 4(y + 11)$

$27y + 9 - 30y + 42 = 4y + 44$

$-3y + 51 = 4y + 44$

$-3y - 4y = 44 - 51$ (примена трансформације (4))

$-7y = -7$

$y = 1$ (поделимо са -7 обе стране једначине)

Заменом броја 1 у полазну једначину добија се да је $9 \cdot 4 - 6 \cdot (-2) = 4 \cdot 12 = 48$. Добили смо тачну једнакост, што доказује тачност добијеног решења.

пример 3

Реши једначину: $\frac{9z}{8} - \frac{7z}{6} = \frac{5z}{4} + \frac{3}{2}$ $(z \in R)$.

Решење:

Ако се лева и десна страна једначине $\frac{9z}{8} - \frac{7z}{6} = \frac{5z}{4} + \frac{3}{2}$ помноже са НЗС $(2, 4, 6, 8) = 24$, добије се: $24\left(\frac{9z}{8} - \frac{7z}{6}\right) = 24\left(\frac{5z}{4} + \frac{3}{2}\right)$, односно $27z - 28z = 30z + 36$. Применом трансформације (4) следи да је $27z - 28z - 30z = 36$ или $-31z = 36$. Из последње једнакости је $z = -\frac{36}{31}$.

пример 4

Упрости једначину $\frac{x+1}{3} - \frac{x+2}{4} = \frac{x+3}{5} - \frac{x+4}{6}$ $(x \in R)$ и одреди њено решење.

Решење:

Ако се лева и десна страна једначине $\frac{x+1}{3} - \frac{x+2}{4} = \frac{x+3}{5} - \frac{x+4}{6}$ помноже са НЗС $(2, 3, 4, 5) = 60$ добије се $60\,\frac{x+1}{3} - 60\,\frac{x+2}{4} = 60\,\frac{x+3}{5} - 60\,\frac{x+4}{6}$ или $20(x+1) - 15(x+2) = 12(x+3) - 10(x+4)$. У следећем кораку се добија

$20x + 20 - 15x - 30 = 12x + 36 - 10x - 40$ или $5x - 10 = 2x - 4$. Применом трансформације (4) следи да је $5x - 2x = 10 - 4$, или $3x = 6$. Из последње једнакости је $x = 2$.

пример 5

Реши једначину $\frac{8}{y} + 7 = \frac{16}{y} - 5$ $(y \in R, y \neq 0)$.

Решење:

1. начин: Како је $y \neq 0$, када се лева и десна страна дате једначине $\frac{8}{y} + 7 = \frac{16}{y} - 5$ помноже са y, добија се једначина $8 + 7y = 16 - 5y$. Применом трансформације (4), следи да је $7y + 5y = 16 - 8$, тј. $12y = 8$. Једначина у решеном облику је $y = \frac{2}{3}$

2. начин: Дати задатак се може решити и **методом смене непознатих.**
Смена непознатих је метода која се састоји у томе да се дата непозната, замени новом непознатом.

Ако се у једначини $\frac{8}{y} + 7 = \frac{16}{y} - 5$ израз $\frac{1}{y}$ замени непознатом t $(t \in R)$, тј. уведе смена $\frac{1}{y} = t$, дата једначина постаје $8t + 7 = 16t - 5$.
Решавањем претходне једначине добија се да је $7 + 5 = 16t - 8t$ или $12 = 8t$.
Решење једначине је $t = \frac{12}{8} = \frac{3}{2}$, а y је реципрочна вредност броја t, па је $y = \frac{2}{3}$.

пример 6

Ако је x позитиван реалан број, реши једначину $3\sqrt{x}-7=\sqrt{x}+3$.

Решење:

И ову једначину решавамо методом смене непознатих.

Ако се израз $\sqrt{x}$ замени непознатом t, онда дата једначина постаје $3t-7=t+3$.

Применом трансформације (4) добија се:

$3t-t=7+3$

$2t=10$

$t=5$

Како је $\sqrt{x}=t=5$, то је $x=5^2=25$.

У неколико претходних примера наглашавали смо ком скупу припада непозната. Убудуће, ако се посебно не нагласи, подразумеваћемо да је непозната из скупа реалних бројева.

ЗАДАЦИ

40. Одреди скуп решења једначина ако је $x, a, b, c \in R$:

а) $5x-2=13$; **б)** $10-3a=1$; **в)** $7=5-6b$; **г)** $18=3c-6$.

41. Реши једначине ако је $x, y, z \in R$:

а) $7x+2=5x+8$; **б)** $4-3y=6-4y$; **в)** $1-(2z+3)=z+5$.

42. Одреди скуп решења једначина ако је ($x, y, z \in R$):

а) $1-\frac{x}{3}=\frac{1}{2}$; **б)** $3+\frac{y}{5}=2+\frac{y}{4}$; **в)** $\frac{z}{6}+5=3-\frac{z}{4}$.

43. Дата је једначина: $6x-7a=4x-3a$.

а) Реши дату једначину по непознатој x; **б)** Реши дату једначину по непознатој a.

44. Напиши бар једну линеарну једначину чије решење је:

а) -7; **б)** 4; **в)** $\sqrt{5}$; **г)** $0{,}75$.

45. Реши Тест 204, о линеарним једначинама, на електронској платформи „*еЗбирка*” (http://www.ezbirka.math.rs).

46. Реши једначине ако је $a, b, c \in R$:

а) $\frac{a+3}{5} = 2a - 12;$ **б)** $1 + b - \frac{2+b}{5} = \frac{3+b}{4};$ **в)** $1 - c - \frac{1-2c}{7} = \frac{1-3c}{2}.$

47. Реши једначине ако је $x, a, b \in R$:

а) $\frac{x}{2} - \frac{x}{3} = \frac{x}{7} + 1;$ **б)** $\frac{a}{5} - \frac{a+1}{2} = \frac{a}{3} - 4;$ **в)** $\frac{b-5}{5} - \frac{b-3}{6} = \frac{b-3}{3} + 2.$

48. Одреди вредност реалног броја y, ако је $2(y+3) - 4(y+5) = 6(y+7) - 9(y+10)$.

49. Реши једначину: $2x + 3(x+4) + 5(x+6) = 7(x+8) - 14$.

50. За коју вредност непознате a је $\frac{2a+1}{7} - \frac{3a+7}{4} + \frac{4a+3}{5} = 3$?

51. Реши једначину $\frac{3x+1}{2} - \frac{4x+2}{3} = \frac{5x+3}{4} - \frac{6x+4}{5}$.

52. Ако је $(4x-3) \neq 0$, одреди решење једначине $\frac{5}{4x-3} = 2$.

53. Реши једначине ако је $x, y, z \neq 0$:

а) $\frac{6}{x} + 3 = \frac{9}{x} + 2;$

б) $\frac{24}{3y} + 7 = \frac{16}{y} - 5;$

в) $\frac{1}{2z} + \frac{2}{3z} = 5 + \frac{3}{4z}.$

54. Реши једначине:

а) $(3y-4) : 5 = (6y-7) : 8;$

б) $(2x+3) : (5x-1) = 7 : 9.$

55. Реши једначине:

а) $\frac{x}{5} - \frac{x}{2} = \frac{x}{3};$

б) $1 + y + \frac{1+y}{4} = \frac{1+y}{5};$

в) $1 - z - \frac{1-z}{2} = \frac{1-z}{7}.$

56. Одреди реалан број x ако је $(x+1) + (x+2) + ... + (x+100) = 5\,750$.

3.5. Још о линеарним једначинама

У претходним разматрањима говорили смо о појмовима једначине и линеарне једначине, скупу решења једначине, еквивалентним једначинама, еквивалентним трансформацијама једначина, решавању једначина... Циљ ове наставне јединице је да уведене појмове и изложене процедуре прошири и продуби.

пример 1

Колико решења у скупу реалних бројева има једначина $\frac{x}{3} - 5 = \frac{4x}{7} - 10$?

Решење:

$\frac{x}{3} - 5 = \frac{4x}{7} - 10$

$21 \cdot \frac{x}{3} - 5 \cdot 21 = 21 \cdot \frac{4x}{7} - 21 \cdot 10$ (помножимо са НЗС $(3, 7) = 21$)

$7x - 105 = 12x - 210$

$210 - 105 = 12x - 7x$

$105 = 5x$

$x = 105 : 5$

$x = 21$

Анализом претходне и других линеарних једначина – долазимо до закључка:

тврђење

Линеарне једначина $ax = b$, где је x непозната ($a, b \in R$, $a \neq 0$) има тачно једно решење $\frac{b}{a}$. Кажемо и да је је број $\frac{b}{a}$ јединствено (једино) решење линеарне једначине $ax = b$.

Доказ овог тврђења следи непосредно из услова $a \neq 0$, јер се из једначине $ax = b$, дељењем и леве и десне стране са a, добија еквивалентна једначина у решеном облику $x = \frac{b}{a}$.

пример 2

Колико решења у скупу реалних бројева има једначина $2x - 8 = 4x - 2(x + 4)$?

Решење:

Ако је $2x - 8 = 4x - 2(x + 4)$, онда се трансформацијом полинома $4x - 2(x + 4)$ добија да је $2x - 8 = 4x - 2x - 8$ или $2x - 8 = 2x - 8$.

Јасно је да је за сваки реалан број x лева страна једнакости једнака десној страни једнакости, што значи да су решења дате једначине сви реални бројеви, и има их бесконачно много.

Таква једначина се зове **неодређена једначина** или **идентитет**.

Нека је $A = B$ једначина по непознатој x. Ако је једначина $A = B$ еквивалентна са $0 \cdot x = 0$, тј. једначина у којој су изрази A и B једнаки за све реалне бројеве x, онда се таква једначина назива неодређена једначина.

пример 3

Да ли је једначина $4x^2 - 24 = (2x - 5)(2x + 5) + 1$ ($x \in R$) неодређена?

Решење:

Како је $(2x - 5)(2x + 5) + 1 = 4x^2 - 10x + 10x - 25 + 1 = 4x^2 - 24$, то је дата једначина еквивалентна са једначином $4x^2 - 24 = 4x^2 - 24$, која је очигледно неодређена (сваки реалан број x је њено решење).

пример 4

Колико решења у скупу реалних бројева има једначина $3x - 7 = 5x + 10 - 2(x + 6)$?

Решење:

$3x - 7 = 5x + 10 - 2(x + 6)$

$3x - 7 = 5x + 10 - 2x - 12$

$3x - 5x + 2x = 10 - 12 + 7$

$0 \cdot x = 5$

Јасно је да ће за сваки реалан број x једначина $0 \cdot x = 5$ бити еквивалентна са $0 = 5$, па дата једначина нема решења.

Нека је $A = B$ једначина по непознатој x. Ако је једначина $A = B$ еквивалентна са једначином $0 \cdot x = b$ ($b \neq 0$), тј. једначина $A = B$ није тачна ни за један број x из домена једначине, онда се једначина $A = B$ назива немогућа једначина.

пример 5

Дата је једначина $x + 2 = 2x - (x - m)$ ($x \in R$). За коју вредност реалног броја m је дата једначина: а) неодређена; б) немогућа?

Решење:

$x + 2 = 2x - (x - m)$

$x + 2 = 2x - x + m$

$x - x = m - 2$

$0 \cdot x = m - 2$

Једначина је неодређена ако је $m - 2 = 0$, тј. за $m = 2$.

Ако је $m \neq 2$, једначина је немогућа.

ЗАДАЦИ

57. Колико решења имају једначине:

а) $6y - 8 = 2(3y + 4)$;

б) $x + 7 = 9x + 11 - 4(x - 1)$?

58. Реши једначине и утврди која од њих нема решење, а која има бесконачно много решења:

а) $\frac{x-3}{5} - \frac{x-1}{2} = \frac{x-3}{10}$;

б) $x \cdot (x-2) = x \cdot (2+x) - 4x$;

в) $(x-5)^2 - (x+4)^2 = 3 \cdot (5-6x)$;

г) $1 + \frac{x-2}{5} = 1 - \frac{x+2}{5}$.

59. Да ли су еквивалентне једначине:

а) $\frac{x}{2} - 1 = 2x - 5$ и $3x - 6 = 3(x - 2)$;

б) $7(x + 4) = 7x + 22$ и $\frac{x}{3} + 2 = \frac{x}{4} - 1$?

60. За коју вредност реалног броја a су еквивалентне једначине $2x - 7 = x - 4$ и $ax = 6$?

61. За коју вредност реалног броја b, једначина $5x = b$ има јединствено решење?

62. За коју вредност реалног броја a је једначина $ax = 2021$ немогућа?

63. Колико решења има једначина $(x - 3)(x - 4) = (x - 2)(x - 5)$?

64. За коју вредност реалног броја a, једначина $ax = 12$ је неодређена?

65. За коју вредност реалних бројева a и b једначина $ax = b$ има бесконачно много решења?

66. За коју вредност реалног броја m једначина $m^2x + 2 = 4x + m$:

а) има јединствено решење;

б) нема решења;

в) има бесконачно много решења;

г) има целобројна решења?

67. Напиши једну немогућу једначину по x и једну неодређену једначину по y.

Једначине које се своде на линеарну једначину 3.6.

Знања стечена у досадашњим разматрањима линеарне једначине могу се успешно применити и на једначине које на први поглед нису линеарне, а које се алгебарским трансформацијама своде на линеарне једначине. Таквих примера имали смо и у претходним излагањима, а примери који следе илуструју још неке такве ситуације.

пример 1

Одреди сва реална решења једначине $(x+7)(x-1)=(x+2)(x-3)$ $(x \in R)$.

Решење:

Множењем бинома у једначини $(x+7)(x-1)=(x+2)(x-3)$, добија се $x^2+7x-x-7=x^2+2x-3x-6$ која није линеарна. На основу трансформације (1) изрази x^2 на једној и другој страни једнакости се поништавају и дата једначина се своди на једначину $6x-7=-x-6$ која је очигледно линеарна. Применом трансформације (4) добија се $6x+x=7-6$, или $7x=1$. Добијена једначина у решеном облику гласи $x=\frac{1}{7}$.

У примерима који следе користи се једно добро познато тврђење:

тврђење

Ако је производ два израза A и B једнак нули, онда је један од израза једнак 0, тј. ако је $AB=0$, онда је $A=0$ или $B=0$.

пример 2

Одреди сва решења једначине $(3y-12)(25+5y)=0$ $(y \in R)$.

Решење:

Применом поменутог твђења на једначину $(3y-12)(25+5y)=0$ добија се да је један од израза $3y-12=0$ или $25+5y=0$. Решавањем линеарних једначина $3y=12$ и $5y=-25$, добија се скуп решења дате једначине $S=\{4,-5\}$.

пример 3

Одреди сва решења једначине $x^3=16x$ $(x \in R)$.

Решење:

Дата једначина $x^3=16x$ еквивалентна је са једначином $x^3-16x=0$. Растављањем леве стране једначине на чиниоце добија се $x(x^2-16)=x(x-4)(x+4)=0$. Применом исказаног тврђења дата једначина се своди на три линеарне једначине: $x=0$, $x-4=0$ и $x+4=0$. Одговарајуће једначине у решеном облику су $x=0$, $x=4$ и $x=-4$, а скуп решења дате једначине је $S=\{0,4,-4\}$.

пример 4

Колико решења има једначина $(2y + 4)(y - 5) = y^2 - 25$ $(y \in R)$.

Решење:

Ако се дата једначина	$(2y + 4)(y - 5) = y^2 - 25$
напише у облику	$(2y + 4)(y - 5) = (y - 5)(y + 5)$
применом трансформације (4)	$(2y + 4)(y - 5) - (y - 5)(y + 5) = 0$
извлачењем заједничког чиниоца пред заграду	$(y - 5)(2y + 4 - y - 5) = 0$
добија се	$(y - 5)(y - 1) = 0$
Применом исказаног тврђења	$y - 5 = 0$ и $y - 1 = 0$

Скуп решења дате једначине $S = \{5, 1\}$.

пример 5

Постоји ли реалан број x, за који је $\frac{x+4}{x+3} = \frac{x+2}{x+1}$?

Решење:

Прво што морамо закључити јесте да x не може бити ни -3 ни -1, јер тада не би постојала једначина.

Уз услов $x \neq -3$ и $x \neq -1$, дата једначина $\frac{x+4}{x+3} = \frac{x+2}{x+1}$ се може написати у облику пропорције, тј. еквивалентне једначине:

$(x + 4) : (x + 3) = (x + 2) : (x + 1)$, тј. $(x + 4)(x + 1) = (x + 2)(x + 3)$

$x^2 + 4x + x + 4 = x^2 + 3x + 2x + 6$

Применом трансформације (1), једначина се своди на $4x + x + 4 = 3x + 2x + 6$,

а применом трансформације (4) на једначину $4x + x - 3x - 2x = 6 - 4$,

тј. на једначину $0 \cdot x = 2$.

Закључујемо да је дата једначина немогућа (тј. нема решења).

Једначина се може решити и на други начин:

Дата једначина $\frac{x+4}{x+3} = \frac{x+2}{x+1}$ је еквивалентна са

$\frac{x+3}{x+3} + \frac{1}{x+3} = \frac{x+1}{x+1} + \frac{1}{x+1}$, односно са једначинама

$1 + \frac{1}{x+3} = 1 + \frac{1}{x+1}$,

$\frac{1}{x+3} = \frac{1}{x+1}$,

$x + 3 = x + 1$.

Коначно се добија једначина $3 = 1$, која је немогућа.

У наредном примеру користи се још једно познато тврђење:

тврђење

Једначина $\frac{A}{B} = 0$ $(B \neq 0)$ еквивалентна је са једначином $A = 0$.

пример 6

Реши једначину $\frac{x-11}{x} = 0$ $(x \in R, x \neq 0)$?

Решење:

Из претходног тврђења следи да је дата једначина еквивалентна са једначином $x - 11 = 0$, односно $x = 11$.

пример 7

Колико решења има једначина $\frac{x^2-4}{x+2} = 0$ $(x \in R, x \neq -2)$?

Решење:

На основу претходног тврђења, дата једначина је због услова $x + 2 \neq 0$ еквивалентна са једначином $x^2 - 4 = 0$.

Следи да је: $(x+2)(x-2) = 0$

$x - 2 = 0$ По претпоставци $x + 2$ није нула.

$x = 2$

подсетник

$$|a| = \begin{cases} a & a \geq 0 \\ -a & a < 0 \end{cases}$$

пример 8

Реши једначину $|2x - 3| = 5$ $(x \in R)$.

Решење:

Ако је $2x - 3 \geq 0$, дата једначина $|2x - 3| = 5$ постаје $2x - 3 = 5$.

Следи да је $2x = 5 + 3 = 8$

$x = 4$

Како је $2 \cdot 4 - 3 = 5 \geq 0$, број 4 је једно решење дате једначине.

Ако је $2x - 3 < 0$, дата једначина $|2x - 3| = 5$ постаје $3 - 2x = 5$.

Следи да је $-2x = 5 - 3 = 2$

$x = -1$

Како је $2 \cdot (-1) - 3 = -5 < 0$, број -1 је једно решење дате једначине.

Скуп решења дате једначине је $S = \{4, -1\}$.

ЗАДАЦИ

68. Реши једначине:

а) $4x^2 = 9$;

б) $5y^2 = 10y$;

в) $|z| = 7$.

69. Колико решења има једначина $x(x + 1) = x(2x - 7)$?

70. Дате су једначине:

(J_1) $a^2 - 81 = 0$, (J_2) $3a = 27$, (J_3) $a = 9$ и (J_4) $5 - a = 14 - 2a$.
Које од датих једначина су еквивалентне?

71. Да ли су еквивалентне једначине:

а) $7y = 2y$ и $y^2 = 0$;

б) $4z = 12$ и $9 - 6z + z^2 = 0$;

в) $x^2 + 5 = 0$ и $7x - 1 = 7x + 6$?

72. Реши Тест 212 на електронској платформи *еЗбирка* (http://www.ezbirka.math.rs).

73. Реши једначине:

а) $(2x - 5)^2 = (7 - 2x)^2$;

б) $y + |y| = 16$;

в) $3z - |z| = 20$.

74. Колико решења има једначина $6x(x + 1) = 2x(3x + 4)$?

75. Одреди сва решења једначине:

а) $y^3 + 9y^2 = 0$;

б) $y^3 - 9y = 0$.

76. Колико решења има једначина $(y - 3)^2 = 9 - y^2$?

77. Реши једначину $(3x - 4)^2 - (2x + 19)^2 = 0$.

78. Дате су једначине: $(x + 1)^2 = x^2 + 2x + 1$ и $\frac{x}{|x|} = -1$. Докажи да дате једначине имају бесконачно много решења. Да ли су дате једначине еквивалентне?

79. Могу ли бити еквивалентне линеарна једначина и једначина која није линеарна?

Примена линеарних једначина 3.7.

Математика је наука која има широку примену и скоро да не постоји област људског деловања у којој није присутна. Примери који следе имају циљ да покажу како се неки проблеми из свакодневног живота, других наука и других области математике могу „превести" на језик линеарних једначина и затим успешно решити коришћењем еквивалентних трансформација.

пример 1

Збир два броја је 3 456, а њихова разлика је 1 000. О којим бројевима је реч?

Решење:

Нека је мањи број (сабирак) једнак x. Тада је већи број (сабирак) једнак $x + 1\,000$. Збир та два броја је 3 456, па је $x + x + 1\,000 = 3\,456$. Следи да је $2x + 1\,000 = 3\,456$ или $2x = 3\,456 - 1\,000 = 2\,456$. Тада је $x = 2\,456 : 2 = 1\,228$, па је мањи број 1 228, а већи број $1\,228 + 1\,000 = 2\,228$.

пример 2

Јато гусака у лету сретне једну усамљену гуску. „Здраво, сто гусака!", рече усамљена гуска. „Да нас је још оволико и половина и четвртина, и да нам се ти придружиш, било би нас тачно 100", одговори јој јато гусака. Колико гусака је било у јату?

Решење:

Ако број гусака у јату означимо са x. Онда из услова задатка следи да је $x + x + \frac{x}{2} + \frac{x}{4} + 1 = 100$.

Множењем једначине са НЗС $(2, 4) = 4$ добија се: $4x + 4x + 2x + x + 4 = 400$. Следи да је $11x = 400 - 4 = 396$ или $11x = 396$. Коначно је $x = 396 : 11 = 36$, па је број гуска у јату 36.

пример 3

Милан је купио уџбеник из математике и платио га 429 динара. Продајна цена уџбеника се формира тако што се на цену издавача додаје ПДВ (порез на додату вредност) који у Републици Србији за уџбенике износи 10% и који припада буџету Републике Србије. Колико новца припада издавачу, а колико новца иде у буџет Републике Србије?

Решење:

Нека је цена уџбеника издавача (100%) једнака y динара. ПДВ је 10% и износи $0{,}10y$. Како је укупна цена уџбеника 429 динара, то је $y + 0{,}1y = 1{,}1\,y = 429$. Добија се да је цена уџбеника издавача $y = 429 : 1{,}1 = 4\,290 : 11 = 390$ динара. Порез на додату вредност $0{,}1y = 39$ динара.

пример 4

У малом базену се налази 600 литара воде температуре 50°C. Колико литара воде чија је температура 18°C треба сипати у базен да би температура мешавине била погодна за купање и износила 24°C?

Решење:

Непознату количину воде означимо са k (литара). Тада је укупна количина воде $600 + k$. Како је количина топлоте коју садрже свака појединачна компонента мешавине једнака количини топлоте мешавине, добија се једначина $600 \cdot 50 + k \cdot 18 = (600 + k) \cdot 24$. Следи да је $30\,000 + 18k = 14\,400 + 24k$. Применом трансформације (4) добија се $30\,000 - 14\,400 = 24k - 18k$ или $15\,600 = 6k$. Дакле, $k = 15\,600 : 6 = 2\,600$. Закључујемо да је тражена количина воде 2 600 литара

пример 5

Летеле су вране и спазиле гране. По две вране – врана више. По три вране грана више. Кол'ко врана, кол'ко грана?

Решење:

Овај задатак је уводни у тему линеарне једначине и неједначине. Решићемо га на два начина.

(1) Нека је број грана једнак x. Из првог услова (по две вране – врана више) јасно је да је једна врана остала без гране, па је број врана једнак $2x + 1$. Из другог услова (по три вране – грана више) јасно је да је једна грана остала празна, па врана има $3(x - 1)$. Тражена једначина је $2x + 1 = 3(x - 1)$ или $2x + 1 = 3x - 3$. Применом трансформације (4) добија се да је $2x - 3x = -3 - 1$ или $-x = -4$. Следи да је (једначина у решеном облику) $x = 4$, па је број грана једнак 4, а број врана $2x + 1 = 3(x - 1) = 9$.

(2) Ако је број врана y, онда је из првог услова број грана једнак $(y - 1) : 2$. Из другог услова је број грана једнак $y : 3 + 1$.

$$\frac{y-1}{2} = \frac{y}{3} + 1$$

$3y - 3 = 2y + 6$ (помножимо са НЗС (2, 3) = 6 обе стране једначине)

$3y - 2y = 6 + 3$

$y = 9$ Број врана је 9, а број грана $\frac{y-1}{2} = \frac{y}{3} + 1 = 4$.

пример 6

Дата су четири природна броја чији збир је 192. Када се првом броју дода 3, другом броју одузме 3, трећи број помножи са 3 и четврти број подели са 3, добију се једнаки бројеви. Одреди четири дата броја.

Решење:

Нека је трећи тражени број једнак броју x. Тада је број који се добија после изведених операција једнак $3x$. Тада је први тражени број $3x - 3$, други тражени број $3x + 3$ и тада је четврти тражени број $3x \cdot 3 = 9x$. Следи да је збир тражених бројева једнак $3x - 3 + 3x + 3 + x + 9x = 16x = 192$. Следи да је $x = 192 : 16 = 12$. Значи да је први број $3x - 3 = 36 - 3 = 33$; други број је $3x + 3 = 36 + 3 = 39$; трећи број је $x = 12$; четврти број је $3x \cdot 3 = 9x = 108$.

Из претходних примера може се закључити да решавање проблемских задатака коришћењем једначина, тј. задатака у којима није директно дата једначина коју треба решити, има неколико важних фаза:

1. **Разумевање проблема**, тј. раздвајање шта је у задатку дато, а шта се тражи.
2. **Рационално одабирање непознате** и тачно дефинисање (и обавезно исписивање) шта уочена непозната тачно представља.
3. **Моделирање проблема**, тј. превођење услова датих у проблемском задатку на језик једначина.
4. **Решавање добијене једначине** коришћењем познатих еквивалентних трансформација.
5. **Провера** да ли је добијено решење смислено и да ли одговара свим условима датим у проблемском задатку.

ЗАДАЦИ

80. Збир три узастопна природна броја је 15. Одреди те бројеве.

81. Данас сестра има два пута више година од брата. За три године ће сестра имати 7 година више од брата. Колико година има сестра, а колико брат?

82. Збир четвртине и петине неког броја је 54. О ком броју је реч?

83. Мира је за три дана прочитала књигу. Првог дана је прочитала половину књиге, другог дана 12 страница, а трећег дана трећину књиге. Колико страница има та књига?

84. Који број је за 12 већи од своје седмине?

85. Марко окречи један стан за 3 дана, а Јанко за 5 дана. Колико станова ће окречити заједно Марко и Јанко за 15 дана?

86. Једна свеска и једна оловка коштају 52 динара, а три свеске и четири оловке коштају 168 динара. Колико коштају четири свеске и три оловке?

87. Збир 11 узастопних природних бројева је 187. О којим бројевима је реч?

88. Аритметичка средина пет узастопних целих бројева је 1. Колики је њихов производ?

89. Ако Бранко купи 4 свеске, преостане му 8 динара. Ако би желео да купи 5 свезака недостаје му 12 динара. Колико кошта свеска? Колико новца има Бранко?

90. Ако се са 120 kg сена 5 оваца може хранити 8 дана, колико је сена потребно да се стадо од 80 оваца храни 15 дана?

91. Новчаница од 1 000 динара размењена је са 233 новчића од 2 и 5 динара. Колико је било новчића од 2, а колико новчића од 5 динара?

92. Казаљке на часовнику показују 6 сати. После колико времена ће се оне први пут поклопити?

93. Када се двоцифрен број сабере са бројем написаним истим цифрама у обрнутом распореду, добије се број 121. О ком двоцифреном броју се ради, ако је разлика његових цифара једнака 3?

3.8. Примена линеарних једначина на проблеме кретања

Проблеми кретања су област која успешно повезује математику и физику. Задаци који следе приказују неке од карактеристичних примера у којима су једначине користан „алат“ за решавање разновсних проблема кретања.

пример 1

Атлетичар Саша и бициклиста Раша, крећу из Београда и Ниша један другом у сусрет. Раша трчи брзином од 10 km/h, а Саша вози бицикл брзином 30 km/h. После колико сати ће се сусрести Саша и Раша, ако је растојање од Београда до Ниша 240 km? Ко ће у тренутку њиховог сусрета бити ближи свом циљу: Раша (који путује у Београд) или Саша (који путује у Ниш)?

Решење:

Нека је до сусрета Саше и Раше потребно x сати. За x сати Саша пређе (изражено у километрима) растојање једнако $10x$. За x сати Раша пређе (изражено у километрима) растојање једнако $30x$. Из услова задатка је $10x + 30x = 40x = 240$ или $40x = 240$. Следи да је $x = 240 : 40 = 6$ сати. У тренутку сусрета, Саша је прешао $6 \cdot 10 = 60$ km. Раша је прешао $6 \cdot 30 = 180$ km и био ближи Београду него Саша Нишу.

пример 2

Моторциклиста је пошао из места A у место B где је требало да стигне у одређено време. Ако буде возио брзином од 35 km/h, закасниће 2 сата. Ако буде возио брзином од 50 km/h, стићи ће 1 сат раније. Одреди удаљеност места A и B.

Решење:

Нека је време путовања бициклисте мерено у сатима једнако t. Из услова задатка дужина пута од A до B је $35(t + 2)$. Из услова задатка дужина пута од A до B је и $50(t - 1)$. Следи да је $35(t + 2) = 50(t - 1)$ или $35t + 70 = 50t - 50$.
Тада је $35t - 50t = -50 - 70$ или $-15t = -120$. Дакле, $t = 120 : 15 = 8$ сати. Растојање од A до B је $35(t + 2) = 50(t - 1) = 350$ km.

пример 3

Растојање између места A и B воз је прешао за 23 сата. Половину пута прешао је брзином од 80 km/h, трећину пута брзином од 60 km/h и преостали део пута брзином од 40 km/h. Колико је растојање између A и B ?

Решење:

Нека је растојање између A и B мерено у километрима једнако s. Преостали део пута је $s - \frac{s}{2} + \frac{s}{3} = \frac{s}{6}$. Половину пута воз је прешао за време $\frac{s}{2} : 80 = \frac{s}{160}$; трећину пута воз је прешао за време $\frac{s}{3} : 60 = \frac{s}{180}$; шестину пута воз је прешао за време $\frac{s}{6} : 40 = \frac{s}{240}$. Из услова задатка је $\frac{s}{160} + \frac{s}{180} + \frac{s}{240} = 23$. Множењем једначине са НЗС (160, 180, 240) = 1 440 добија се $9s + 8s + 6s = 23s = 23 \cdot 1\,440$. Решавањем последње једначине добија се да је $s = 23 \cdot 1\,440 : 23 = 1\,440$ km.

пример 4

Пешак Срба од Београда до Атине стигне за 55 дана, а пешак Зорба из Атине у Београд стигне за 66 дана. Ако обојица крену у исти час, један другом у сусрет, после колико дана ће се срести?

Решење:

Нека су се пешаци на путу s од Београда до Атине срели после d дана. Пешак Срба за један дан пређе један 55–ти део пута, а за d дана прећи ће $\frac{ds}{55}$. Слично, пешак Зорба ће за d дана ће прећи $\frac{ds}{66}$. Када се саберу њихови пређени путеви за d дана добија се $\frac{ds}{55} + \frac{ds}{66} = s$. Ако претходну једначину помножимо са $\frac{330}{s}$, добија се $6d + 5d = 330$ или $11d = 330$. Према томе, пешаци Срба и Зорба ће се сусрести после $d = 330 : 11 = 30$ дана.

ЗАДАЦИ

94. Из Ваљева и Београда, један другом у сусрет, истовремено крећу пешак и бициклиста. Ко је у тренутку њиховог сусрета био ближи Београду, ако се пешак креће брзином од 5 km/h, бициклиста брзином од 15 km/h и ако је растојање између Ваљева и Београда једнако 95 km?

95. Авион је за 2 h и 15 минута лета сталном брзином прелетео пут од 1 980 km. Колика је брзина авиона?

96. Два пешака, из Лознице и Ваљева, истовремено крећу један другом у сусрет брзином од 6 km/h. Истовремено са носа првог од њих, другом у сусрет, креће и мува брзином од 33 km/h и, када стигне до другог пешака, враћа се првом, онда опет другом, и све тако до тренутка када се пешаци сусретну. Колико растојање је прешла мува, ако од Ваљева до Лознице има 72 km?

97. Један возач је својим аутомобилом прешао 50 000 km и притом је сваки од точкова (4 погонска и један резервни) прешао једнак број километара. Колико километара је прешао сваки точак?

98. Два дечака возе бицикле. Млађи сваког минута прелази 120 метара, а старији 150 метара. После колико минута ће старији дечак стићи млађег, ако је млађи пошао један минут раније?

99. Воз од 16 вагона се креће равномерно и пролази поред путника на станици за 36 секунди. Којом брзином ће воз да прође поред путника ако је дужина једног вагона 18 m?

100. Анка и Бранка се налазе на бициклистичкој стази на међусобној удаљености од 3 km и истовремено крећу једна другој у сусрет. Анка је на ролерима и креће се брзином од 13 km/h, а Бранка вози бицикл брзином од 17 km/h. После колико времена ће се срести? Колике путеве ће прећи?

101. Раздаљину између градова А и В брзи воз прелази брзином 90 km/h за 1,5 сат брже него теретни воз, који се креће брзином 60 km/h. Израчунати растојање између градова А и В?

102. По изласку из свог гнезда, веверица донесе орах са дрвета у гнездо за 20 секунди. Одредите колико је удаљено стабло ораха од гнезда ако се зна да је брзина веверице од гнезда до дрвета 5 m/s, а брзина веверице од дрвета до гнезда 3 m/s (за узимање ораха није губила време, нити се успут задржавала).

103. Пут између Београда и Минхена, Душан је је прешао аутомобилом за три дана. Првога дана је прешао $\frac{3}{8}$, а другог $\frac{5}{12}$ целог пута. Трећег дана је прешао 40 km више од $\frac{1}{6}$ целог пута. Колика је дужина пута између Београда и Минхена?

104. Атлетичари брзоходачи истовремено крећу са старта. Први има 10% краћи корак од другог, али за исто време направи 10% више корака од другог. Ко ће победити у тој трци?

105. Аутомобилиста је од места А до места В возио брзином од 60 km/h, а од места В до места А брзином 100 km/h. Колика је била средња брзина аутомобила?

Још неке примене линеарних једначина 3.9.

Наредни примери представљају занимљиве примене линеарних једначина на проблеме из старих књига, проблеме мешања, геометријске проблеме, и још неке области свакодневног живота.

ПРОБЛЕМИ ИЗ СТАРИХ КЊИГА

пример 1

На надгробном споменику чувеног античког математичара Диофанта Александријског пише: *Путниче! Овде су сахрањени земни остаци Диофанта. Бројеви ће рећи, о чуда, колики је век његовог живота био. Дивно му детињство узе шести део. А кад му протече живота још дванаести део, покри се брада његова маљама мужевним. Седми део Диофант у браку без деце проведе. А кад протече још година пет, срећним га учини рођење прекрасног првенца сина, коме је судбина дала само половину прекрасног и светлог живота очевог. И у дубоком болу старац живота земног дочека крај, поживевши четири године пошто изгуби сина. Реци, у којој години живота дочека смрт Диофант?*

занимљивост

Диофант Александријски (живео око 250. н. е.), је грчки математичар који је у свом капиталном делу *Аритметика* (у 13 књига од којих је сачувано само 6, а 7 је изгорело у пожару **Александријске библиотеке**) први употребио слово као ознаку за непознату и симболе неких математичких операција. Због тога га многи сматрају и оснивачем алгебре. Заслужан је и за прва теоријска разматрања неодређених једначина, које се по њему у савременој математичкој науци, називају **Диофантове једначине**.

Решење:

Нека је животни век Диофанта Александријског био x година. Из услова задатка добија се једначина $\frac{x}{6}+\frac{x}{12}+\frac{x}{7}+5+\frac{x}{2}+4=x$. Множењем једначине са НЗС (6, 12, 7, 2) = 84 добија се еквивалентна једначина:

$$14x + 7x + 12x + 420 + 42x + 336 = 84x$$

$$75x - 84x = -420 - 336$$

$$-9x = -756$$

$$x = 756 : 9 = 84$$

Дакле, Диофант је живео 84 године.

пример 2

Коњ поједе стог сена за 2 месеца, овца за 3 месеца, а коза за 4 месеца. За које време ће стог сена заједно појести коњ, овца и коза? (* Из старе српске рачунице)

Решење:

За један месец коњ поједе $\frac{1}{2}$ стога сена. За један месец овца поједе $\frac{1}{3}$ стога стена. За један месец коза поједе $\frac{1}{4}$ стога сена. Нека је тражено време t месеци. Тада је $t\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{4}\right)=1$ или $t\left(\frac{6+4+3}{12}\right)=1$. Следи да је $t\left(\frac{13}{12}\right)=1$ или $t=\frac{12}{13}$. Према томе, сви заједно ће појести стог сена за $\frac{12}{13}$ месеца.

ГЕОМЕТРИЈСКИ ПРОБЛЕМИ

пример 3

Мања катета правоуглог троугла је 10 cm, а хипотенуза и већа катета се разликују за 2 cm. Колика је површина тог троугла?

Решење:

Нека је мерни број веће катете једнак x (cm).
Тада је мерни број хипотенузе једнак $x+2$.
Из Питагорине теореме следи:

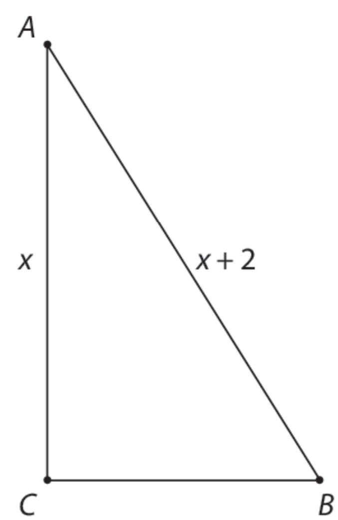
$x^2+10^2=(x+2)^2$

$x^2+100=x^2+4x+4$

$100-4=4x$

$x=96:4=24$

Површина правоуглог троугла је $P=\frac{10\cdot 24}{2}=120\text{ cm}^2$.



пример 4

Дрво висине 32 m преломи олуја, тако да врх дрвета падне 16 m од стабла. На којој висини се преломило дрво?

Решење:

Нека се дрво поломило на висини h (изражено у метрима).
Из *Питагорине теореме* следи једнакост:

$h^2+16^2=(32-h)^2$

$h^2+256=1\,024-64h+h^2$

$64h=1\,024-256=768$

$h=768:64=12.$

Дрво се преломило на висини од 12 m.

ПРОБЛЕМИ МЕШАЊА

Производња накита спада у најстарије занате од постанка цивилизације. Данас се користе два начина означавања количине злата у накиту, и то: финоћа злата изражена у каратима или у хиљадитим деловима масе. Количина злата од једног карата представља тежину злата од 41,66 g у једном килограму метала, тј. 1 000 g чистог злата износи 24 K.

$$10\text{ K} \rightarrow 416{,}6\text{ g/kg};$$
$$14\text{ K} \rightarrow 585\text{ g/kg},$$
$$18\text{ K} \rightarrow 750\text{ g/kg}.$$

Други начин обележавања представља количину злата изражену у хиљадитим деловима масе, као на пример: $\frac{585}{1\,000}$, $\frac{750}{1\,000}$ или $\frac{333}{1\,000}$.

пример 5

Колико карата има злато које се добије када се помеша 2 kg злата финоће 17 карата и 3 kg злата финоће 22 карата?

Решење:

Маса легуре је 5 kg. Нека је финоћа легуре f карата. Из услова задатка се добија једначина $5f = 2 \cdot 17 + 3 \cdot 22 = 34 + 66 = 100$. Тада је финоћа легуре $f = 100 : 5 = 20$ карата.

У медицини се често користе алкохол и његови раствори. Покажимо како то изгледа у пракси.

пример 6

Помешано је 100 литара алкохолног раствора са 80% алкохола и 80 литара алкохолног раствора са 35% алкохола. Колико процената алкохола садржи добијена мешавина?

Решење:

Нека је тражени проценат раствора једнак p (у %). Из услова задатка се добија:

$100 \cdot 80\% + 80 \cdot 35\% = (100 + 80) \cdot p$
$80 + 28 = 180p$
$180p = 108.$
$p = 108 : 180 = 12 : 20 = 60 : 100$

Концентрација алкохола у мешавини је $p = 60\%$.

пример 7

Колико килограма пасуља чија је цена 200 динара треба помешати са 100 kg пасуља чија је цена 280 динара – да би цена мешавине била 250 динара?

Решење:

Нека је тражена маса пасуља, изражена у килограмима, једнака m.
Из услова задатка следи једначина:
$(100 + m) \cdot 250 = m \cdot 200 + 100 \cdot 280$
$25\,000 + 250m = 200m + 28\,000$
$250m - 200m = 28\,000 - 25\,000$
$50m = 3\,000$
$m = 3\,000 : 50 = 60$ Тражена маса пасуља је 60 kg.

ЗАДАЦИ

106. Одреди цену једног килограма мешавине бомбона која се добија мешањем 20 kg бомбона по цени од 500 динара, са 30 kg бомбона по цени од 600 динара?

107. Сергеј је 130 ораха поделио на два дела, и то тако да је први (мањи) део увећан четири пута једнак другом (већем) делу умањеном три пута. Колико ораха садржи први, а колико други део?

108. Дужина фудбалског игралишта је за 40 m већа од ширине. Израчунај површину фудбалског игралишта, ако је обим игралишта 320 m?

109. Збир два броја је 17, а када се већи број помножи са 2, а мањи са 3 – њихов збир је 41. О којим бројевима је реч?

110. Један човек попије балон кваса за 14 дана, а заједно са својом женом за 10 дана. За колико дана ће балон кваса попити сама жена? (* Из једне старе руске књиге.)

111. Реши Тест 205, на електронској платформи *еЗбирка* (http://www.ezbirka.math.rs).

112. Збир мерних бројева катета правоуглог троугла је 41, а мерни број хипотенузе је 29. Одреди површину тог правоуглог троугла?

113. Мерни бројеви углова троугла су: **а)** три узастопна природна броја; **б)** три узастопна парна природна броја. Израчунај углове тих троуглова.

114. Ако се природан број a подели природним бројем b количник је 5 и остатак 10. О којим природним бројевима се ради, ако је њихова разлика 1 610?

115. Постоји ли шест узастопних целих бројева чији је збир једнак 3?

116. Наташа је имала известан број јабука и крушака. Од укупног броја $\frac{3}{7}$ су јабуке, а све остало су крушке. Када је добила још 4 јабуке и појела 2 крушке – онда је имала једнак број јабука и крушака. Колико је Наташа на почетку имала јабука, а колико крушака ?

117. Једна цев напуни базен за 6 сати, а друга за 10 сати. Цев која празни базен источи пун базен воде за 5 сати. За колико ће се сати напунити базен, ако истовремено раде све три цеви?

118. Мерни бројеви страница правоуглог троугла су узастопни природни бројеви. Одредити број таквих троуглова?

119. Разлика два броја је 13,86. Ако се у већем броју децимални зарез помери за једно место у лево, добија се мањи број. Израчунај збир тих бројева?

Неједначине 3.10.

У претходним разредима, поред једначина, решавали смо и неједначине. Циљ ове наставне јединице јесте да се подсетимо неједнакости и неједначина о којима смо говорили у петом, шестом и седмом разреду, и да дефинишемо појам неједначине и појмове решења и скупа решења неједначине.

пример 1

Водостај Саве тренутно је на коти –120 cm, а Сава плави околину ако је њен водостај на коти 200 cm. Напиши формулу која описује колико највише (у центиметрима) може да порасте водостај Саве, а да не поплави околину.

Решење:

Ако пораст водостаја у центиметрима означимо са x, онда $-120 + x$ мора бити мање од 200, што исказује неједнакост $-120 + x < 200$. Као што је из претходних разреда познато, добијена формула $-120 + x < 200$ назива се **неједначина**.

пример 2

Дати су изрази: $A = 3 + 4$, $B = 10 - 8$ и $C = 6x - 5$. Шта се добија ако дате изразе међусобно повежемо једним од неједнакосних симбола (знакова): $<, >, \leq, \geq$.

Решење:

Могуће неједнакости су $A * B$, $B * C$ и $C * A$, где је $*$ неки од симбола $<, >, \leq, \geq$. Добијене формуле $A * B$, $B * C$ и $C * A$ називају се неједнакости. $A > B$, тј. $3 + 4 > 10 - 8$ је тачна, а $A \leq B$, тј. $3 + 4 \leq 10 - 8$ је нетачна.

$A > C$, тј. $3 + 4 > 6x - 5$ је тачна за неке вредности x (на пример, за $x = 0$), а нетачна за друге вредности x (на пример, за $x = 3$).

$B < C$, тј. $10 - 8 < 6x - 5$ је тачна за неке вредности x (на пример, за $x = 4$), а нетачна за неке друге вредности x (на пример, за $x = -1$). Ове неједнакости су за неке вредности x тачне, а за неке вредности x нетачне.

Каква је разлика између неједнакости $A * B$, $B * C$ и $C * A$?

Нека су A и B изрази.

Формуле $A > B$, $A < B$, $A \leq B$ и $A \geq B$ називају се неједнакости.

Ако изрази A и B садрже само константе, онда се неједнакост $A * B$ назива бројевна неједнакост.

Ако бар један од израза A и B садржи непознату, онда се неједнакост $A * B$ назива неједначина.

У неједнакости $A * B$, израз A представља леву, а израз B десну страну неједнакости.

пример 3

Нека је $a \in \{-2, -1, 0\}$. За који од бројева из датог скупа је тачна неједнакост $6a + 5 \geq 4a + 3$?

Решење:

Како је $6 \cdot (-2) + 5 = -7$ и $4 \cdot (-2) + 3 = -5$, то за $a = -2$ неједнакост није тачна.

Слично $6 \cdot (-1) + 5 = -1$ и $4 \cdot (-1) + 3 = -1$, то је за $a = -1$ неједнакост тачна.

Како је $6 \cdot 0 + 5 = 5$ и $4 \cdot 0 + 3 = 3$, то је за $a = 0$ неједнакост тачна.

пример 4

За које вредности непознате x из скупа $S = \{-4, -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, 4\}$ је израз $2x - 4$: а) негативан; б) једнак нули; в) позитиван

Решење:

Израчунавањем вредности израза $2x - 4$ за дате вредности x, добија се таблица:

x	-4	-3	-2	-1	0	1	2	3	4
$2x - 4$	-12	-10	-8	-6	-4	-2	0	2	4

Примећујемо да је за целе бројеве $-4 \leq x < 2$ израз $2x - 4 < 0$.
За $x = 2$, израз $2x - 4 = 0$.
Јасно је и да за целе бројеве $2 < x \leq 4$ израз $2x - 4 > 0$.
Закључујемо:

- да су цели бројеви из подскупа $\{-4, -3, -2. -1, 0, 1\}$ решења неједначине $2x - 4 < 0$;
- да је $2x - 4 = 0$ за $x = 2$;
- да цели бројеви из подскупа $\{3, 4\}$ јесу решења неједначине $2x - 4 > 0$.

Претходни примери и искуства из млађих разреда упућују нас да детаљније дефинишемо појам решења неједначине.

Решење неједначине $A * B$ по непознатој x, је сваки реалан број x_o за који неједнакост $A * B$ постаје тачна бројевна неједнакост (* је један од неједнакосних симбола $<, >, \leq, \geq$).

Неједначина $x * x_o$ представља неједначину у решеном облику.

Решити неједначину $A * B$ значи одредити сва њена решења (ако постоје).

Скуп свих реалних бројева x за које неједнакост $A * B$ је тачна бројевна неједнакост, називамо скуп решења неједначине и означавамо са $S(N)$.

Напомињемо, да уколико није посебно дефинисан скуп у коме тражимо решења дате неједначине, онда се (као и код једначина) подразумева да је то скуп реалних бројева.

пример 5

Колико решења у скупу реалних бројева имају неједначине:
а) $3x - 5 \leq 4$; б) $7x + 9 - 4x > x - 5 + 2x$; в) $5x + 1 < 4x - 9 + x$?

Решење:

а) Из неједначине $3x - 5 \leq 4$ следи да је $3x \leq 9$, тј. $x \leq 3$. То значи да неједначина има бесконачно много решења и да су то сви реални бројеви мањи или једнаки 3.

б) Неједначина $7x + 9 - 4x > x - 5 + 2x$ своди се на неједнакост $3x + 9 > 3x - 5$, која је тачна за сваки реалан број, јер се своди на тачну неједнакост $9 > -5$. Дакле, скуп решења дате неједначине је $S = R$.

в) Из неједначине $5x + 1 < 4x - 9 + x$ следи неједнакост $5x + 1 < 5x - 9$, која није тачна ни за један реалан број, јер је за сваки реалан број $1 > -9$. То значи да дата неједначина нема решења, тј. скуп решења је празан скуп, односно $S = \varnothing$.

Уочили смо да постоје једначине које су тачне за било коју вредност непознатих (идентитети). Поставља се питање да ли постоје и неједначине које су тачне за било коју вредност непознате?

пример 6

Колико решења има неједначина $x^2 + 1 > 0$ $(x \in R)$?

Решење:

Како је $x^2 \geq 0$ за било који реалан број x, то је $x^2 + 1 > 0$ за сваки реалан број x.

Неједнакосне формуле које су тачне за било коју вредност непознатих, једноставно се називају неједнакости (и имају различито значење од појмова бројевна неједнакост и неједначина). Такве су неједнакости $x^2 + x + 1 > 0$, $x^2 + y^2 \geq 2xy$... и многе друге.
За разлику од једначина где скуп решења најчешће представља неки коначан скуп, скуп решења неједначине је најчешће бесконачан скуп који се приказује бројевним интервалима.

подсетник

У петом разреду је било говора о записивању скупова преко заједничког својства елемената. Тако запис: $S = \{x \mid x \in N \text{ и } x \leq 37\}$ подразумева да су елементи скупа S природни бројеви (заједничко својство) који задовољавају услов да су мањи или једнаки 37.
Подсетимо се и да смо у седмом разреду дефинисали:
Отворени интервал $(a, b) = \{x \mid x \in R \text{ и } a < x < b\}$ – (бројеви a и b не припадају интервалу);
Полуотворени интервал $[a, b) = \{x \mid x \in R \text{ и } a \leq x < b\}$ – (a припада, b не припада интервалу);
Полуотворени интервал $(a, b] = \{x \mid x \in R \text{ и } a < x \leq b\}$ – (a не припада, b припада интервалу);
Затворени интервал $[a, b] = \{x \mid x \in R \text{ и } a \leq x \leq b\}$ – (бројеви a и b припадају интервалу).
Интервали чије ознаке садрже $-\infty$ или ∞ су отворени (на пример, $(-\infty, \infty)$, $(-\infty, a)$, (a, ∞)) или полуотворени (на пример, $(-\infty, a]$, $[a, \infty)$).

занимљивост

Симболи $-\infty$ и ∞ су ознаке за **минус бесконачно** и **плус бесконачно** (или само бесконачно). Према подацима из историје математике, симболе $-\infty$ и ∞ је у математичке науке, 1655. године увео познати енглески математичар Џон Валис (1616–1703).

пример 7

Дате су неједначине у решеном облику:

а) $-2 < x < 4$, б) $0 \le x < 7$, в) $-9 < x \le 3$, г) $-5 \le x \le 6$, д) $x > 1$, ђ) $x \le -3$.

Прикажи скупове решења датих неједначина графички на бројевној правој и запиши скупове решења у облику интервала, непопуњен (бели) кружић означава отворен, а попуњен (црни) кружић затворен интервал.

Решење:

а)

$S = (-2, 4)$

б)

$S = [0, 7)$

в)

$S = (-9, 3]$

г)

$S = [-5, 6]$

д)

$S = (1, \infty)$

ђ)

$S = (-\infty, -3]$

ЗАДАЦИ

120. Дате су неједнакости: A: $4x + 7 > 0$, B: $13 - 8 < 9 + 5$ и C: $3x + 4 \le 5x + 6$. Да ли је неједнакост A бројевна неједнакост? Да ли је неједнакост B неједначина? Да ли је неједнакост C неједначина?

121. Дати су изрази: $A = 0$, $B = 3x - 12$, $C = x + 7$. Напиши три неједначине које се добијају повезивањем датих израза неким од неједнакосних симбола ($<, >, \le, \ge$).

122. Који од реалних бројева из скупа $\{-1, 0, 1, \sqrt{3}, 2, \pi, 3, 4\}$ су решења неједначине $5x - 8 \ge 3x - 6$? Увери се да то нису једина решења дате неједначине.

123. Дата је неједначина у решеном облику $x < -5$. Запиши скуп решења ове неједначине у облику интервала, и графички прикажи дати скуп на бројевној правој.

124. Напиши једну тачну нумеричку неједнакост и једну неједначину.

ЗАДАЦИ

125. Да ли је неједнакост $|x - 7| + 4 > 0$ тачна за сваки реалан број x?

126. Решење неједначине је скуп свих бројева који припадају интервалу $[3, \infty)$. Прикажи дати интервал на бројевној правој и напиши неједначину у решеном облику.

127. Колико решења има неједначина $x < 3$ у скупу:

а) природних бројева;

б) целих бројева;

в) реалних бројева?

128. Дата је неједначина $2x > 8$. У ком скупу бројева је решење ове неједначине $(4, \infty)$?

129. Одреди скуп решења неједначина:

а) $5x + 13 > 7x - 6 - 2x$;

б) $x^2 + 4 < x^2 - 9$.

130. Дате су неједначине у решеном облику:

а) $-3 < x < 5$; **б)** $1 \leq x < 9$; **в)** $-4 < x \leq 2$;

г) $-6 \leq x \leq 7$; **д)** $x > 0$; **ђ)** $x \leq -\sqrt{3}$ $(x \in R)$.

Прикажи скупове решења датих неједначина графички и запиши скупове решења у облику одговарајућих интервала.

131. Напиши неједначину у решеном облику ако је скуп њених решења интервал:

а) $(-2, 4)$; **б)** $[0, 7]$; **в)** $[-5, 3)$;

г) $(-3, 8]$; **д)** $(-\infty, 1]$; **ђ)** $[-6, \infty)$.

132. Колико решења у скупу реалних бројева имају неједначине:

а) $|x| \leq 0$;

б) $|x| > -7$;

в) $x^2 + 5 < 0$;

г) $x^2 + 3 > 0$?

3.11. Еквивалентне неједначине

У претходној лекцији дефинисали смо појмове неједначине и решења неједначине. Видели смо и да постоје неједначине које немају решења, имају једно или више решења, дефинисали интервале... Даља истраживања неједначина настављамо анализом неких, из претходних разреда, вама познатих својстава реалних бројева, а по аналогији са онима успостављеним код једначина.

пример 1

Мира има више новца (у динарима) од Наде. а) Ако и једна и друга добију по 100 динара, ко ће имати више новца – Мира или Нада? б) Ако се и Мирина и Надина сума увећају 7 пута, ко ће имати више новца – Мира или Нада? в) Ако Ружа има више новца од Мире, ко има више – Ружа или Нада?

Решење:

Нека Мира има m, а Нада n динара. Из услова задатка је $m > n$.

а) Ако и Мира и Нада добију по 100 динара, онда ће Мира имати $m + 100$, а Нада $n + 100$ динара. Очигледно ће опет Мира имати више новца од Наде, тј. $m + 100 > n + 100$.

б) Ако се и Мирина и Надина сума увећају 7 пута, онда ће Мира имати $7m$, а Нада $7n$ динара. Очигледно ће опет Мира имати више новца од Наде, тј. $7m > 7n$.

в) Ако Ружа има p динара и ако Ружа има више новца од Мире, а Мира више новца од Наде, онда Ружа има више новца и од Наде, тј. из $p > m$ и $m > n$ следи и да је $p > n$.

Искуства из претходног примера, али и већ позната својства реалних бројева, говоре о следећим особинама свих реалних бројева, које илуструјемо за било које реалне бројеве a, b и c:

тврђење

(1) Ако је $a * b$, онда је $a + c * b + c$, и обрнуто: ако је $a + c * b + c$, онда је $a * b$ (особина сагласности неједнакости са сабирањем)

(2) Ако је $a * b$ и $c > 0$, онда је $a \cdot c * b \cdot c$, и обрнуто: ако је $a \cdot c * b \cdot c$, онда је $a * b$; (особина сагласности неједнакости са множењем позитивним бројем)

(3) Ако је $a * b$ и $b * c$, онда је и $a * c$. (особина преноса – транзитивности неједнакости)

Симбол * може бити било који од неједнакосних симбола: $>$, $<$, $\geq$, $\leq$.

пример 2

Реши неједначину: $3x - 4 > 2x + 7$ $(x \in R)$.

Решење:

Логично је да у решавању неједначине поступимо на начин сличан решавању једначина. У решавању ове неједначине опет ћемо користити модел теразија, тј. чињеницу да се успостављена неравнотежа теразија не нарушава ако и са једног и са другог таса скинемо (или додамо) једну те исту „масу".
Ако и на леву и на десну страну неједначине $3x - 4 > 2x + 7$ додамо „масу" (израз) $4 - 2x$ добија се неједначина: $3x - 4 + 4 - 2x > 2x + 7 + 4 - 2x$, тј. $3x - 2x > 7 + 4$. У следећем кораку добија се неједначина у решеном облику $x > 11$. Скуп решења дате неједначине је $S = (11, \infty)$.

Графички приказ решења неједначине је:

Напоменимо да смо код линеарних једначина углавном имали једно решење. Међутим, код линеарних неједначина, тј. одређивања бројева који задовољавају дату неједначину, добија се више бројева (најчешће бесконачно) који чине скуп решења дате неједначине. Скуп решења неједначине из Примера 2, тј. скуп свих бројева који дату неједначину преводе у тачну нумеричку неједнакост, записали смо у форми интервала и графички га приказали.

пример 3

Реши неједначину $\frac{2x + 5}{4} \leq 3$? Колико има природних бројева који задовољавају дату неједначину.

Решење:

$$\frac{2x + 5}{4} \leq 3$$

$$4 \cdot \frac{2x + 5}{4} \leq 3 \cdot 4 \qquad \text{(помножимо са 4 обе стране неједначине)}$$

$$2x + 5 \leq 12$$

$$2x + 5 - 5 \leq 12 - 5 \qquad \text{(одузмемо 5 од обе стране неједначине)}$$

$$2x \leq 7$$

$$x \leq \frac{7}{2}$$

Решење је интервал $x \in (-\infty, \frac{7}{2})$.

Природних бројева мањих или једнаких $\frac{7}{2}$ има само 3 и то су: 1, 2 и 3.

Претходни примери нас упућују и да дефинишемо још један важан појам везан за неједначине, а то је појам еквивалентних неједначина.

Неједначина N_1 еквивалентна је неједначини N_2, ако је скуп решења неједначине N_1 једнак скупу решења неједначине N_2, тј. $S(N_1) = S(N_2)$.

У смислу претходне дефиниције, све неједначине из Примера 2 су међусобно еквивалентне, и све неједначине из Примера 3 су међусобно еквивалентне неједначине.

Али неједначине $3x-4>2x+7$ и $\dfrac{2x+5}{4}\leq 3$ нису еквивалентне, јер је скуп решења прве неједначине: $S_1=(11,\infty)$, а скуп решења друге неједначине: $S_2=\left(-\infty,\dfrac{7}{2}\right)$.

пример 4

Да ли су еквивалентне неједначине $7a+17<3a+29$ и $\dfrac{10-8b}{7}+2>0$ $(a,b\in R)$?

Решење:

Решавањем датих неједначина добија се:

$7a+17<3a+29$

$7a<3a+29-17$, тј. $7a<3a+12$

$7a-3a<12$, тј. $4a<12$

$a<12:4$, тј. $a<3$

$S_1=(-\infty,3)$

$\dfrac{10-8b}{7}+2>0$

$10-8b+14>0$, тј. $24-8b>0$

$24-8b+8b>0+8b$, тј. $24>8b$

$3>b$, тј. $b<3$

$S_2=(-\infty,3)$

Како је $S_1=(-\infty,3)=S_2$ дате неједначине су еквивалентне.

пример 5

Да ли су неједначине $x+5>0$ и $|x|>-5$ еквивалентне $(x\in R)$?

Решење:

Решење неједначине $x+5>0$ је $x>-5$, па је скуп решења неједначине $S_1=(-5,\infty)$.
Решење неједначине $|x|>-5$ су сви реални бројеви, тј. $S_2=(-\infty,\infty)$.
Како је $S_1=(-\infty,3)\neq S_2=(-\infty,\infty)$, дате неједначине нису еквивалентне.

Како да препознамо линеарну неједначину?

Линеарна неједначина по непознатој x $(x\in R)$ је неједначина која има облик $ax * b$ (a и b су познати реални бројеви, а * је један од симбола $>, <, \geq, \leq$)

Ако искористимо претходну дефиницију, можемо закључити да су неједначине из примера 2, 3 и 4 линеарне.

пример 6

Одреди које од датих неједначина су линеарне: (N_1) $6x + 11 < 29$; (N_2) $7x^2 + 2x - 1 \geq 0$; (N_3) $11 - 12x \leq 13 + 14x$ $(x \in R)$?

Решење:

Неједначина (N_1) $6x + 11 < 29$ се своди на облик $6x < 29 - 11 = 18$, има облик $ax < b$ и линеарна је.

Неједначина (N_2) $7x^2 + 2x - 1 \geq 0$, има облик $7x^2 + 2x \geq 1$ и није линеарна.

Неједначина (N_3) $15x - 12 \leq 13 + 14x$, тј. $x \leq 25$, има облик $ax \leq b$ и линеарна је.

ЗАДАЦИ

133. Да ли су неједначине $x < 3$ $(x \in R)$ и $3 < x$ $(x \in R)$ еквивалентне?

134. Напиши бар једну неједначину која је еквивалентна са једначином $x \geq 10$ $(x \in R)$.

135. Дате су неједначине: (N_1) $5x + 12 < 32$ $(x \in R)$; (N_2) $7 - x > 4x + 37$ $(x \in R)$; (N_3) $2 - 7x < 10 - 9x$ $(x \in R)$. Које од њих су еквивалентне?

136. Да ли су еквивалентне неједначине $x \leq 0$ и $\frac{6}{x} \leq 0$ $(x \in R)$.

137. Да ли је неједначина $3y + 17 < 2y - 5$ $(y \in R)$ линеарна?

138. Напиши бар једну неједначину по x $(x \in R)$ која има скуп решења $S = (-\infty, 7)$.

139. Да ли су неједначине $x \geq 0$ и $x^2 \geq 0$ $(x \in R)$ еквивалентне?

140. Одреди скуп решења неједначине $x^2 + 19 > 0$ $(x \in R)$.

141. Напиши пример по једне неједначине чији скуп решења је: а) $S = R$, б) $S = \varnothing$.

142. Да ли неједначине $x + 3 > 0$ $(x \in R)$ и $\frac{x+3}{x^2} > 0$ $(x \in R)$ имају једнаке скупове решења?

3.12. Еквивалентне трансформације неједначина

У претходној лекцији поменули смо неке особине реалних бројева које чине да од дате неједначине добијемо еквивалентну неједначину, тј. неједначину која има исти скуп решења. Циљ ове наставне јединице јесте да укажемо на неке еквивалентне трансформације неједначина и на тај начин омогућимо једноставније решавање линеарних неједначина.

Видели смо да уравнотежене теразије подсећају на једначину, јер равнотежа левог и десног таса теразија, у ствари, представља једнакост $A = B$. Исто тако и неуравнотежене теразије представљају модел неједначине $A * B$ (* је један од неједнакосних симбола: $>$, $<$, $\geq$, $\leq$), јер је очигледно да се неравнотежа теразија неће нарушити ако и са левог и са десног таса теразија скинемо, или на оба таса додамо, једнаке „масе“.

Ако искуство са еквивалентним трансформацијама једначина пренесемо на неједначине, онда за решавање неједначина важе правила слична онима за једначине:

тврђење

Нека су A, B и C изрази, а * један од неједнакосних симбола: $<$, $>$, $\leq$, $\geq$. Тада важе тврђења:

(1) Ако је $A * B$, онда је $A + C * B + C$ и обрнуто: ако је $A + C * B + C$, онда је $A * B$.
(особина сагласности неједнакости са сабирањем)

(2) Ако је $A * B$ и $C > 0$, онда је $A \cdot C * B \cdot C$ и обрнуто: ако је $A \cdot C * B \cdot C$, онда је $A * B$;
(особина сагласности неједнакости са множењем позитивним бројем)

(3) Ако је $A * B$ и $B * C$, онда је и $A * C$.
(особина транзитивности неједнакости).

пример 1

Реши неједначину $8x - 15 > 5x - 3 (x \in R)$.

Решење:

$8x - 15 > 5x - 3$

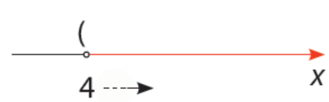
$8x - 15 + 15 - 5x > 5x - 3 + 15 - 5x$ (правило (1): додамо на обе стране $15 - 5x$)

$3x > 12$

$x > 4$ (правило (2): поделимо обе стране неједначине са 3)

Скуп решења неједначине је $S = (4, \infty)$.

Графички приказ решења неједначине је:



пример 2

Реши неједначину: $\frac{x}{3}-\frac{1}{2}\leq\frac{x}{5}-\frac{1}{4}$ $(x\in R)$.

Решење:

$\frac{x}{3}-\frac{1}{2}\leq\frac{x}{5}-\frac{1}{4}$

$60\left(\frac{x}{3}-\frac{1}{2}\right)\leq 60\left(\frac{x}{5}-\frac{1}{4}\right)$ (помножимо са НЗС (3, 2, 5, 4) = 60 обе стране)

$20x-30\leq 12x-15$

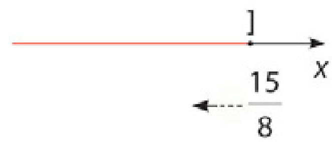
$20x-30+30-12x\leq 12x-15+30-12x$ (додамо $30-12x$ на обе стране)

$8x\leq 15$

$x\leq\frac{15}{8}$

Скуп решења неједначине је $S=(-\infty,\frac{15}{8}]$.

Графички приказ решења неједначине је:



Из претходних примера јасно је да решавање неједначина $A * B$ подразумева процес у коме се од полазне неједначине (N_1), применом еквивалентних алгебарских трансформација (1), (2), (3) добија низ еквивалентних неједначина (N_2), (N_3)... при чему је последња неједначина – неједначина у решеном облику $x * x_o$.

пример 3

Реши неједначину: $\frac{5y-3}{4}<6+y$ $(y\in R)$.

Решење:

Множењем са 4 дата неједначина $\frac{5y-3}{4}<6+y$ постаје:

$5y-3<4(6+y)$

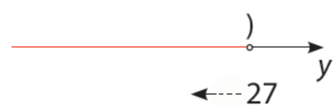
$5y-3<24+4y$

Ако и на леву и на десну страну неједнакости додамо израз $(3-4y)$, добија се:

$5y-3+3-4y<24+4y+3-4y$

$y<27$ или $y\in(-\infty,27)$.

Графички приказ решења неједначине је:



ЗАДАЦИ

143. Ако су x, y, z и a реални бројеви, реши неједначине:

а) $11x + 8 < 41$; **б)** $8y - 12 \geq 36$; **в)** $24 - 9z > 6$;

г) $5a \leq 75$; **д)** $6b : 7 \geq 18$.

144. Да ли су неједначине: $17m - 16 > 15m - 14$ $(m \in R)$ и $\frac{m}{2} - \frac{m}{7} \leq \frac{m}{6} - \frac{m}{5}$ $(m \in R)$ еквивалентне?

145. Докажи да су неједначине $\frac{9y - 11}{2} < 3y + 7$ $(y \in R)$ и $\frac{15y}{4} < 3$ $(y \in R)$ линеарне.

146. Да ли су неједначине: $-12x > 36$ $(x \in R)$ и $x > -3$ $(x \in R)$ еквивалентне?

147. Покажи да постоји бесконачно много линеарних неједначина еквивалентних са неједначином:

а) $-5x > 45$ $(x \in R)$; **б)** $6 - 4y \leq 2$ $(y \in R)$.

148. Увери се да постоји бесконачно много линеарних једначина чији је скуп решења интервал $[-7, \infty)$.

149. Да ли су еквивалентне неједначине:

а) $x \leq 2$ и $|x| \leq 2$ $(x \in R)$; **б)** $y \geq 7$ и $|y| \geq 7$ $(y \in R)$?

150. Напиши бар једну неједначину по непознатој x која у скуповима N, Z и R има једнаке скупове решења?

Решавање линераних неједначина 3.13.

У претходној лекцији смо видели како се применом еквивалентних трансформација (1), (2) и (3) од полазне неједначине (N_1), добија низ еквивалентних неједначина (N_2), (N_3)... при чему је последња неједначина – неједначина у решеном облику $x * x_o$. Решавање неједначине управо подразумева конструкцију поменутог низа еквивалентних неједначина и евентуалну проверу да ли добијено решење $x * x_o$ задовољава полазну неједначину (N_1).

Циљ ове лекције јесте да приказани поступак решавања линераних неједначина детаљније илуструје и упрости. За то је неопходно објаснити две нове еквивалентне трансформације неједначина које су последице већ познатих трансформација (1) и (2).

тврђење

(4) Нека су $A(x)$ и $B(x)$ изрази који садрже непознату x, а a и b су реални бројеви (константе).
Неједначина $A(x) + a * B(x) + b$ еквивалентна је са неједначином $A(x) - B(x) * b - a$.

Доказ овог тврђења је врло једноставан. Ако се у неједначини $A(x) + a * B(x) + b$ и на леву и на десну страну једнакости, а на основу правила о еквивалентним трансформацијама неједначина, дода израз $-a - B(x)$, добија се $A(x) + a - a - B(x) * B(x) + b - a - B(x)$, односно $A(x) - B(x) * b - a$.

Ова еквивалентна трансформација практично значи да се један сабирак (био он непозната или константа) са једне на другу страну неједначине „пребацује“ са супротним знаком.

пример 1

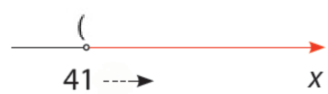
Реши неједначину $4(x - 5) > 3(x + 7)$ $(x \in R)$.

Решење:

$4(x - 5) > 3(x + 7)$
$4x - 20 > 3x + 21$
$4x - 3x > 21 + 20$ (применимо трансформацију (4))
$x > 41$

Скуп решења је $S = (41, \infty)$.

Графички приказ решења неједначине је:



Већ смо говорили о множењу неједнакости негативним бројем. У редовима који следе, формулисаћемо и доказати још једну еквивалентну трансформацију која говори о множењу неједнакости негативним бројем.

тврђење

(5) Нека су $A(x)$ и $B(x)$ изрази који садрже непознату x, а c је негативан реалан број.
Неједначина $A(x) < B(x)$ еквивалентна је са неједначином $c \cdot A(x) > c \cdot B(x)$.

Доказ овог тврђења је врло једноставан, јер ако је $c < 0$, онда је $-c > 0$. Ако се и лева и десна страна неједначине, на пример $A(x) < B(x)$ помножи позитивним бројем $(-c)$, на основу трансформације (2) добија се еквивалентна неједначина $(-c) \cdot A(x) < (-c) \cdot B(x)$. На основу трансформације (4), ова неједначина је еквивалентна са $c \cdot B(x) < c \cdot A(x)$, тј. неједначином $c \cdot A(x) > c \cdot B(x)$.

пример 2

Реши једначину: $18 - 5x > 3 - 2x$ $(x \in R)$.

Решење:

$18 - 5x > 3 - 2x$

$2x - 5x > 3 - 18$ (применимо трансформацију (4))

$-3x > -15$

$\left(-\frac{1}{3}\right)(-3x) < \left(-\frac{1}{3}\right)(-15)$ (трансформација (5): помножимо са $(-\frac{1}{3})$ обе стране)

$x < 5$

Скуп решења је $S = (-\infty, 5)$.

Графички приказ решења неједначине је:

пример 3

Реши једначину: $9(3y + 4) - 6(5y - 7) \leq 4(y + 11)$ $(x \in R)$.

Решење:

$9(3y + 1) - 6(5y - 7) \leq 4(y + 11)$

$27y + 9 - 30y + 42 \leq 4y + 44 - 3y + 51 \leq 4y + 44$

$-3y - 4y \leq 44 - 51$ (применимо трансформацију (4))

$-7y \leq -7$

$-7y : (-7) \geq -7 : (-7)$ (применимо трансформацију (5): поделимо са (-7) обе стране)

$y \geq 1$

Скуп решења је $S = [1, \infty)$

Графички приказ решења неједначине је:

пример 4

Реши неједначину: $\frac{9z}{8} - \frac{7}{6} > \frac{5z}{4} + \frac{3}{2}$ $(z \in R)$.

Решење:

$\frac{9z}{8} - \frac{7}{6} > \frac{5z}{4} + \frac{3}{2}$

$27z - 28 > 30z + 36$ (помножимо са НЗС(2, 4, 6, 8) = 24 обе стране неједначине)

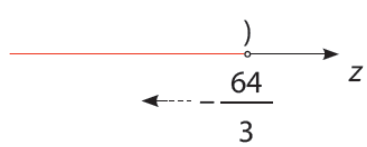
$27z - 30z > 36 + 28$

$-3z > 64$

$-3z : (-3) < 64 : (-3)$ (помножимо са (-3) обе стране неједначине)

$z < -\frac{64}{3}$

Скуп решења је $S = (-\infty, -\frac{64}{3})$, а графички приказ:



пример 5

Неједначину $(x-8)(x-5) \geq (x-7)(x-4)$ $(x \in R)$ трансформиши у линеарну и одреди њено решење $(x \in R)$.

Решење:

$(x-8)(x-5) \geq (x-7)(x-4)$

$x^2 - 8x - 5x + 40 \geq x^2 - 7x - 4x + 28$ (применимо трансформацију (4))

$-8x - 5x + 40 \geq -7x - 4x + 28$

$-8x - 5x + 7x + 4x \geq 28 - 40$

$-2x \geq -12$ (применимо трансформацију (5))

$-2x : (-2) \leq -12 : (-2)$

$x \leq 6$

Скуп решења неједначине је $S = (-\infty, 6]$.

Графички приказ решења неједначине је:

пример 6

Реши неједначину: $\frac{8}{y} \geq 4$ $(y \in R, y \neq 0)$.

Решење:

Ако је $y < 0$, онда је $\frac{8}{y} < 0$ и не може бити веће од 4.

Ако је $y > 0$, онда се применом трансформације (2) добија:

$y \cdot \frac{8}{y} \geq 4 \cdot y$

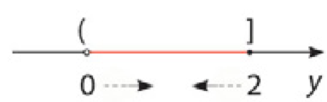
$8 \geq 4y$

$4y \leq 8$

Неједначина у решеном облику је $y \leq 2$ или $0 < y \leq 2$.

Скуп решења неједначине је $S = (0, 2]$.

Графички приказ решења неједначине је:



ЗАДАЦИ

151. Реши неједначине:

а) $x+5<9$; **б)** $y-3>14$; **в)** $6-z\leq 13$.

152. Одреди скуп решења неједначина:

а) $7m\geq 49$; **б)** $\frac{n}{3}<-6$.

153. Реши неједначине:

а) $5x+16<3x+8$; **б)** $51-7a\geq 9-a$; **в)** $6b+38>4-11b$.

154. Одреди скуп решења неједначина:

а) $5x-4\leq 21$; **б)** $27-4a>7$; **в)** $13\geq 1-3b$.

155. Реши неједначине:

а) $8x+13\geq 5x+46$; **б)** $2-9y>16-2y$; **в)** $5-(7a+66)\leq 4a+16$.

156. Одреди скуп решења неједначина:

а) $1-\frac{x}{5}>\frac{1}{8}$; **б)** $5+\frac{y}{3}\leq 8+\frac{y}{7}$; **в)** $\frac{z}{4}+6<2-\frac{z}{9}$.

157. Реши Тест 213, на електронској платформи *еЗбирка* (http://www.ezbirka.math.rs).

158. Напиши бар једну линеарну неједначину чији је скуп решења:

а) $(-5,\infty)$ $(x\in R)$; **б)** $(-\infty, 4]$ $(x\in R)$.

159. Реши неједначине:

а) $\frac{a+7}{5}>3a-7$; **б)** $1+b-\frac{7+b}{4}\geq\frac{3+b}{9}$; **в)** $1-c-\frac{1-3c}{6}<\frac{1-2c}{8}$.

160. Реши неједначине:

а) $\frac{a+3}{4}<2a-5$; **б)** $2+b-\frac{3+b}{4}>\frac{5+b}{6}$; **в)** $3-c-\frac{1-7c}{2}\geq\frac{1-3c}{5}$.

161. Реши неједначине:

а) $\frac{x}{3}-\frac{x}{4}\leq\frac{x}{5}+1$; **б)** $\frac{a}{5}-\frac{a+1}{4}<\frac{a}{3}-1$; **в)** $\frac{b-5}{5}-\frac{b-3}{6}>\frac{b-3}{3}+2$.

162. Одреди скуп решења неједначина:

а) $x(x + 2) \leq x^2 - 8$;

б) $(3y + 2)(3y - 2) > (3y + 1)^2$.

163. Одреди скуп решења неједначина:

а) $12x + 9 \leq 5x - 19$;

б) $2(x + 4)(2x - 3) < (4x - 1)(x + 1)$.

164. Реши неједначину:

а) $\frac{x}{3} - \frac{x}{4} < \frac{x}{5}$; **б)** $1 + y + \frac{1+y}{6} \geq \frac{1+y}{7}$; **в)** $1 - z - \frac{1-z}{8} > \frac{1-z}{9}$.

165. Одреди скуп решења неједначина:

а) $11x - 10 \leq 9x - 8 + 2x$;

б) $6x + 15 - 2x > 4x + 27$.

166. Реши неједначине и утврди која од њих нема решење, а која има бесконачно много решења:

а) $\frac{x-3}{5} - \frac{x-3}{2} \leq \frac{x-3}{10}$;

б) $x \cdot (x - 2) > x \cdot (2 + x) - 4x + 1$;

в) $(x - 5)^2 - (x + 4)^2 \geq 3 \cdot (5 - 6x)$;

г) $1 + \frac{x-2}{5} < 1 - \frac{x+2}{5}$.

167. Одреди скуп решења неједначина: $\frac{2x}{x} \geq 1$ и $\frac{x}{3x} < -1$ $(x \in R)$.

168. Реши неједначине:

а) $a^2 + 6a + 9 \leq 0$; **б)** $b^2 + 16 > 8b$; **в)** $2 < c^2 + 19 < 8$.

169. За које вредности реалног броја p је $\frac{28}{p} \leq -4$?

170. Одреди решење неједначине: $\left(\frac{x}{x-5}\right)^2 \geq 0$ $(x \in R)$.

171. Напиши пример неједначине која у скупу реалних бројева има тачно једно решење.

3.14. Примена линераних неједначина

Као и линеарне једначине, и линеарне неједначине имају широку примену у свакодневном животу, самој математици и другим наукама. Примери који следе имају циљ да прикажу неке од могућих примена линеарних неједначина.

пример 1

Водостај Саве тренутно је –120 cm. Колико река Сава највише може порасти, а да притом не дође до поплаве, ако је њена обала на коти 200 cm?

Решење:

Ако пораст водостаја у центиметрима означимо са x, онда је $-120 + x < 200$. Следи да је $x < 200 + 120 = 320$. Дакле, Сава може да нарасте највише до 320 cm.

пример 2

Колико литара вреле воде чија је температура 80°C треба помешати са 40 литара воде температуре 16°C да би температура мешавине била погодна за употребу и имала температуру између 22°C и 25°C ?

Решење:

Ако непознату количину воде означимо са x (литара), укупна количина воде биће $40 + x$.
Како је количина топлоте коју садрже свака појединачна компонента мешавине једнака количини топлоте мешавине, добија се неједначина:
$22 \cdot (40 + x) < 40 \cdot 16 + x \cdot 80 < 25 \cdot (40 + x)$

$880 + 22x < 640 + 80x < 1\,000 + 25x$ (добијају се две неједначине)

$880 - 640 < 80x - 22x$ $\qquad$ $640 + 80x < 1\,000 + 25x$

$240 < 58x$ $\qquad$ $55x < 360$

Следи: $240 : 58 < x < 360 : 55$

Потребно је $\dfrac{240}{58} < x < \dfrac{360}{55}$ литара воде.

пример 3

Цена збирке задатака из математике је паран број динара. Укупна цена 9 збирки је већа од 4 200, а мања од 4 300 динара, док је укупна цена 13 збирки већа од 6 000, а мања од 6 100 динара. Колика је цена једне збирке задатака?

Решење:

Нека је цена једне збирке задатака једнака z динара. Из услова задатка је

$4\,200 < 9z < 4\,300$ и $6\,000 < 13z < 6\,100$. Тада је $\dfrac{4\,200}{9} = 466\dfrac{6}{9} < z < \dfrac{4\,300}{9} = 477\dfrac{7}{9}$.

И тада је $\dfrac{6\,000}{13} = 461\dfrac{5}{13} < z < \dfrac{6\,000}{13} = 469\dfrac{3}{13}$.

Како је z природан број, то је: $466 < z < 469$.

Једини паран број који задовољава обе неједначине је $z = 468$.

пример 4

Одреди највећи од свих разломака који испуњавају следеће услове: бројилац и именилац разломка су природни бројеви; збир бројиоца и имениоца разломка је 101, а разломак је мањи од $\frac{1}{3}$.

Решење:

Именилац траженог разломка обележимо са y. Тада је бројилац тог разломка $101 - y$. Следи да је $\frac{101-y}{y} < \frac{1}{3}$. Како је y природан број, то је: $y > 0$, и тада се применом трансформације (2), тј. множењем са $3y$ добија $3(101 - y) < y$ или $303 - 3y < y$. Закључујемо да је $303 < y + 3y = 4y$.

Из претходне неједначине је: $y > \frac{303}{4} = 75\frac{3}{4}$. Разломак је највећи ако је бројилац што већи, а именилац што мањи. Најмањи именилац је $y = 76$. Зато је највећи од тражених разломака $\frac{25}{76}$.

ЗАДАЦИ

172. Колико има природних бројева x за које је: $3x - 18 < x + 26$?

173. Одреди најмањи цео број y такав да је: $7y + 3 > 2y - 11$.

174. Одреди све реалне бројеве који су већи од своје четвртине.

175. Збир пет узастопних природних бројева је већи од 2021. О којим бројевима је реч?

176. Реши Тест 214, на електронској платформи *еЗбирка* (http://www.ezbirka.math.rs).

177. Одреди највећи природан број x за који је $\frac{x}{3} + 4 < \frac{x}{7} + 9$.

178. Колико има целих бројева x таквих да је $3 < \frac{9-4x}{5} < 7$?

179. Одреди највећи цео број y који задовољава неједнакост $6{,}5 + 3y \leq 2 + y$.

180. Одреди све реалне бројеве r такве да је $5(r - 3) < r + 1$ и $1 - 4(r - 2) < -3$.

181. У скупу реалних бројева, реши неједначине:

а) $|2x-1| < -3$;

б) $|6x+12| \geq 0$;

в) $|x+1| > -7$.

182. Да ли постоје цели бројеви који истовремено испуњавају неједнакости: $x - 5 > 11$, $2x - 3 > 5$ и $3x + 7 < 70$?

183. Збир природног броја n и његове реципрочне вредности је мањи од 4. Колико таквих природних бројева n има?

184. Од пет тврђења:

1) $2x > 70$, **2)** $x < 100$, **3)** $3x > 25$, **4)** $x \geq 10$, **5)** $x > 5$

три су тачна, а два нетачна.
Одреди природан број x, ако проблем има јединствено решење.

185. Шест јабука лакше је од 5 дуња, а теже је од 10 кајсија. Шта је теже, 2 јабуке или 3 кајсије?

186. Реши Тест 215, на електронској платформи *еЗбирка* (http://www.ezbirka.math.rs).

187. У скупу реалних бројева, реши неједначине:

а) $|x| + |2x| < 9$;

б) $\left|x + |x|\right| \geq 0$;

в) $|5x| - |x| < 8$.

188. Одреди скуп решења неједначина, ако су x, y и z реални бројеви.

а) $\dfrac{x-3}{x^2} \leq 0$;

б) $\dfrac{y+5}{y^2+5} < 0$;

в) $\dfrac{17-z}{-z^2-4} > 0$.

Предлог задатака за додатни рад

1. Зашто једначине $\frac{x-2}{\sqrt{1-x}}=0$ и $x=2$ нису еквивалентне?

2. Реши једначину $\frac{x+3}{2015}+\frac{x+4}{2016}+\frac{x+5}{2017}=\frac{x+6}{2018}+\frac{x+7}{2019}+\frac{x+8}{2020}$.

3. Дата је једначина $a^2x-3=9x+a$ (x је непозната, a је реалан број). За које вредности реалног броја a једначина има бесконачно много решења? Када једначина има јединствено решење? Постоји ли вредност реалног броја a за коју једначина нема решења.

4. У кружиће у теменима петоугла $ABCDE$, редом распореди реалне бројеве тако да збирови бројева распоређених на страницама AB, BC, CD, DE и EA редом буду 1, 2, 3, 4 и 5.

5. Један подеок на Целзијусовој скали једнак је 1,8 подеока на Фаренхајтовој скали, при чему је 0°C једнако са 32°F. Постоји ли температура која је истим бројем изражена и на Целзијусовој и на Фаренхајтовој скали?

6. Колико је: а) 14°F у Целзијусовим степенима: б) колико је 10°C у Фаренхајтовим степенима?

7. Докажи да једначине: $a+5=3a+5-2a$ и $\frac{8a+24}{a+3}=8$, имају бесконачно много решења. Да ли су дате једначине еквивалентне?

8. Дате су једначине: $a^2-81=0$, $3a=27$, $|a|=9$ и $5-a=14-2a$. Које од датих једначина су еквивалентне?

9. Могу ли бити еквивалентне једна линеарна и једна квадратна једначина?

10. Користећи чињеницу да је једнакост $A\cdot B=0$ еквивалентна са $A=0$ или $B=0$, реши једначине:

а) $x^2-8x+12=0$; **б)** $y^2-7y+10=0$; **в)** $x^3=25x$; **г)** $(2y-1)(3y-2)(4y-3)=0$.

11. Користећи чињеницу да је једнакост $A:B=0$ еквивалентна са $A=0$ и $B\neq0$, реши једначине:

а) $\frac{x^2-9}{x-3}=0$; **б)** $\frac{y^3-y}{y+1}=0$; **в)** $\frac{z^2-16}{z^2+4}=0$.

12. Дате су једначине: $\frac{3x-12}{\sqrt{x^2-8x+16}}=3$, $x^2-49=(x+7)(x-7)$ и $\frac{|x-5|}{x-5}=1$.

Реши дате једначине и одреди које од њих су еквивалентне.

13. Дата је једначина $\frac{x^2-17x}{\sqrt{8-x}}=0$. У ком подскупу реалних бројева је дефинисана једначина? Одреди скуп решења једначине.

14. Одреди сва реална решења једначине $\frac{x(x^2-1)(x^2-4)}{x^2-|x|}=0$.

15. За које вредности реалног броја p једначина $3-\frac{x-p}{2}=x$ има целобројна решења која задовољавају неједнакост $|x|<2$?

16. Реши једначине:

а) $x^3 = 4x$; **б)** $x^3 + 21x = 10x^2$; **в)** $x^4 - 5x^2 + 4 = 0$.

17. Напиши бар једну једначину чија су решења: **а)** 7; **б)** 3 и 4; **в)** сви позитивни реални бројеви; **г)** сви реални бројеви мањи од 6.

18. Реши једначину: $\dfrac{2}{3 + \dfrac{4}{5 + x}} = 1$.

19. Ако Јагода позајми Нади 456 динара, онда ће имати једнаке суме новца. Ако Нада позајми Јагоди 456 динара, онда ће Јагода имати два пута више новца од Наде. Колико новца има Нада, а колико Јагода?

20. Тренутно је подне. У колико часова ће се први пут поново поклопити велика и мала казаљка на часовнику?

21. На складишту се налази 100 kg јагода које садрже 99% течних материја. После два дана, услед испаравања, влажност јагода је смањена на 98%. Колика је сада маса јагода?

22. У једној години у математички град се доселило n нових становника, а у другој се доселило још 300 нових становника. Притом се у првој години број становника повећао за 300%, а у другој за n%. Колико становника је било пре досељавања, а колико их има сада?

23. Реши неједначине:

а) $(x - 2)(x + 3) < 0$; **б)** $a^2 - 7a > 0$; **в)** $y^2 - 49 \leq 0$.

24. Одреди скуп решења неједначина:

а) $\dfrac{x-5}{x} \geq 0$; **б)** $1 + \dfrac{1}{x+3} < 1 + \dfrac{1}{x+1}$; **в)** $\dfrac{z+13}{z-4} > 1$.

25. Реши неједначину: $\dfrac{6}{x} \leq 3$.

26. Реши неједначине:

а) $a^2 + 6a + 9 \leq 0$; **б)** $b^3 > 16b$; **в)** $2 < c^2 + 19 < 23$.

27. Збир неколико реалних бројева је 10. Може ли збир њихових квадрата бити мањи од 1?

28. Одреди највећи од свих позитивних разломака, тако да је збир бројиоца и имениоца разломка 101, а разломак је мањи од $\dfrac{1}{3}$.

29. Одреди скуп решења неједначине $\dfrac{25 - x^2}{x^2 - 12x + 32} \geq 0$.

30. Реши неједначину $1 \leq \dfrac{3 + 2x}{x - 1} < 2$.

31. Одреди скуп решења неједначине $\dfrac{x^2 - 9}{x^2 - 7x + 12} < 8$.

32. Реши неједначину $x^2 - x + 1 < 0$.

33. Неједнакост $y^2 + y + 1 > 0$ важи за ма који реалан број y. Докажи.

34. Одреди реална решења једначине: $\sqrt{4 - (x + 1)^2 (x - 2)^2} = x^2 + 2x + 3$.

35. Одреди за које вредности броја m једначина $\dfrac{mx}{2} - 3 = 2(x - m)$ има негативно решење (x је непозната, а m је реалан број).

36. Реши неједначину: $2x + a > ax - 3$ (x је непозната; $a \in R$).

37. Ако 9 kg мандарина кошта мање од 10 евра, а 10 kg истих мандарина више од 11 евра, колико кошта 12 kg мандарина?

38. Дато је 19 тегова чије су масе 1 g, 2 g, 3 g... 19 g. Девет од њих су од сребра, девет од бронзе и само један тег је од злата. Познато је да је маса свих бронзаних тегова за 90 g већа од масе свих сребрних тегова. Одреди масу златног тега.

39. Одреди скуп решења једначине $|x-1| + x = |x+1|$.

40. Реши следеће једначине:

а) $|x| = 3$; **б)** $|x-1| = 5$; **в)** $|3x-12| = 2x-3$;
г) $|2x| + x = 6$; **д)** $|x| + |x-2| = 8$; **ђ)** $|x| - |x+1| = |x-2|$;
е) $||x+3| - x| = 7$; **ж)** $|x+3| - x = |x+9|$; **з)** $|x| + |x+1| + |x+2| = 9$.

41. Реши једначину: $|||||x| + x| + x| + x| + x| = 2\,020$.

42. Дата је једначина $||x-2|-1| = a$. За коју вредност параметра a једначина има највећи број решења?

43. Нека је $A = \sqrt{a+2\sqrt{a-1}} + \sqrt{a-2\sqrt{a-1}}$. Израчунај вредност израза A, ако је $1 \le a \le 2$.

44. Реши једначину: $|x^2 + 200| - |x^2 - 2x + 100| = 4\,122$.

45. Одреди скуп решења следећих једначина:

а) $\sqrt{x^2-6x+9} = 5$; **б)** $\sqrt{x^2} + \sqrt{x^2-2x+1} = 7$; **в)** $\sqrt{x^2+8x+16} = \sqrt{x^2-4x+4}$.

46. Реши једначину: $|x - |x - |x||| = 123$.

47. Реши следеће неједначине

а) $|2x| < 14$; **б)** $|3x-2| > 1$; **в)** $|4x-12| < 3x-2$;
г) $|5x| + x > 12$; **д)** $|6x| + |7x-2| < 11$; **ђ)** $|x-1| + |x+1| > 2x$;
е) $||x+3| - x| < 9$; **ж)** $|x+19| - x > |x+7|$; **з)** $|2x| + |3x+1| - |x+2| < 15$;
и) $|x + |x-1|| > |x - 2 + |x+1||$.

48. Реши неједначине:

а) $\sqrt{x^2-10x+25} - |x| < 5$; **б)** $\sqrt{4x^2-12x+9} > |x| + 2x - 3$.

49. Колико решења има једначина: $\sqrt{x^2 - 8x + 16} + \sqrt{(2x-6)^2} = 0$?

50. Колико решења има једначина: $|x + |2x + |4x||| = 28$?

51. Докажи да једначина $|2 - |1 - |x||| = 1$ има пет реалних решења.

52. Одреди најмањи реалан број A такав да за било који реалан број x, за који је $|x-2| < 0{,}04$, важи да је $|x^2 - 5| < A$.

53. На кружници је написано 9 реалних бројева чији је збир 1. Сваки од написаних бројева једнак је апсолутној вредности разлике два следећа броја, гледајући у смеру казаљки на часовнику. Одреди те бројеве.

54. У теменима коцке су написани су бројеви 1, 2, 3… 7, 8, а на свакој ивици апсолутна вредност разлике бројева који су уписани на крајевима те ивице. Колико најмање различитих бројева може бити написано на ивицама коцке?

Питалице

1.	Да ли је једнакост $8 \cdot 9 = 100 - 56 : 2$ једначина?	да	не
2.	Једначина $2x + 3y = 12$ има две непознате.	да	не
3.	Број 7 је решење једначине $8x + 4 = 63$.	да	не
4.	Једначине $5y = 25$ и $60 : y = 12$ су еквивалентне.	да	не
5.	Да ли је једначина $-17a = 2021$ линеарна?	да	не
6.	Једначина $3x = 4x - x$ нема решења.	да	не
7.	Да ли једначина $12x = 5x - 6 + 7x$ има бесконачно много решења?	да	не
8.	Неједнакост $5y + 6 < 7y + 8$ је неједначина.	да	не
9.	Неједначина $4x > 19$ није линеарна	да	не
10.	Да ли су неједначине $5y > 35$ и $56 < 8y$ еквивалентне?	да	не
11.	Ако је $A = 7 - 3$ и $B = 2x + 4$, онда је $A = B$ једначина.	да	не
12.	Једначина $a + 2b - 3c = 75$ има две непознате.	да	не
13.	Број -5 је решење једначине $x + 7 = 2x + 12$.	да	не
14.	Да ли су еквивалентне једначине $y - 10 = 0$ и $y^2 = 100$?	да	не
15.	Да ли једначина $6y - 7 = y + 3$ има јединствено решење?	да	не
16.	Једначина $24x + 17 = 10x + 17 + 14x$ има више од 10 решења.	да	не
17.	Да ли је једначина $13y - 5 = 8 + 13y$ немогућа?	да	не
18.	Неједначина $x^2 + 5 > 0$ нема решења.	да	не
19.	Скуп решења неједначине $9x + 5 > 2x + 3 + 7x$ је $S = (-\infty, \infty)$.	да	не
20.	Неједначина $3x \geq 2x - 18 + x$ нема решења.	да	не
21.	Једначина $ax = 0$ има јединствено решење $x = 0$, ако је $a \neq 0$.	да	не
22.	Скуп решења једначине $4y^2 = 36$ је скуп $S = \{3\}$.	да	не
23.	Једначине $x = -6$ и $x = 6$ су еквивалентне.	да	не
24.	Једнакост $(a + 8)(a - 8) = a^2 - 64$ је идентитет.	да	не
25.	Једначина облика $0 \cdot x + 17 = 0$ је немогућа једначина.	да	не
26.	Скуп решења неједначине $5y^2 + 4 > 3$ је $S = (-\infty, \infty)$.	да	не
27.	Неједначина $23y^4 \leq 0$ има јединствено решење.	да	не
28.	Неједначина $x^2 + 5 < 4$ има два решења.	да	не

Предлог теста знања

1. Користећи стрелице, повежи дате појмове са одговарајућим једнакосним формулама:

бројевна једнакост •	• $3x + 4 = 5x - 6$
једначина •	• $y^2 - 25 = (y + 5)(y - 5)$
идентитет •	• $17 - 3 = 18 : 2 + 5$

2. Решење једначине $11(x - 5) = 6(x + 10)$ је

(А) 12 **(Б)** 14, 5 **(В)** 17,6 **(Г)** 20 **(Д)** 239

3. Ако је y решење неједначине $3y - 4 > 5y + 6$, онда је

(А) $y > 5$ **(Б)** $y < 5$ **(В)** $y > -5$ **(Г)** $y < -5$ **(Д)** $y \geq 5$

4. Решење једначине $\frac{x}{2} + 3 = \frac{4x + 15}{5} - 6$ припада интервалу:

(А) $(11, 18)$ **(Б)** $[17, 24]$ **(В)** $(7, 15]$ **(Г)** $[13, 20)$ **(Д)** $(24, 30)$

5. Скуп решења неједначине $3(y + 30) \geq 7(y + 10) - 4(y - 5)$ је:

(А) $(-\infty, \infty)$ **(Б)** $[20, \infty)$ **(В)** $(-\infty, 20]$ **(Г)** $\varnothing$ **(Д)** $(10, 20)$

6. Колико има природних бројева n таквих да је $33 < 5n + 6 < 99$?

(А) 12 **(Б)** 13 **(В)** 14 **(Г)** 15 **(Д)**16

7. Маратонац Марко живи у Ваљеву и за један сат претрчи 15 km, а бициклиста Богдан живи у Шапцу и за један сат пређе 30 km. Њих двојица су кренули један другом у сусрет. Растојање од Ваљева до Шапца је 60 km. После ког времена су се срели Марко и Богдан, ако је Марко кренуо из Ваљева, а Богдан из Шапца?

(А) 60 минута **(Б)**70 минута **(В)** 80 минута **(Г)** 90 минута **(Д)** 100 минута

8. Колико литара чисте дестиловане воде треба помешати са 40 литара 50%-тног раствора алкохола, да би се добио 20%-тни раствор алкохола?

(А) 30 **(Б)** 40 **(В)** 50 **(Г)** 60 **(Д)** 70

Предлог контролне вежбе

3.1.	Реши једначину $\frac{x}{2}+7=2x-8$.	**15**
3.2.	Реши једначину $(y-1)(y+5)=(y+3)(y-3)$.	**20**
3.3.	Реши једначину $\frac{1}{2x}+\frac{4}{3x}=\frac{6}{5x}$.	**25**
3.4.	Реши неједначину $7(y-1)<9y+5$.	**15**
3.5.	Реши неједначину $\frac{x}{2}+7>\frac{2x+5}{3}-\frac{1}{6}$.	**20**
3.6.	Реши неједначину $\frac{x-8}{\sqrt{x-13}}\geq 0$.	**25**
3.7.	Обим правоугаоника је 128 cm. Колика је површина правоугаоника, ако је дужина правоугаоника за 10 cm већа од његове ширине?	**15**
3.8.	Марко је првог дана прочитао четвртину књиге, другог дана трећину књиге, а трећег дана преосталих 35 страница. Колико страница има та књига?	**20**
3.9.	Разлика два броја је 13,86. Ако се у већем броју децимални зарез, помери за једно место у лево, добија се мањи број. Колики је збир тих бројева?	**25**
3.10.	Колико има природних бројева чија четвртина је мања од 1,7?	**15**
3.11.	Колико има целих бројева n, таквих да је $-23<7n-12\leq 16$?	**20**
3.12.	Колико највише узастопних природних бројева се може сабрати да би се добио збир мањи од 200?	**25**

4 ПРИЗМА

задатак

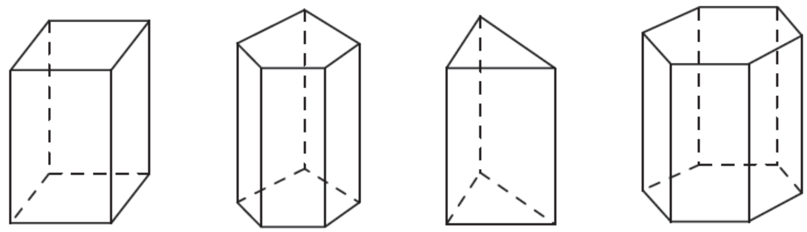
Базен за купање има дужину 50 m и ширину 25 m. Дубина базена је на почетку 2 m, а затим се поступно смањује, и на крају базена је 1 m. Колико литара воде је потребно да се напуни тај базен?

4.1. Појам, врсте и елементи

Реч призма је грчког порекла (πριζμα – prisma), а значи *отесан*.

пример 1

На слици су дати примери полиедара који су призме.



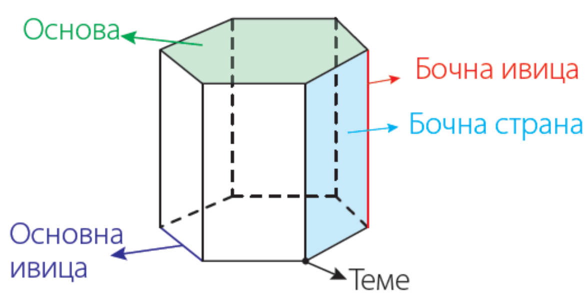
Призма је полиедар чију површ чине два подударна n-тоугла која се налазе у паралелним различитим равнима и n паралелограма ($n \in N$).

Подударни многоуглови који су у паралелним равнима, називају се **основе призме** (**базе призме**), а паралелограми се називају **бочне стране призме.** Унија бочних страна призме назива се **омотач призме.**

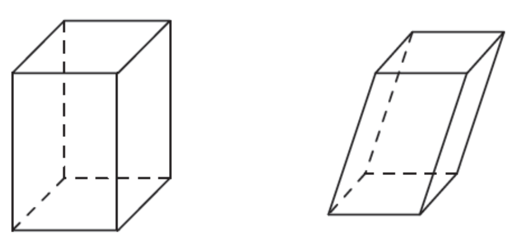
Странице основа призме називају се **основне ивице**, темена многоуглова су **темена призме**, а ивице бочних страна које нису основне називају се **бочне ивице**.

Растојање равни основа призме назива се **висина призме.**

Елементе призме означили смо на следећој скици, при чему подсећамо да испрекиданом линијом обележавамо невидљиве ивице.



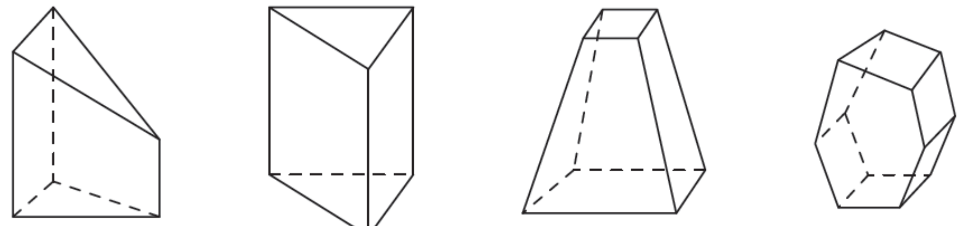
Призма може бити **права** (**усправна**) и **коса призма**. Уколико су бочне ивице нормалне на равни основа, призма је права (усправна). Уколико бочне ивице нису нормалне на раван основе, призма је коса. Дужина бочне ивице праве (усправне) призме једнака је висини призме. Ми ћемо се у овом поглављу бавити искључиво правим призмама.



Права призма Коса призма

пример 2

На слици су дати примери полиедара. Који од њих су призме?



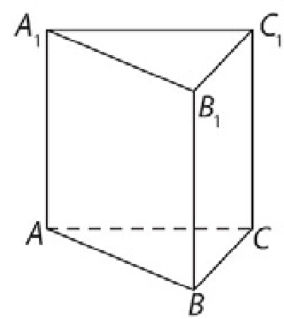
а) б) в) г)

Решење:

Слике б) и г) представљају скице призми.

пример 3

На слици је дата призма. Наброј основе, бочне стране, темена, основне ивице и бочне ивице ове призме.



Решење:

Основе призме су троуглови ABC и $A_1B_1C_1$, бочне стране четвороуглови ABB_1A_1, BCC_1B_1 и CAA_1C_1 . Темена призме су $A, B, C, D, A_1, B_1, C_1, D_1$, основне ивице $AB, BC, CA, A_1B_1, B_1C_1, C_1A_1$, а бочне ивице AA_1, BB_1, CC_1.

Број страница многоуглова који су основе призме одређују њен назив. Ако су основе троуглови, призма је тространа, ако су четвороуглови, призма је четворострана итд.

Права призма чије су основе правилни многоуглови назива се **правилна призма.**

Права призма чије су све ивице једнаких дужина назива се **једнакоивична призма.**

Права призма чија је основа једнакостраничан троугао назива се **правилна тространа призма.**

Права призма чија је основа квадрат назива се **правилна четворострана призма.**

Права призма чија је основа правилан шестоугао назива се **правилна шестострана призма.**

Правилна једнакоивична четворострана призма назива се **коцка.** (Све стране су квадрати.)

Права четворострана призма чија је основа правоугаоник назива се **квадар.**

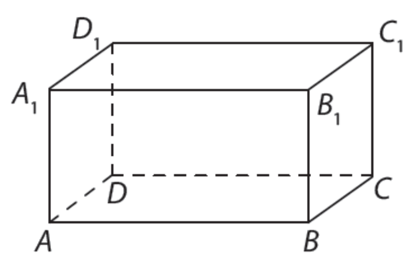
Призма чија је основа паралелограм назива се **паралелепипед.**

пример 4

На слици је квадар. Наброј његове стране.

Решење:

Стране квадра су правоугаоници $ABCD$, $A_1B_1C_1D_1$, ABB_1A_1, BCC_1B_1, CC_1D_1D, ADD_1A_1.



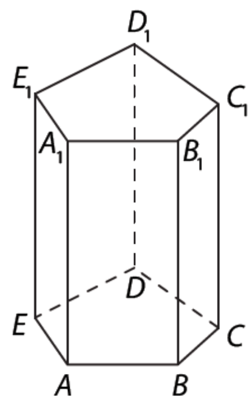
ЗАДАЦИ

1. Може ли призма да има четири:
а) темена; б) ивице; в) стране?

2. Бочне стране праве призме су увек:

а) квадрати; б) правоугаоници; в) једнакокраки трапези;
Заокружи слово испред тачног одговора.

3. Наброј све основне ивице и све бочне ивице призме са слике.



4. Одреди број темена, ивица, страна праве шестостране призме.

5. Одреди број основних ивица праве призме која има 4 бочне ивице.

6. Попуни табелу:

Призма	Петострана	Шестострана	Деветострана	Десетострана	*n*-тострана
Број основа					
Број бочних страна					
Број страна					
Број основних ивица					
Број бочних ивица					
Број ивица					

7. Страхиња је купио поклон својој сестри и запаковао га у кутију облика квадра чије су ивице 30 cm, 24 cm, 15 cm.
Колика је дужина траке којом је кутија везана, као на слици, ако је за машну потребно још 50 cm траке?

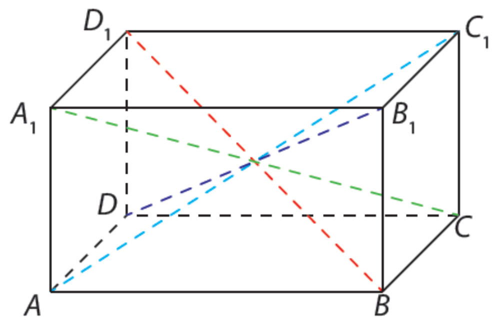
4.2. Дијагонале призме и дијагонални пресеци призме

Дуж одређена теменима која не припадају истој страни призме назива се дијагонала призме.

У даљем тексту ћемо, ради лакшег изражавања, под „одредити (израчунати) дијагоналу (ивицу)" и слично, подразумевати одређивање дужина тих дужи.

пример 1

Наброј дијагонале квадра $ABCDA_1B_1C_1D_1$.

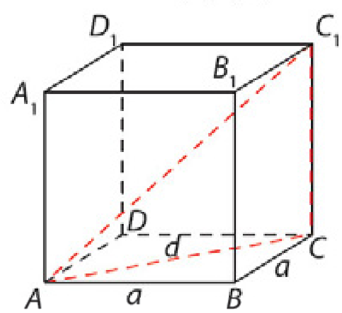


Решење:

Дијагонале квадра су AC_1, BD_1, CA_1, DB_1.

пример 2

Одреди дужину дијагонале коцке $ABCDA_1B_1C_1D_1$ ивице 10 cm.



Решење:

Дужина дијагонале основе коцке је $AC = d = 10\sqrt{2}$ cm. Из правоуглог троугла ACC_1 израчунаћемо дијагоналу коцке:

$$D^2 = d^2 + a^2 = (10\sqrt{2})^2 + (10)^2 = 200 + 100 = 300,\ D = \sqrt{300} = \sqrt{100 \cdot 3} = 10\sqrt{3},\ D = 10\sqrt{3}\text{ cm.}$$

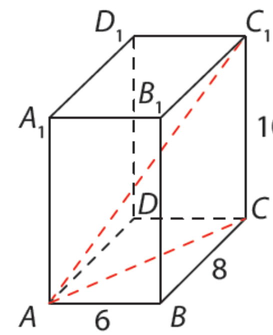
тврђење

Ако је a ивица коцке, тада је њена дијагонала $D = a\sqrt{3}$.

пример 3

На основу података са слике, израчунај дужину дијагонале квадра.

Решење:



Уочимо дијагоналу AC_1. Најпре ћемо из правоуглог троугла ABC израчунати дијагоналу основе AC, $AC^2 = AB^2 + BC^2$, тј. $AC^2 = 6^2 + 8^2$, $AC = 10$ cm. Из правоуглог троугла ACC_1 следи да је $AC_1{}^2 = AC^2 + CC_1{}^2$,
односно $AC_1{}^2 = 10^2 + 10^2$, $AC_1 = \sqrt{200}$, $AC_1 = 10\sqrt{2}$.

Све дијагонале квадра су међусобно једнаке.

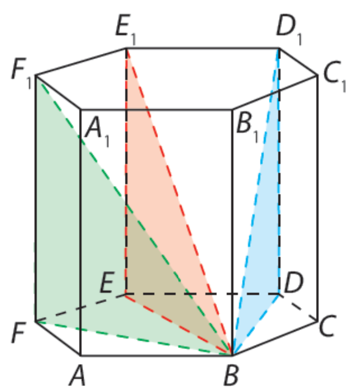
тврђење

Ако су a, b, c ивице квадра, тада је дужина дијагонале квадра $D = \sqrt{a^2 + b^2 + c^2}$.

Дијагонала праве призме је хипотенуза правоуглог троугла чија је једна катета дијагонала основе, а друга катета је бочна ивица (висина призме).

пример 4

Одреди дијагонале из једног темена правилне шестостране призме чија је основна ивица 6 cm, а висина 12 cm.

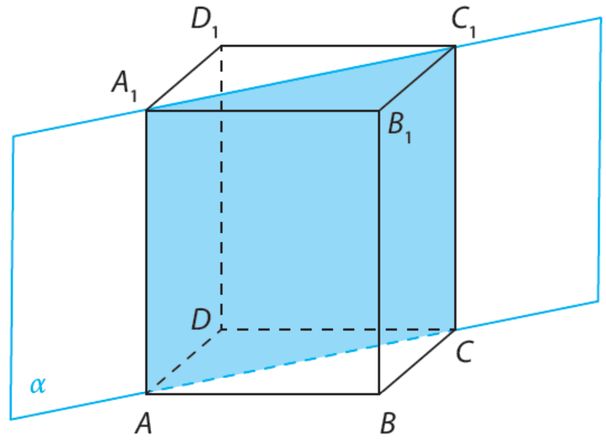


Решење:

На слици је дата призма: $ABCDEFA_1B_1C_1D_1E_1F_1$. Уочимо њене дијагонале из темена B: BD_1, BE_1 и BF_1. Дијагонале BD_1 и BF_1 су једнаке (због подударности троуглова BDD_1 и BFF_1), а дијагонала BE_1 се разликује од њих.

Троугао BEE_1 је правоугли при чему је $BE = 2a = 12$ cm дужа дијагонала основе. Применом Питагорине теореме на тај троугао, следи
$BE_1{}^2 = BE^2 + EE_1{}^2$, $BE_1{}^2 = 12^2 + 12^2 = 288$, $BE_1 = \sqrt{288}$ cm $= 12\sqrt{2}$ cm.

Троугао BDD_1 је правоугли при чему је $BD = a\sqrt{3} = 6\sqrt{3}$ cm краћа дијагонала основе. Применом Питагорине теореме добијамо
$BD_1{}^2 = BD^2 + DD_1{}^2$, $BD_1{}^2 = (6\sqrt{3})^2 + 12^2 = 252$, $BD_1 = \sqrt{252}$,
$BD_1 = 6\sqrt{7}$ cm $= BF_1$.



Пресек праве призме и равни α која је одређена двема несуседним бочним ивицама призме назива се дијагонални пресек праве призме.

Дијагонални пресек праве призме је правоугаоник. Две странице дијагоналног пресека су одговарајуће дијагонале основа, а друге две странице су бочне ивице призме.

пример 5

Дата је правилна четворострана призма $ABCDA_1B_1C_1D_1$ чија је основна ивица 8 cm, бочна ивица 15 cm. Израчунај површину њеног дијагоналног пресека.

Решење:

Дијагонални пресек призме је правоугаоник ACC_1A_1 (Види претходну слику!), чије су странице $AC = a\sqrt{2} = 8\sqrt{2}$ cm и $CC_1 = 15$ cm, па је његова површина једнака $P = AC \cdot CC_1 = 120\sqrt{2}$ cm².

пример 6

Израчунај површине дијагоналних пресека правилне шестостране призме чија је основна ивица 6 cm, а бочна ивица 10 cm.

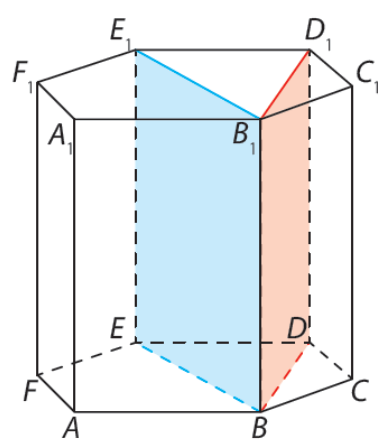
Решење:

Правилан шестоугао има дијагонале различитих дужина. Дакле, и призма ће имати дијагоналне пресеке различитих површина.

Нека је $ABCDEFA_1B_1C_1D_1E_1F_1$ правилна шестострана призма. $BE = 2a = 12$ cm је дужа дијагонала основе. Површину већег дијагоналног пресека израчунавамо као површину правоугаоника страница BE (дужа дијагонале основе) и BB_1(висина), па је његова површина једнака $P = 12\text{ cm} \cdot 10\text{ cm} = 120\text{ cm}^2$.

Слично и за мањи дијагонални пресек, $BD = a\sqrt{3} = 6\sqrt{3}$ cm је краћа дијагонала основе. Површину мањег дијагоналног пресека рачунамо као површину правоугаоника са страницама BD (краћа дијагонале основе) и BB_1(висина). Површина мањег дијагоналног пресека је

$P = 6\sqrt{3}\text{ cm} \cdot 10\text{ cm} = 60\sqrt{3}\text{ cm}^2$.



ЗАДАЦИ

8. Да ли висина призме може бити једнака дијагонали призме?

9. Да ли висина призме може бити већа од дужине:

а) основне; б) бочне ивице?

10. Заокружи слово испред следећих реченица које су тачне.

а) Све призме имају дијагонале основа.

б) Све правилне призме имају дијагонале основа.

в) Све призме имају дијагонале бочних страна.

г) Све призме имају дијагонале.

д) Све правилне призме имају дијагонале.

11. Израчунај дијагоналу коцке чија је ивица: а) 4 cm; б) $4\sqrt{3}$ cm; в) x.

12. Израчунај дијагоналу коцке ако је дијагонала једне њене стране $8\sqrt{2}$ cm.

13. Ако је површина дијагоналног пресека коцке $144\sqrt{2}$ cm^2, израчунај њену дијагоналу.

14. Израчунај дијагоналу квадра чије су ивице 12 cm, 4 cm и 3 cm.

15. Израчунај површину дијагоналног пресека праве четворостране призме чија је основа правоугаоник страница 8 cm и 6 cm и њена бочна ивица 5 cm.

16. Површина мањег дијагоналног пресека правилне шестостране једнакоивичне призме је $36\sqrt{3}$ cm^2. Израчунај основну ивицу те призме.

17. Дата је правилна шестострана призма, чија је основна ивица 8 cm, висина 15 cm. Израчунај:

а) дијагонале основе призме;

б) дијагоналу бочне стране призме;

в) дијагонале те призме.

18. Да ли призма може имати непаран број дијагонала?

19. Дужа дијагонала правилне шестостране призме је 20 cm и нагнута је према равни основе под углом од 60°. Израчунај основну ивицу и висину те призме.

20. Краћа дијагонала правилне шестостране призме дужине 24 cm нагнута је према равни основе под углом од 30°. Израчунај основну ивицу и висину те призме.

21. Дијагонални пресек правилне четворостране призме је квадрат чија је површина 50 cm^2. Израчунај дијагоналу те призме.

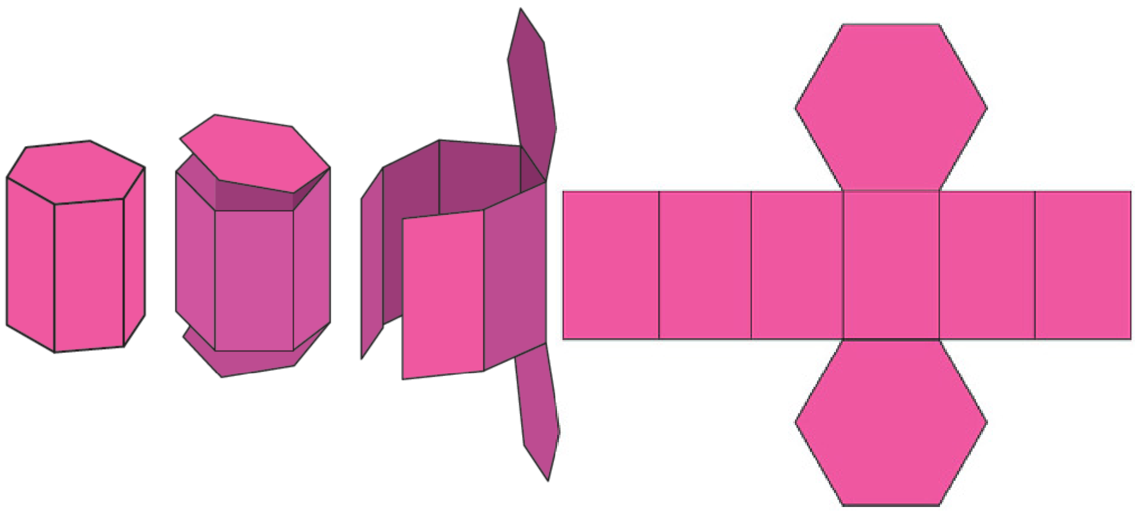
22. Дијагонала правилне четворостране призме дужине 12 cm гради са равни основе угао од 60°. Израчунај основну ивицу и висину те призме.

Мрежа призме 4.3.

Основни елементи призме су темена, ивице, стране. За уочавање и повезивање ових елемената и нешто детаљније сагледавање тела, корисно је да направимо модел и нацртамо одговарајућу слику тог модела.

Површ призме смештена (развијена) у раван назива се мрежа призме.

Низ слика нам илуструје како настаје мрежа шестостране призме.

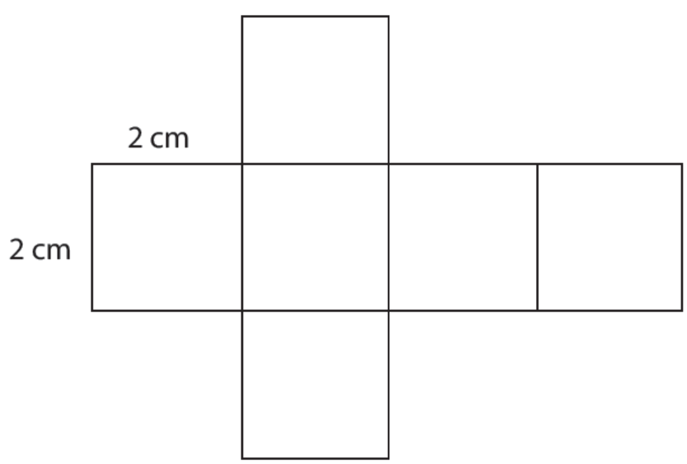


Из мреже се савијањем и лепљењем може направити модел призме.

пример 1

Развиј у мрежу површ коцке ивице 2 cm.

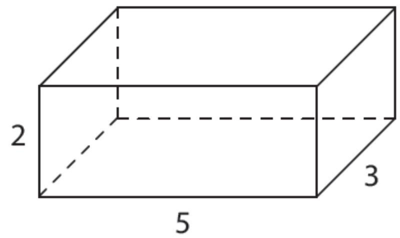
Решење:



Једно од могућих решења приказано је на слици.

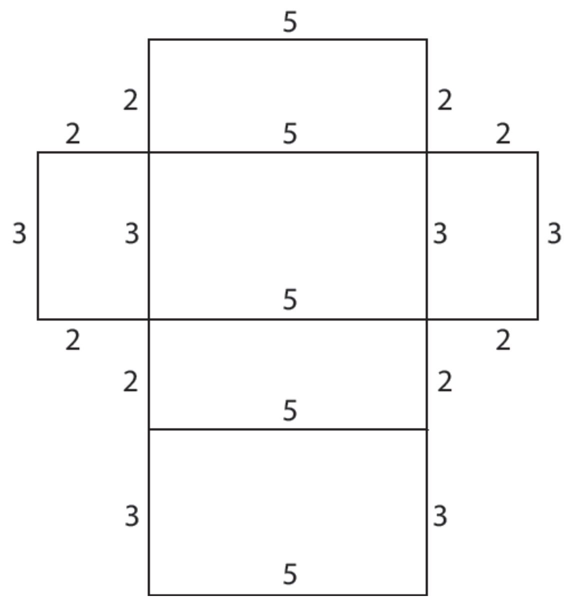
пример 2

Конструиши мрежу квадра на основу података са слике.



Решење:

На слици је приказана мрежа квадра. Стране квадра су три пара подударних правоугаоника.



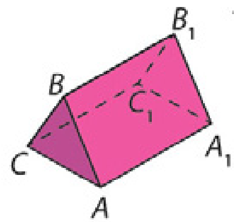
пример 3

Развиј у мрежу површ правилне тростране призме чија је основна ивица 2 cm и висина 3 cm.

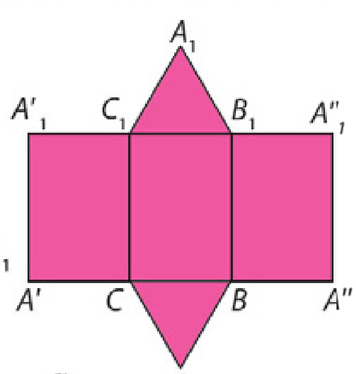
Решење:

Нека је: $ABCA_1B_1C_1$ дата призма (слика а). Мрежа може да се конструише на више начина. Приказана су два.

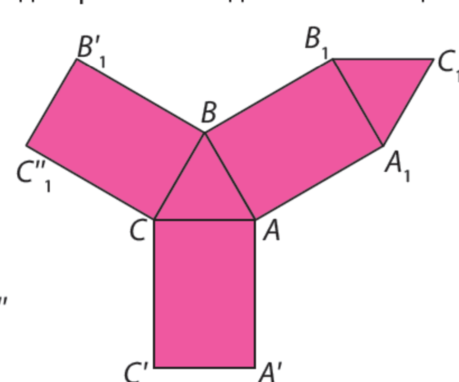
Ако призму разрежемо дуж бочне ивице AA_1 и основних ивица AB, AC, A_1B_1, A_1C_1, тада мрежа изгледа као на слици под б. Ако дату призму разрежемо дуж свих бочних ивица и основних ивица AB и AC, тада мрежа изгледа као на слици под в.



а)



б)

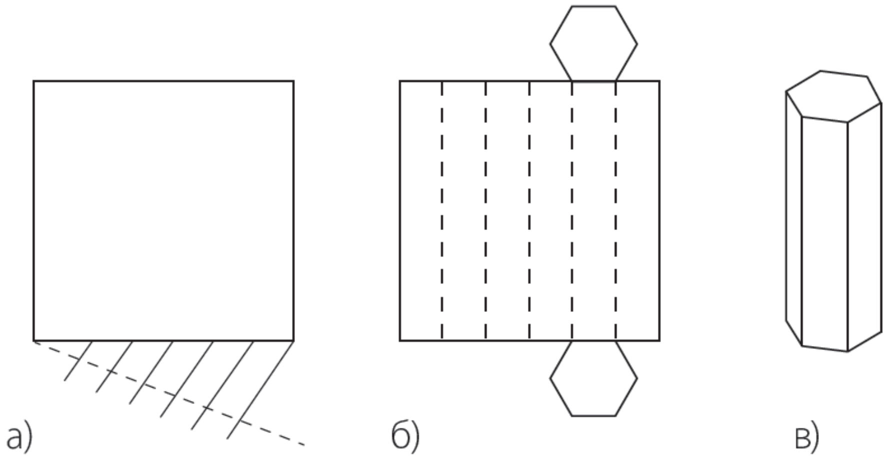


в)

пример 4

Нека је развијени омотач правилне шестостране призме квадрат чија је страница 10 cm. Конструиши мрежу те призме.

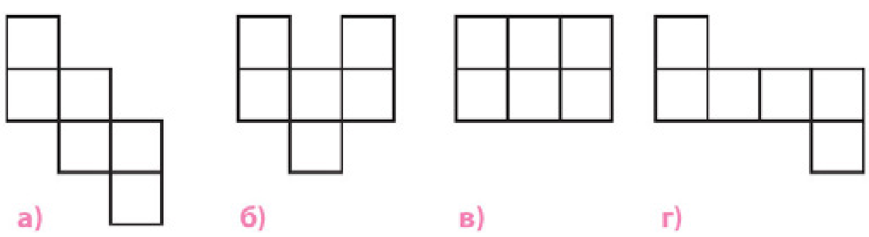
Решење:



Ако је развијени омотач призме квадрат, тада је збир свих основних ивица призме једнак бочној ивици. Једну страницу квадрата поделимо на шест једнаких делова (слика под а), односно квадрат поделимо на шест подударних правоугаоника (сваки је подударан са по једном бочном страном призме (слика под б). Са две наспрамне стране квадрата, ван области квадрата, конструишемо правилне шестоуглове (основе призме). На слици под в приказан је модел те призме.

ЗАДАЦИ

23. Заокружи слово поред слике на којој је приказана мрежа коцке.



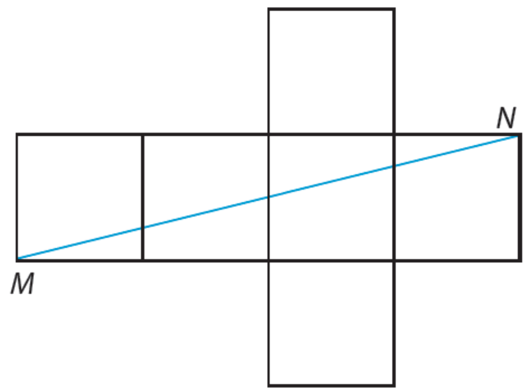
24. Конструиши мрежу квадра чије су ивице 2,5 cm, 3,5 cm, 5 cm.

25. Конструиши мрежу правилне четворостране призме ако је основна ивица 3 cm, а бочна ивица 5 cm.

26. Констуиши мрежу правилне тростране призме ако је основна ивица 3 cm, а бочна ивица 5 cm.

27. Конструиши мрежу праве тростране призме чија је основа једнакокраки троугао. Основне ивице су 2 cm и 4 cm. Висина призме је 4 cm.

28. На слици је дата мрежа коцке. Ако је дужина дужи $MN = 17$ cm, одреди ивицу коцке.



29. Квадрат странице 12 cm чини развијени омотач:

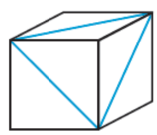
а) правилне четворостране призме;

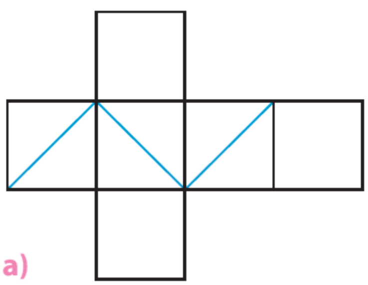
б) правилне тростране призме;

в) правилне шестостране призме.

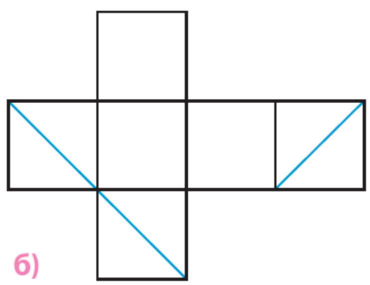
Конструиши мрежу и израчунај дужину основне ивице призме.

30. На три суседне стране коцке нацртане су дијагонале. Која од следећих мрежа је мрежа дате коцке?

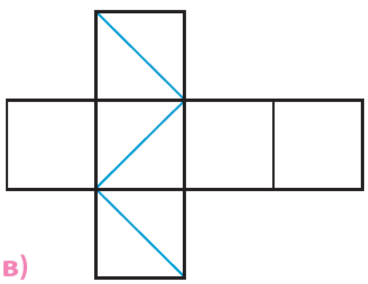




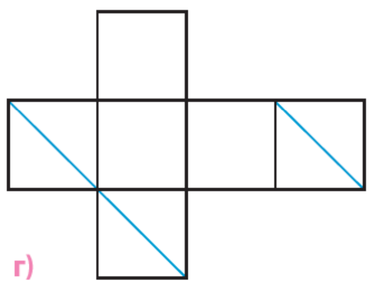
а)



б)



в)

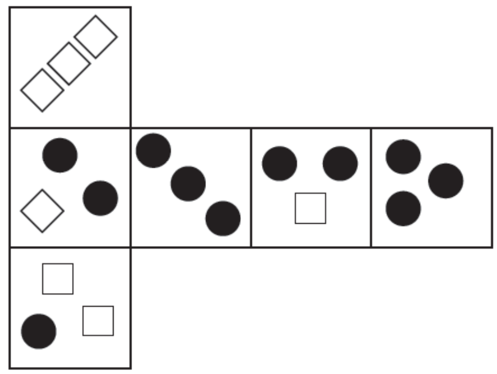


г)

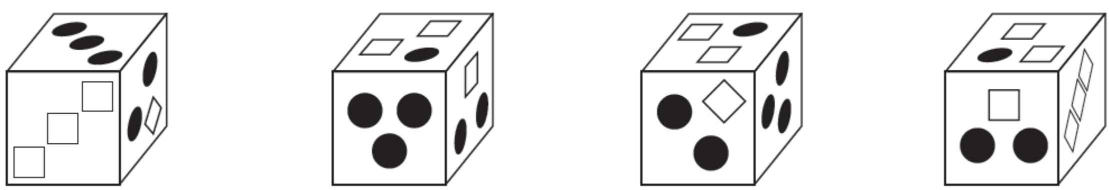
31. Дата је мрежа коцке за игру:

Која од приказаних коцки одговара овој мрежи?

Заокружи слово испод одговарајуће слике.



а) б) в) г)



32. Конструиши мрежу правилне једнакоивичне шестостране призме ако је:

а) ивица 3,5 cm;

б) дужа дијагонала основе 5 cm;

в) дијагонала бочне стране 6 cm.

33. Конструиши мрежу усправне четворостране призме $ABCDA_1B_1C_1D_1$ чија је основа једнакокраки трапез. Основне ивице су $AB = 4$ cm, $BC = CD = AD = 2$ cm. Највећа бочна страна је квадрат.

4.4. Површина праве призме и праве четворостране призме

Збир површина страна призме једнак је површини призме.

Ако са B обележимо површину једне основе призме, а са M површину омотача призме, а са P површину призме, тада је површина призме:

$$P = 2B + M$$

тврђење

Нека су a, b, c дужине ивица квадра, површина квадра се израчунава

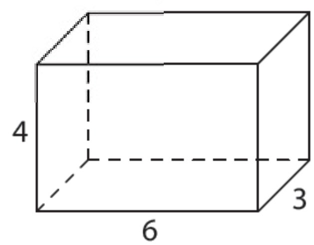
$$P = 2ab + 2bc + 2ac.$$

Ако су на пример a и b основне ивице, а c бочна ивица квадра, тада је

$B = ab$, $M = 2bc + 2ac$, па формула $P = 2B + M$ важи за квадар.

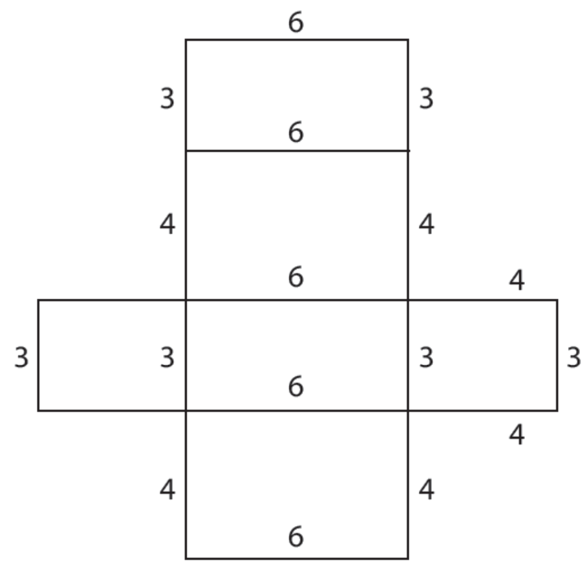
пример 1

Израчунај површину квадра са слике чије су ивице 6 cm, 4 cm, 3 cm.



Решење:

Стране квадра су три пара подударних правоугаоника и површину квадра ћемо израчунати као збир површина свих страна квадра.



На основу датих података, површина квадра је једнака
$P = 2ab + 2bc + 2ac = 2 \cdot 4\text{ cm} \cdot 6\text{ cm} + 2 \cdot 6\text{ cm} \cdot 3\text{ cm} + 2 \cdot 4\text{ cm} \cdot 3\text{ cm}$; $P = 108\text{ cm}^2$.

пример 2

Израчунај површину коцке ивице 3 cm.

Решење:

Како се површ коцке састоји из 6 подударних квадрата, површина коцке је $6 \cdot 9\ \text{cm}^2$, односно $54\ \text{cm}^2$.

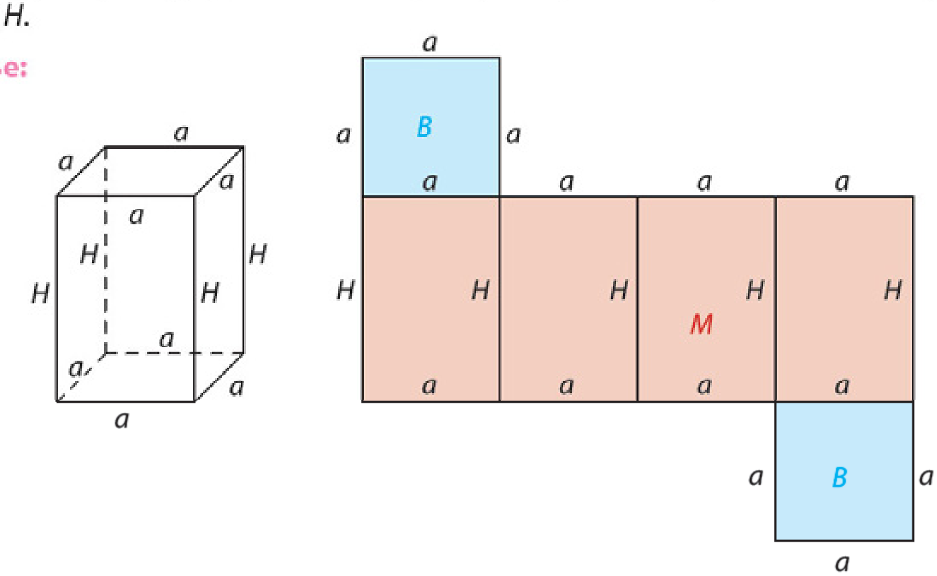
тврђење

Уопштено, ако је дужина ивице коцке a, површина коцке је $P = 6a^2$.

пример 3

Израчунај површину правилне четворостране призме ако је основна ивица a и висина H.

Решење:



Основа правилне четворостране призме је квадрат ивице a, па је површина основе (базе) $B = a^2$.

Омотач правилне четворостране призме чине четири правоугаоника ивица a и H, па је површина омотача: $M = 4 \cdot a \cdot H$.

Тада је **површина правилне четворостране призме:**

$$P = 2B + M$$
$$P = 2 \cdot a^2 + 4aH$$
$$\mathbf{P = 2a^2 + 4aH.}$$

пример 4

Израчунај површину правилне четворостране призме основне ивице 3 cm и бочне ивице 6 cm.

Решење:

Ако са a обележимо дужину основне ивице, а са H дужину бочне ивице, површина основе призме је $B = a^2 = (3\ \text{cm})^2 = 9\ \text{cm}^2$.

Површина омотача призме је $M = 4aH = 4 \cdot 3\ \text{cm} \cdot 6\ \text{cm} = 72\ \text{cm}^2$.

Површина призме је $P = 2B + M = 2 \cdot 9\ \text{cm}^2 + 72\ \text{cm}^2 = 90\ \text{cm}^2$.

пример 5

Израчунај површину правилне четворостране призме ако је дијагонала основе $5\sqrt{2}$ cm, а висина је два пута већа од основне ивице.

Решење:

Нека је a дужина основне ивице и H дужина висине призме.

Како је основа правилне четворостране призме квадрат, дијагонала основе је $d = a\sqrt{2}$, одакле ћемо израчунати основну ивицу:

$$d = a\sqrt{2}$$

$$5\sqrt{2}\text{ cm} = a\sqrt{2}\text{ cm}, a = 5\text{ cm}.$$

Висина призме је два пута већа од основне ивице $H = 2a = 2 \cdot 5\text{ cm} = 10\text{ cm}$.

Површина основе је $B = a^2 = (5\text{ cm})^2 = 25\text{ cm}^2$, а површина омотача $M = 4aH = 4 \cdot 5\text{ cm} \cdot 10\text{ cm} = 200\text{ cm}^2$.

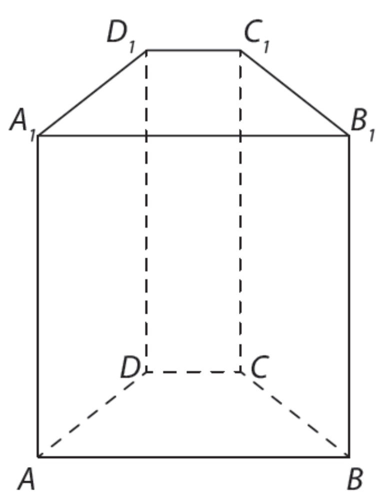
$P = 2B + M$

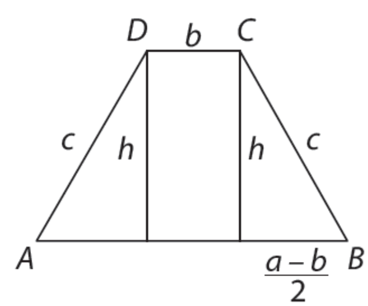
$P = 2 \cdot 25\text{ cm}^2 + 200\text{ cm}^2 = 250\text{ cm}^2$

пример 6

Основа праве призме $ABCDA_1B_1C_1D_1$ је једнакокраки трапез $ABCD$ ($AB \parallel CD$) чије су основице $AB = 20$ cm, $CD = 8$ cm и краци $AD = BC = 10$ cm. Израчунај површину те призме ако је њена висина једнака висини основе.

Решење:





Нека су a и b дужине основица и c дужина крака трапеза, а H дужина висине призме.

Висина трапеза (једне основе) је $h = \sqrt{10^2 - 6^2} = 8$, па је површина једне основе $B = \dfrac{20+8}{2} \cdot 8$, $B = 112\text{ cm}^2$ и $H = h = 8$ cm.

Површина омотача призме је $M = a \cdot H + c \cdot H + b \cdot H + c \cdot H$,
$M = 20 \cdot 8 + 10 \cdot 8 + 8 \cdot 8 + 10 \cdot 8 = 384$, $M = 384\text{ cm}^2$.
$P = 2B + M$, $P = 2 \cdot 112 + 384 = 608$. Површина призме је 608 cm^2.

34. Израчунај површину коцке ако је:

а) њена ивица 3,5 cm;

б) површина једне њене стране 49 cm^2;

в) дијагонала једне њене стране $5\sqrt{2}$ cm;

г) збир свих њених ивица 48 cm;

д) њена дијагонала $6\sqrt{3}$ cm;

ђ) површина њеног дијагоналног пресека $100\sqrt{2}$ cm^2.

35. Израчунај дијагоналу коцке ако је њена површина 96 cm^2.

36. Израчунај површину квадра чије су ивице 5 cm, 4 cm и 3 cm.

37. За колико процената се повећа површина коцке ако се свака њена ивица повећа за 20%?

38. Површина квадра је 460 cm^2. Израчунај дијагоналу тог квадра ако су две његове ивице 5 cm и 12 cm.

39. Дијагонални пресек квадра је квадрат површине 1 m^2. Израчунај површину тог квадра ако се његове основне ивице односе као 3 : 4.

40. Од пет коцкица, свака површине 12 cm^2, састављен је квадар. Колика је површина тог квадра?

41. Колико се различитих квадара може саставити од 12 подударних коцкица ивице 2 cm? Који од тих квадара има највећу површину?

42. Све стране дрвене коцке ивице 2 m су обојене. За то је потребно три конзерве по 1,5 kg боје. Та коцка је исечена на осам једнаких мањих коцки. Ако треба обојити необојене стране тих мањих коцки, колико конзерви исте боје треба докупити?

43. Израчунај површину правилне четворостране призме основне ивице a и висине H, ако је:

а) $a = 10$ cm, $H = 16$ cm; **б)** $a = 4$ cm, $H = 8{,}5$ cm; **в)** $a = 6$ cm, $H = 2$ dm.

44. Површина правилне четворостране призме је 360 cm^2, а површина основе је 36 cm^2. Израчунај дијагоналу: а) основе; б) бочне стране; в) те призме.

45. Израчунај основну ивицу и висину правилне четворостране призме ако је површина њеног омотача 120 cm^2, а површина призме је 170 cm^2.

46. Дијагонала правилне четворостране призме је 10 cm, а дијагонала основе је 6 cm. Израчунај висину те призме.

47. Израчунај површину правилне четворостране призме чија је основна ивица 8 cm, а дијагонала бочне стране 17 cm.

48. Израчунај површину правилне четворостране призме ако је дијагонала основе 12 cm, а дијагонала призме 20 cm.

49. Израчунај површину правилне четворостране призме ако је њена висина 10 cm, а површина дијагоналног пресека $60\sqrt{2}$ cm².

50. Дијагонала правилне четворостране призме је 12 cm и гради са равни основе угао од 45°. Израчунај површину те призме.

51. Основна ивица правилне четворостране призме је $8\sqrt{6}$ cm, а дијагонала призме нагнута је према равни основе под углом од 30°. Одреди површину те призме.

52. Основа праве призме је ромб са дијагоналама 16 cm и 12 cm. Висина призме је једнака висини основе. Израчунај:

а) њену површину;

б) површине њених дијагоналних пресека.

53. Основа праве призме $ABCDA_1B_1C_1D_1$ је трапез $ABCD$ ($AB \parallel CD$), $AB = 14$ cm, $CD = 2$ cm, $AD = BC = 10$ cm. Бочна ивица је 10 cm. Одреди површину те призме.

54. Основа праве призме $ABCDA_1B_1C_1D_1$ је трапез $ABCD$ ($AB \parallel CD$), $AB = 14$ cm, $CD = 2$ cm, $AD = BC = 10$ cm. Израчунај површину те призме ако је:

а) најмања бочна страна квадрат;

б) дијагонала највеће бочне стране 26 cm.

55. Основа праве призме је ромб са дијагоналама $d_1 = 16$ cm и $d_2 = 12$ cm. Површина омотача је 520 cm². Израчунај: а) висину; б) површину те призме.

56. Основа праве призме је паралелограм чије су странице 10 cm и $8\sqrt{2}$ cm, а оштар угао 45°. Ако је висина те призме 5 cm, израчунај њену површину.

57. Основа праве призме је паралелограм чије су странице 6 cm и 4 cm, а оштар угао 30°. Ако је висина призме 5 cm, израчунај њену површину.

Површина праве тростране призме и правилне шестостране призме 4.5.

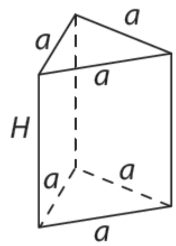
пример 1

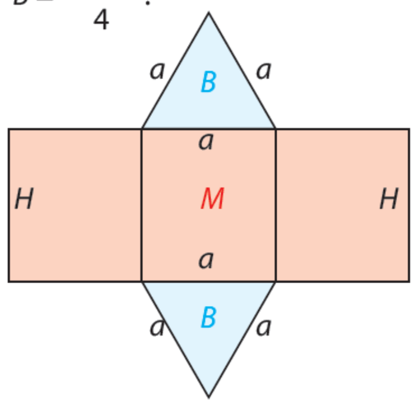
Израчунај површину правилне тростране призме ако је основна ивица a и висина H.

Решење:

Основа правилне тростране призме је једнакостранични троугао ивице a, па је површина основе (базе)

$$B = \frac{a^2\sqrt{3}}{4}.$$





Омотач правилне тростране призме чине три правоугаоника ивица a и H, па је површина омотача $M = 3 \cdot a \cdot H$.

Тада је **површина правилне тростране призме**:

$$P = 2B + M$$

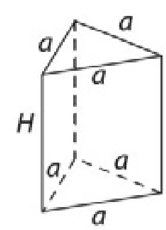
$$P = 2 \cdot \frac{a^2\sqrt{3}}{4} + 3aH$$

$$\mathbf{P = \frac{a^2\sqrt{3}}{2} + 3aH.}$$

пример 2

Израчунај површину правилне тростране призме ако је растојање између равни основа 7 cm, а растојање између бочних ивица 4 cm.

Решење:



Растојање између основа је висина призме $H = 7$ cm, а растојање између бочних ивица је дужина основне ивице $a = 4$ cm.

Површина основе призме је $B = \frac{a^2\sqrt{3}}{4} = \frac{4^2\sqrt{3}}{4} = 4\sqrt{3}\ \text{cm}^2$.

Површина омотача призме је $M = 3aH = 3 \cdot 4\ \text{cm} \cdot 7\text{cm} = 84\ \text{cm}^2$.

Сада можемо израчунати површину

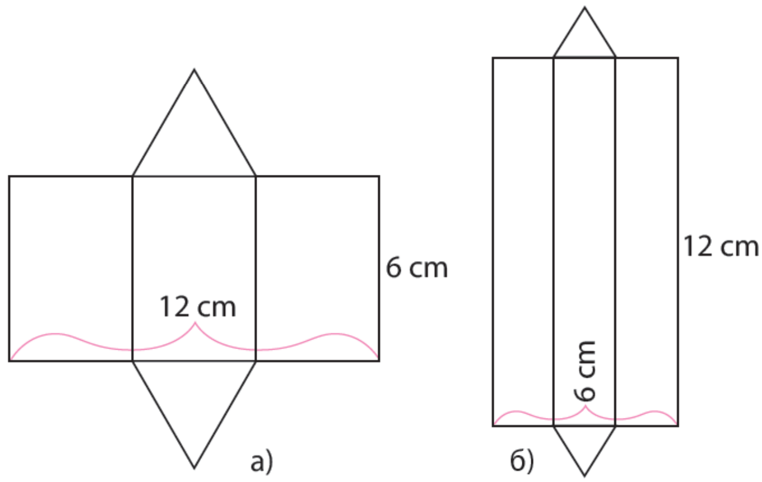
$P = 2B + M = 2 \cdot 4\sqrt{3}\ \text{cm}^2 + 84\ \text{cm}^2 = (8\sqrt{3} + 84)\ \text{cm}^2$.

пример 3

Развијени омотач правилне тростране призме је правоугаоник са страницама 12 cm и 6 cm. Израчунај површину те призме.

Решење:

Једна страница правоугаоника, који је развијени омотач правилне призме, једнака је обиму основе. Друга страница тог правоугаоника једнака је бочној ивици призме. У овом примеру постоје два случаја.



а) Обим основе је 12 cm, односно основна ивица 4 cm, а висина 6 cm. Површина је $P = (8\sqrt{3} + 72)\ cm^2$.

б) Обим основе је 6 cm, односно основна ивица 2 cm, а висина 12 cm. У том случају површина је $P = (2\sqrt{3} + 72)\ cm^2$.

пример 4

Израчунај површину праве тростране призме чија је основа правоугли троугао са катетама 8 cm и 6 cm, а висина призме је 10 cm.

Решење:

Површина једне основе је $B = \frac{a \cdot b}{2}$, па имамо да је $B = \frac{8\,cm \cdot 6\,cm}{2}$, тј. $B = 24\ cm^2$.

Хипотенуза основе је $c = \sqrt{a^2 + b^2} = \sqrt{(8\,cm)^2 + (6\,cm)^2} = \sqrt{100\,cm^2} = 10\,cm$. Површина омотача призме је:

$$M = a \cdot H + b \cdot H + c \cdot H = (a + b + c) \cdot H$$

$M = 8\ cm \cdot 10\ cm + 6\ cm \cdot 10\ cm + 10\ cm \cdot 10\ cm = 240\ cm^2$.

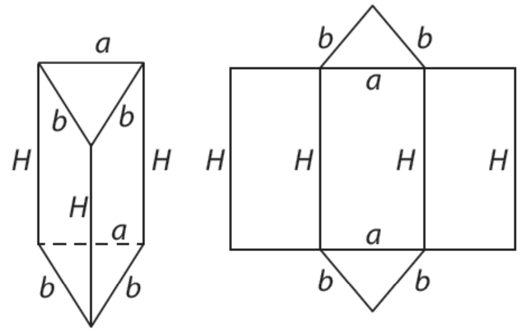
Површина призме је: $P = 2B + M$, $P = 2 \cdot 24\ cm^2 + 240\ cm^2 = 288\ cm^2$.

Можемо запазити да се површина омотача призме рачуна као производ обима основе и висине призме.

пример 5

Основа праве призме је једнакокраки троугао, чија је основица 16 cm, а крак 17 cm. Израчунај површину те призме ако је њена висина 13 cm.

Решење:



Нека је a основица, b крак једнакокраког троугла и h висина која одговара основици, а H висина призме. Висина једнакокраког троугла која одговара основици a је $h=\sqrt{b^2-\left(\frac{a}{2}\right)^2}=\sqrt{17^2-8^2}=15$.

Површина основе је $B=\frac{a\cdot h}{2}$, односно $B=120\ \text{cm}^2$.

Површина омотача призме је $M=a\cdot H+b\cdot H+b\cdot H$,

$M=16\cdot 13+17\cdot 13+17\cdot 13=650$, $M=650\ \text{cm}^2$.

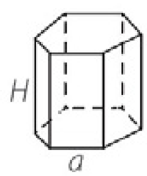
Површина призме је: $P=2B+M$, $P=2\cdot 120+650=890$.

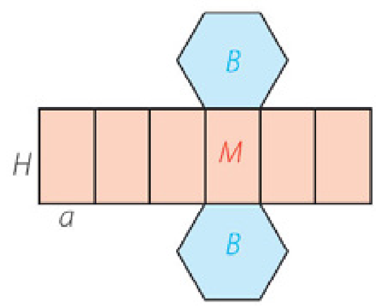
Површина призме је 890 cm^2.

пример 6

Израчунај површину правилне шестостране призме ако су основна ивица a и висина H.

Решење:





Основа правилне шестостране призме је правилан шестоугао ивице a, па је површина основе (базе)

$$B=6\cdot\frac{a^2\sqrt{3}}{4}.$$

Омотач правилне шестостране призме чини шест правоугаоника ивица a и H, па је површина омотача: $M=6\cdot a\cdot H$.

Тада је **површина правилне шестостране призме**

$$P=2B+M$$

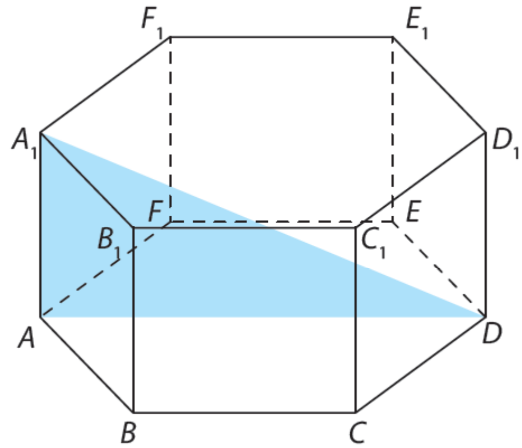
$$P=2\cdot 6\cdot\frac{a^2\sqrt{3}}{4}+6aH$$

$$\mathbf{P=3a^2\sqrt{3}+6aH.}$$

пример 7

Израчунај површину правилне шестостране призме ако је дужа дијагонала основе 12 cm, а дужа дијагонала призме 13 cm.

Решење:



Нека је: $ABCDEFA_1B_1C_1D_1E_1F_1$ дата призма. За израчунавање површине потребно је да знамо основну и бочну ивицу призме. Дужа дијагонала основе једнака је двострукој основној ивици призме, одакле следи да је $a = 6$ cm.
Нека је a основна ивица и H висина призме.

Дужа дијагонала основе $AD = 12$ cm, дужа дијагонала призме $DA_1 = 13$ cm и бочна ивица AA_1 граде правоугли троугао ADA_1. Применом Питагорине теореме на тај правоугли троугао следи да је:

$DA_1^{\,2} = AD^2 + AA_1^{\,2}$ односно $H^2 = 13^2 - 12^2 = 25$, $H = 5$ cm.

Површина основе (базе): $B = 6 \cdot \dfrac{6^2\sqrt{3}}{4}$, $B = 54\sqrt{3}$ cm².

Површина омотача: $M = 6 \cdot a \cdot H$, $M = 6 \cdot 6 \cdot 5 = 180$, $M = 180$ cm².

Тада је површина правилне шестостране призме: $P = 2B + M = (108\sqrt{3} + 180)$ cm².

ЗАДАЦИ

58. Израчунај површину правилне тростране призме основне ивице a и висине H ако је:

а) $a = 4$ cm, $H = 12$ cm; б) $a = 6$ cm, $H = 15{,}5$ cm; в) $a = 16$ cm, $H = 2{,}2$ dm.

59. Израчунај површину правилне тростране призме ако је обим основе 24 cm, бочна ивица 17 cm .

60. Израчунај површину правилне тростране призме ако је збир свих основних ивица 48 cm, а збир свих дијагонала бочних страна 102 cm.

61. Површина правилне тростране призме основне ивице 18 cm је $1\,350\sqrt{3}$ cm². Израчунај бочну ивицу те призме.

62. Висина правилне тростране призме је 8 cm, а површина једне бочне стране је 48 cm². Израчунај површину те призме.

63. Израчунај површину правилне тростране призме ако је:

а) обим основе 18 cm, а површина једне бочне стране 18 cm²;

б) површина основе $24\sqrt{3}$ cm², висина $2\sqrt{6}$ cm;

в) површина омотача 48 cm², висина 4 cm.

64. Израчунај површину правилне тростране једнакоивичне призме ако су све ивице 6 cm.

65. Израчунај површину правилне тростране једнакоивичне призме ако је површина:

а) њене основе $25\sqrt{3}$ cm²; б) њеног омотача 12 cm².

66. Површина основе правилне тростране призме је $4\sqrt{3}$ cm², а однос њене висине и основне ивице је 3:2. Израчунај површину те призме.

67. Израчунај површину праве тростране призме чија је основа правоугли троугао са катетом 12 cm и хипотенузом 13 cm, ако је бочна ивица призме 16 cm.

68. Израчунај површину праве тростране призме чија је основа правоугли троугао са катетама 5 cm и 12 cm, а највећа бочна страна призме је квадрат.

69. Израчунај површину призме чија је основа једнакокраки троугао основице 6 cm и висине која одговара основици 4 cm, а висина призме 12 cm.

70. Основа праве призме је једнакокраки троугао обима 50 cm, и чија је основица за 1 cm краћа од крака. Израчунај површину призме ако је њена висина 10 cm.

71. Израчунај површину правилне шестостране призме основне ивице a и висине H ако је:

а) $a = 4$ cm, $H = 12$ cm; б) $a = 12$ cm, $H = 15{,}5$ cm; в) $a = 1{,}6$ dm, $H = 2{,}2$ dm.

72. Одреди површину правилне шестостране призме ако је обим основе 24 cm, а бочна ивица 1 dm.

73. Површина омотача правилне шестостране призме је 360 cm² а бочна ивица 15 cm. Израчунај површину те призме.

74. Већи дијагонални пресек правилне шестостране призме је квадрат чија је површина 144 cm². Израчунај површину те призме.

75. Одреди површину правилне једнакоивичне шестостране призме основне ивице 6 cm.

76. Израчунај површину правилне једнакоивичне шестостране призме ако је растојање њених наспрамних бочних страна $8\sqrt{3}$ cm.

77. Краћа дијагонала основе правилне шестостране призме је $10\sqrt{3}$ cm, а бочна ивица призме 10 cm. Израчунај површину те призме.

78. Дужа дијагонала правилне шестостране призме је 12 cm и нагнута је према равни основе под углом од 45°. Израчунај површину те призме.

79. Краћа дијагонала правилне шестостране призме је 16 cm и нагнута је према равни основе под углом од 30°. Израчунај површину те призме.

80. Правилна шестострана призма основне ивице 8 cm и висине 6 cm пресечена је дуж једног од већих дијагоналних пресека. Да ли су тако настала тела призме? Одреди површине насталих тела.

4.6. Запремина призме и праве четворостране призме

Свако геометријско тело заузима (запрема) известан део простора. Тај део простора има своју запремину. Запремину изражавамо као производ неког позитивног реалног броја и изабране јединице мере за запремину.

Мерити запремину тела значи одредити колико се пута неко тело, које смо изабрали да има запремину 1, садржи у датом телу. Број којим се изражава тај однос назива се **мерни број запремине тела**.

Из четвртог разреда знамо да коцка чија ивица има дужину 1 (... центиметар, дециметар, метар...) – има запремину 1 (... кубни центиметар, кубни дециметар, кубни метар...).

Запремина тела је ненегативан број придружен телу, тако да:

– два тела која се могу довести до поклапања имају једнаке запремине;

– ако се тело може разложити на два или више тела (на делове чије унутрашње области немају заједничких тачака), тада је његова запремина једнака збиру запремина делова;

– коцка чија је ивица 1 – има запремину 1.

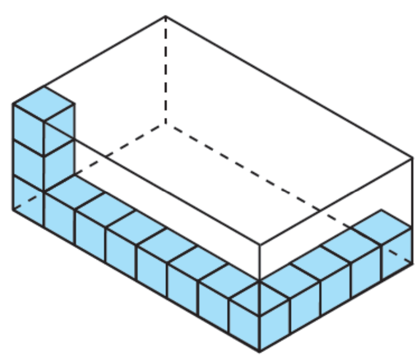
Наведене особине о запремини тела важе и за све полиедре, па самим тим и за призме.

Одређивање запремина неке призме не састоји се увек у поступку преношења јединица за мерење (коцка) у буквалном смислу, већ се примењују правила по којима, на основу датих података, израчунавамо запремину. Та правила се записују формулама.

пример 1

Дужине ивица квадра су 8 cm, 5 cm, 3 cm. Одреди запремину тог квадра.

Решење:



У четвртом разреду смо научили да је запремина квадра једнака производу дужина његових ивица које полазе из истог темена.

Изаберимо коцку ивице 1 cm, која има запремину 1 cm^3, за јединицу мерења запремине. Дужине ивица квадра су 8 cm, 5 cm и 3 cm, па јединичну коцку можемо сложити 8×5 пута у једном реду. Редова има 3.

Закључујемо да јединичну коцку можемо сместити 8×5×3 пута у овај квадар, па је његова запремина једнака 8×5×3 јединица за мерење запремине.
Пишемо $V = 8 \cdot 5 \cdot 3 \cdot 1$ cm^3, односно $V = 120$ cm^3.

Ако су дужине ивица квадра *a, b, c* мерене истом јединицом дужине, тада је запремина квадра

тврђење

$$V = a \cdot b \cdot c.$$

Квадар је права (усправна) четворострана призма чија је основа правоугаоник, ивице основе су a и b, а висина c. Дакле, можемо писати $V = a \cdot b \cdot c = (a \cdot b) \cdot c = B \cdot H$.

Запремина праве четворостране призме чија је основа правоугаоник једнака је производу површине његове основе и висине.

$$V = B \cdot H$$

Следи да је запремина коцке чија је ивица дужине *a* једнака

тврђење

$$V = a \cdot a \cdot a = a^3.$$

пример 2

Израчунај запремину коцке чија је ивица 6 cm.

Решење:

Коцка чија је ивица 6 cm има запремину $V = a \cdot a \cdot a = 6 \cdot 6 \cdot 6 = 216$, $V = 216\ \mathrm{cm}^3$.

пример 3

Дате су две праве четворостране призме. Основа прве призме је квадрат странице 8 cm, а основа друге призме је правоугаоник чије су странице 4 cm и 16 cm. Висине обе призме су по 12 cm. Израчунај запремине тих призми.

Решење:

Ако са V_1 и V_2 обележимо редом запремине ових призми. Онда је
$V_1 = B \cdot H = a^2 \cdot H = 64\ \mathrm{cm}^2 \cdot 12\ \mathrm{cm} = 768\ \mathrm{cm}^3$ и
$V_2 = B \cdot H = a \cdot b \cdot H = 64\ \mathrm{cm}^2 \cdot 12\ \mathrm{cm} = 768\ \mathrm{cm}^3$.
Запремине ових призми су једнаке.

Из претходног примера закључујемо да два тела која имају исту запремину не морају бити подударна.

занимљивост

Италијански математичар **Бонавентура Кавалијери** (1598–1647) закључио је да ако две призме имају основе једнаких површина и имају једнаке висине, тада ће њихове запремине бити једнаке. Ово тврђење је познато као **Кавалијеријев принцип**.

Запремина усправне четворостране призме једнака је производу површине њене основе и висине:

тврђење

$$V = B \cdot H$$

пример 4

Израчунај запремину правилне четворостране призме ако је њена основна ивица 9 cm и висина 11 cm.

Решење:

$V = B \cdot H = a^2 \cdot H = 81\ \text{cm}^2 \cdot 11\ \text{cm} = 891\ \text{cm}^3$.

пример 5

Одреди запремину правилне четворостране призме површине 360 cm^2 ако је њена основна ивица 6 cm.

Решење:

Нека је a основна ивица и H висина призме, тада је површина основе $B = a^2 = 6^2 = 36$, $B = 36\ \text{cm}^2$. Како бисмо израчунали запремину, потребна нам је и дужина висине призме, коју можемо израчунати из површине омотача.

Најпре ћемо израчунати површину омотача.

Како је $P = 2B + M$, $M = P - 2B = 360 - 72 = 288$, $M = 288\ \text{cm}^2$. Из површине омотача $M = 4 \cdot a \cdot H$ израчунаћемо висину, следи да је $288 = 4 \cdot 6 \cdot H$, тј. $H = 12$ cm.

$V = B \cdot H = 36 \cdot 12 = 432$, $V = 432\ \text{cm}^3$.

ЗАДАЦИ

81. Израчунај запремину коцке чија је ивица: а) 5 cm; б) 1,5 cm; в) $2\sqrt{2}$ cm.

82. Израчунај запремину коцке ако је њена површина 96 cm^2.

83. Израчунај површину и запремину коцке ако је површина њеног дијагоналног пресека $64\sqrt{2}\ \text{cm}^2$.

84. Колико литара боје стаје у коцку ивице 8 cm ако је напуњена до врха?

85. Одреди запремину квадра чије су ивице:

а) 4 cm, 8 cm, 12 cm;

б) 2,5 cm, 6,2 cm, 4,25 cm;

в) $3\sqrt{2}$ cm, 4 cm, $\sqrt{8}$ cm.

86. Две ивице квадра су 4 cm и 3 cm. Израчунај запремину квадра ако је његова површина 136 cm^2.

87. Базен облика квадра димензија 20 m, 15 m и 2,5 m напуњен је водом до $\frac{3}{5}$ висине. Колико литара воде има у базену?

88. Једна ивица квадра је 6 cm, а друге две се односе као 3 : 5. Израчунај површину тог квадра ако му је запремина 90 cm^3.

89. Ако се свака ивица коцке увећа за 2 cm, њена површина се увећа за 96 cm^2. Одреди запремину полазне коцке.

90. Дате су две коцке са ивицама дужине 12 cm и 5 cm. Одреди запремину оне коцке која има површину једнаку збиру површина дате две коцке.

91. Ивице две коцке се односе као 3 : 2. Израчунај разлику њихових запремина ако им се површине разликују за 120 cm^2.

92. Израчунај запремину квадра чија је дијагонала 20 cm, а основне ивице 4 cm и 6 cm.

93. Три подударне коцке сложене су једна до друге и тако је добијен квадар површине 42 cm^2. Израчунај запремину тог квадра.

94. Базен облика квадра има димензије 4 m, 4,5 m и 2,5 m. За које време ће се он напунити водом ако се у њега сваке секунде улије 5 литара воде?

95. Израчунај запремину правилне четворостране призме основне ивице a и висине H, ако је:

а) $a = 4$ cm, $H = 12$ cm; б) $a = 6$ cm, $H = 15{,}5$ cm; в) $a = 16$ cm, $H = 2{,}2$ dm.

96. Површина правилне четворостране призме је 180 cm^2. Израчунај запремину те призме ако је њен развијени омотач квадрат.

97. Површина правилне четворостране призме је 170 cm^2, а површина њеног омотача 120 cm^2. Израчунај запремину те призме.

98. Ако је запремина правилне четворостране призме 1 440 cm^3 и бочна ивица 10 cm, одреди њену површину.

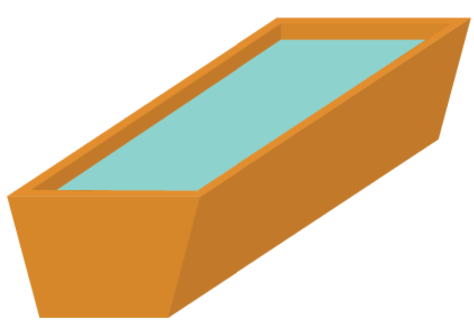
99. Правилна четворострана призма основне ивице 8 cm има запремину 960 cm^3. Одреди површину те призме.

100. Дијагонала правилне четворостране призме је за 2 cm дужа од бочне ивице. Ако је основна ивица $5\sqrt{2}$ cm, израчунај запремину те призме.

101. Бочна ивица правилне четворостране призме је три пута већа од основне ивице. Ако је површина призме 280 cm^2, израчунај њену запремину.

102. Основа праве призме је ромб чија је висина $2\sqrt{3}$ cm и оштар угао 60°. Израчунај запремину призме, ако је њена бочна ивица једнака дужој дијагонали основе.

103. Колико литара воде стане у корито облика призме чија је основа једнакокраки трапез и дужина 50 m? Основице и крак трапеза су редом 8 m, 6 m и $5\sqrt{2}$ m.



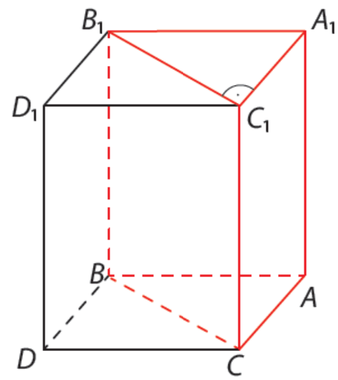
4.7. Запремина праве тростране призме и правилне шестостране призме

пример 1

Израчунај запремину праве тростране призме $ABCA_1B_1C_1$. Основа је правоугли троугао чије су катете $AC = 4$ cm и $BC = 6$ cm, а висина призме је 10 cm.

Решење:

Праву тространу призму можемо допунити до праве четворостране призме: $ABDCA_1B_1D_1C_1$, чија је основа паралелограм $ABDC$.



Призме $ABCA_1B_1C_1$ и $CBDC_1B_1D_1$ су подударне , па су њихове запремине једнаке.

Важи да је $V(ABDCA_1B_1D_1C_1) = V(ABCA_1B_1C_1) + V(CBDC_1B_1D_1) = 2V(ABCA_1B_1C_1)$.
Следи да је:

$$V(ABCA_1B_1C_1) = \frac{1}{2}V(ABDCA_1B_1D_1C_1) = \frac{1}{2}P(ABDC)\cdot H = \frac{1}{2}\cdot 2P(ABC)\cdot H = P(ABC)\cdot H = B\cdot H.$$

Дакле, запремина је $V(ABCA_1B_1C_1) = \frac{1}{2}\cdot 4\text{ cm}\cdot 6\text{ cm}\cdot 10\text{ cm} = 120\text{ cm}^3$.

Посматрајмо случај када основа призме није правоугли троугао. Тај троугао се може бар једном висином разложити на два правоугла троугла.

У том случају, призма се може разложити на два правоугла троугла, та призма се може разложити на две призме чије су основе правоугли троуглови, па размотрена формула за одређивање запремине важи за било коју усправну тространу призму.

Пошто се сваки многоугао може разложити на троуглове, то се и свака права призма може разложити на призме чије су основе троуглови.

Примењујући особине запремине, закључујемо следеће:

тврђење

Запремина праве тростране призме једнака је производу површине основе и висине.

$$V = B\cdot H$$

пример 2

Израчунај запремину правилне тростране призме ако су основна ивица a и висина H.

Решење:

Основа правилне тростране призме је једнакостранични троугао, па је површина основе $B = \dfrac{a^2\sqrt{3}}{4}$, а запремина $V = B \cdot H$.

Тада је **запремина правилне тростране призме:** $\boldsymbol{V = \dfrac{a^2\sqrt{3}}{4} \cdot H}$.

пример 3

Израчунај запремину правилне тростране једнакоивичне призме ивице 6 cm.

Решење:

Како је призма једнакоивична, важи да је $H = a = 6$ cm.

Запремина призме је $V = B \cdot H = \dfrac{a^2\sqrt{3}}{4} \cdot H = \dfrac{6^2\sqrt{3}}{4} \cdot 6 = 54\sqrt{3}$, $V = 54\sqrt{3}$ cm^3.

пример 4

Израчунај запремину правилне шестостране призме ако су основна ивица a и висина H.

Решење:

Основа правилне шестостране призме је правилан шестоугао, па је површина основе $B = 6 \cdot \dfrac{a^2\sqrt{3}}{4} = \dfrac{3a^2\sqrt{3}}{2}$, а запремина $V = B \cdot H$.

Тада је **запремина правилне шестостране призме:** $\boldsymbol{V = \dfrac{3a^2\sqrt{3}}{2}} \cdot H$.

пример 5

Израчунај површину и запремину правилне шестостране призме ако је површина омотача једнака површини основе и износи $216\sqrt{3}$ cm^2.

Решење:

Површина основе је $B = \dfrac{3a^2\sqrt{3}}{2}$, $216\sqrt{3} = \dfrac{3a^2\sqrt{3}}{2}$, $a^2 = 144$, тј. $a = 12$ cm.

Из површине омотача $M = 6aH$ следи да је $H = 3\sqrt{3}$ cm, па је запремина $V = B \cdot H = 216\sqrt{3} \cdot 3\sqrt{3} = 1\,944$, $V = 1\,944$ cm^3.

ЗАДАЦИ

104. Одреди запремину правилне тростране призме основне ивице a и висине H ако је:

а) $a = 10$ cm, $H = 12$ cm; **б)** $a = 8$ cm, $H = 1{,}6$ dm; **в)** $a = 1{,}2$ dm, $H = 3$ dm.

105. Израчунај запремину правилне тростране призме ако је:

а) основна ивица 6 cm, бочна ивица 20 cm;

б) обим основе 24 cm, висина 5 cm;

в) површина основе $100\sqrt{3}$ cm², површина омотача 600 cm²;

г) површина омотача 48 cm², основна ивица 4 cm.

106. Израчунај запремину правилне тростране призме ако је збир свих бочних ивица 24 cm, а збир свих дијагонала бочних страна 60 cm.

107. Површина правилне тростране призме основне ивице 18 cm је $1\,350\sqrt{3}$ cm². Израчунај њену запремину.

108. Површина основе правилне тростране призме је $400\sqrt{3}$ cm², а висина призме једнака је: а) висини основе; б) обиму основе. Израчунај запремину те призме.

109. Површина правилне тростране призме је $(8\sqrt{3} + 96)$ cm², а њена основна ивица је 4 cm. Израчунај запремину те призме.

110. Површина једне бочне стране правилне тростране призме је 28 cm², а бочна ивица је за 3 cm дужа од основне ивице. Израчунај запремину те призме.

111. Бочна ивица правилне тростране призме је 12 cm и једнака је пречнику круга:

а) описаног око основе;

б) уписаног у основу. Израчунај запремину те призме.

112. Израчунај површину правилне тростране призме ако је њена запремина $63\sqrt{3}$ cm³ и висина 7 cm.

113. Површина омотача правилне тростране једнакоивичне призме је 48 cm². Одреди површину и запремину те призме.

114. Одреди површину правилне тростране призме чија је запремина $250\sqrt{3}$ cm³ и површина основе $25\sqrt{3}$ cm².

115. Висина основе правилне тростране призме је $6\sqrt{3}$ cm, а висина призме је за 2 cm дужа од основне ивице. Одреди површину и запремину те призме.

116. Дијагонала бочне стране правилне тростране призме заклапа са основном ивицом угао од 60°. Израчунај површину и запремину призме ако је $6\sqrt{3}$ cm висина:

а) основе **б)** призме.

117. Одреди запремину правилне шестостране призме основне ивице a и висине H ако је:

а) $a = 8$ cm, $H = 12$ cm; **б)** $a = 12$ cm, $H = 1{,}6$ dm; **в)** $a = 1{,}8$ dm, $H = 2$ dm.

118. Израчунај запремину правилне шестостране призме ако је обим основе 60 cm, а њена висина 1,2 dm.

119. Одреди запремину правилне шестостране једнаковичне призме ивице 12 cm.

120. Израчунај запремину правилне шестостране призме ако је:

а) основна ивица 12 cm, бочна ивица 1,5 dm;

б) обим основе 60 cm, обим једне бочне стране 30 cm;

в) површина основе $600\sqrt{3}$ cm^2, површина омотача $600\sqrt{3}$ cm^2;

г) површина омотача 180 cm^2, дужа дијагонала основе 12 cm.

121. Израчунај запремину правилне шестостране једнакоивичне призме ако је растојање њених наспрамних бочних страна $6\sqrt{3}$ cm.

122. Одреди запремину правилне шестостране једнакоивичне призме ако је обим њене основе 48 cm.

123. Израчунај површину правилне шестостране призме ако је њена запремина $540\sqrt{3}$ cm^3 и висина 10 cm.

124. Одреди површину и запремину правилне шестостране призме ако је површина омотача једнака површини основе и износи $216\sqrt{3}$ cm^2.

125. Површина већег дијагоналног пресека правилне шестостране призме је 192 cm^2 и $H : a = 3 : 2$. Одреди површину и запремину те призме.

126. Мањи дијагонални пресек правилне шестостране призме је квадрат површине 81 cm^2. Израчунај:

а) површину већег дијагоналног пресека; **б)** запремину те призме.

127. Мањи дијагонални пресек правилне шестостране призме је квадрат, а површина већег дијагоналног пресека је $32\sqrt{3}$ cm^2. Израчунај запремину те призме.

128. Краћа дијагонала правилне шестостране призме дужине 24 cm нагнута је према равни основе под углом од 60°. Израчунај површину и запремину те призме.

4.8. Неке примене површине и запремине призме

У физици и разним практичним ситуацијама често је потребно да се израчуна маса тела.

Маса тела m је производ његове запремине и густине: $m = \rho \cdot V$.

пример 1

Израчунај масу гранитне коцке чија је ивица 12 cm. Густина гранита је $\rho = 28\ \dfrac{\text{g}}{\text{cm}^3}$.

Решење:

Запремина коцке је $V = a^3 = 12^3$, $V = 1\,728\ \text{cm}^3$. Одатле следи да је маса гранитне коцке $m = \rho \cdot V = 1\,728 \cdot 28$, m = 48 384 g = 48 384 kg.

пример 2

Стубови су направљени од буковог дрвета и облика правилне четворостране призме основне ивице 10 cm и дужине 1 m. Колико се таквих стубова може транспортовати возилом носивости 1 t ако је густина буковог дрвета $\rho = 0{,}74\ \dfrac{\text{g}}{\text{cm}^3}$?

Решење:

Маса једног стуба је $m = \rho \cdot V = \rho \cdot a^2 \cdot H = 0{,}74 \cdot 10^2 \cdot 100$, m = 7 400 g = 7,4 kg.
Како је 1 t = 1 000 kg, возилом се може транспортовати
1 000 kg : 7,4 kg = 135 135 ≈ 135 греда.

пример 3

За паковање неке робе потребно је направити дрвену кутију облика правилне шестостране призме чије су све ивице по 0,2 m. Кутију треба са спољашње стране обојити. Колико боје треба набавити ако је за бојење 1 m² потребно 350 g боје? ($\sqrt{3} \approx 1{,}73$).

Решење:

Потребно је израчунати најпре површину кутије која треба да се обоји.

Површина кутије је $P = 2B + M = 2 \cdot \dfrac{6 \cdot (0{,}2)^2 \sqrt{3}}{4} + 6 \cdot 0{,}2 \cdot 0{,}2 = 0{,}4476$, $P = 0{,}4476\ \text{m}^2$.

Дакле, за бојење кутије биће потребно 0,4476 · 350 g = 156,66 g боје.

пример 4

Базен облика квадра димензија 6 m, 12 m, 2 m треба напунити водом.

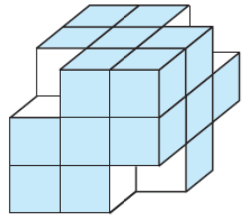
а) Колико литара воде може да стане у тај базен ?
б) Колика ће бити цена пуњења базена, ако 1 m³ воде кошта 100 динара?

Решење:

а) Запремина базена је $V = a \cdot b \cdot c = 6\ \text{m} \cdot 12\ \text{m} \cdot 2\ \text{m} = 144\ \text{m}^3$, како је $1\ \text{dm}^3 = 1$ l,
$V = 144\,000\ \text{dm}^3 = 144\,000$ l воде.
б) Цена пуњења базена је 14 400 динара.

пример 5

Из коцке 3 x 3 x 3 Ива је уклонила по једну малу коцку из 4 угла. Израчунај запремину тако добијеног тела ако је ивица мале коцке 2 cm.

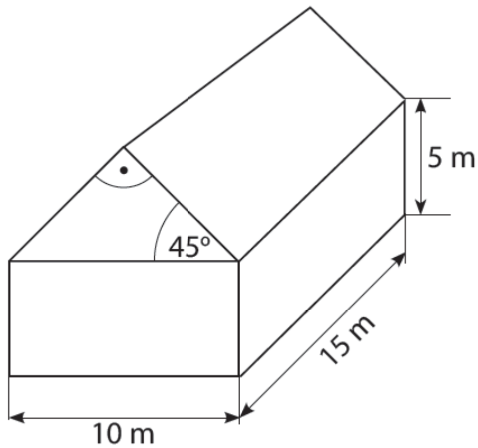


Решење:

Запремина мале коцке је $2\ \text{cm} \cdot 2\ \text{cm} \cdot 2\ \text{cm} = 8\ \text{cm}^3$, велика коцка има 27 малих коцки. Како је Ива уклонила четири мале коцке из четири угла, остају 23 мале коцке. Запремина добијеног тела је $V = 23 \cdot 8\ \text{cm}^3 = 184\ \text{cm}^3$.

пример 6

Израчунај запремину целе куће која је приказана на слици.



Решење:

Запремина куће се састоји из запремине квадра и запремине праве тростране призме.
Запремина квадра је $V_1 = 10\ \text{m} \cdot 15\ \text{m} \cdot 5\ \text{m} = 750\ \text{m}^3$.
Права тространа призма висине 15 m има за основу једнакокрако-правоугли троугао хипотенузе 10 m. Одатле следи да је катета правоуглог троугла $5\sqrt{2}$ m.

Површина основе призме је $B = \dfrac{a \cdot a}{2} = 25\ \text{m}^2$.

Запремина тавана куће је $V_2 = B \cdot H = 25 \cdot 15 = 375$, $V_2 = 375\ \text{m}^3$.

Дакле, запремина куће је $V = 750\ \text{m}^3 + 375\ \text{m}^3 = 1\,125\ \text{m}^3$.

ЗАДАЦИ

129. Алуминијумска плоча је облика квадра са ивицама 2 m, 1,5 m, 5 mm. Колика је маса ове плоче ако је густина алуминијума $\rho = 2{,}7\ \dfrac{\text{g}}{\text{cm}^3}$?

130. Од гвожђа је изливен део машине у облику правилне тростране призме. Основна ивица је 6 cm, а дужина (висина) 1m $(\sqrt{3} \approx 1{,}73)$. Израчунај масу тог дела (густина гвожђа $\rho = 7{,}8\ \dfrac{\text{g}}{\text{cm}^3}$).

131. Трговац Тоша треба да транспортује две врсте робе која је у кутијама облика коцке. Ивице 12 кутија су по 0,5 m, а ивице 20 кутија су по 0,1 m. Да ли Тоша може те кутије да спакује у сандук, чије су ивице 1,2 m, 1,75 m, 0,7 m?

132. Један радник за 1 сат ископа 1,2 m^3 земље. За које време ће тај радник ископати канал облика квадра чије су ивице 1 m, 0,5 m, 6 m?

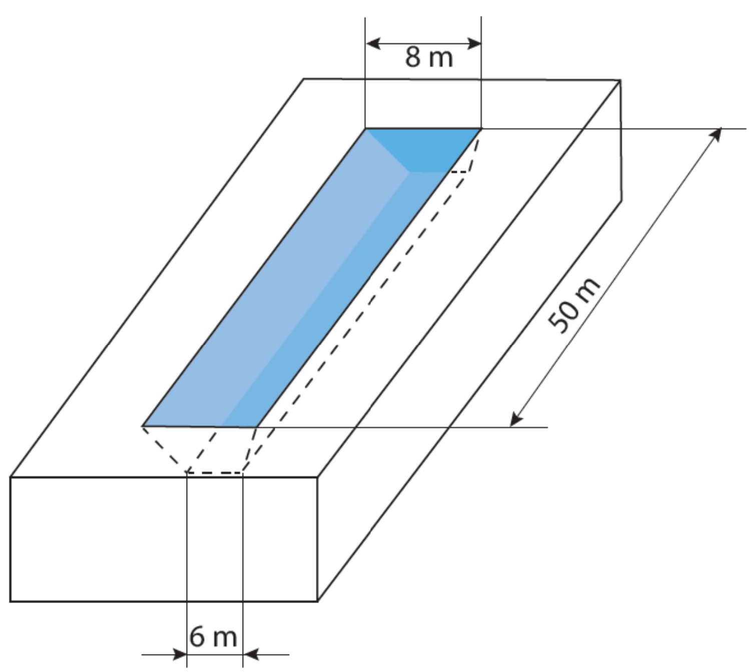
133. У акваријум облика квадра, чије дно има странице 75 cm и 20 cm, налази се вода до висине 50 cm. За колико ће се подићи ниво воде у акваријуму ако се на његово дно спусти камена коцка ивице 15 cm?

134. У акваријум облика квадра, чије дно има странице 75 cm и 20 cm, а висина је 60 cm, налази се вода до висине 36 cm. Ако се на дно акваријума спусти 10 камених коцки ивице 5 cm, ниво воде у акваријуму се подигне за:

а) мање од 10 cm; **б)** 1 cm; **в)** 12 cm; **г)** 15 cm; **д)** прелиће се.

Заокружи слово испред тачног одговора.

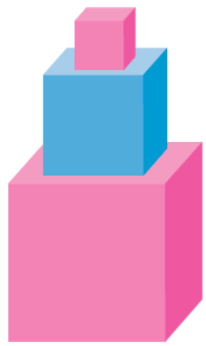
135. Колико литара воде стане у јарак облика призме чија је основа једнакокраки трапез, а дужина 50 m? Основице и крак трапеза су редом 8 m, 6 cm и $5\sqrt{2}$ m.



136. Димензије цигле су 250 mm, 120 mm, 65 mm. Колико комада цигала може да се превезе камионом носивости 2 тоне, ако је густина материјала од којег је цигла направљена 1,13 $\frac{g}{cm^3}$?

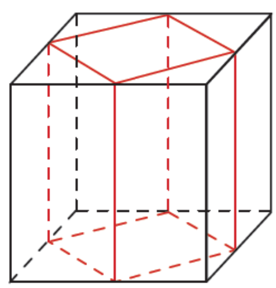
137. За ограђивање дворишта је потребно обезбедити 500 летви (дасака) облика квадра чије су ивице 1,4 m, 10 cm, 1 cm. Колико боје је потребно за бојење свих летви ако се са 1 kg боје обоји 44 m^2 дрвене површи?

138. Марта је за свој рођендан направила „торту” на спрат од картона. Торта има три спрата, тако што су коцке ивица 20 cm, 12 cm и 6 cm поређане једна на другу. Колико је Марти најмање потребно картона за прављење рођенданске торте, ако коцкама није одстрањена ниједна страна?

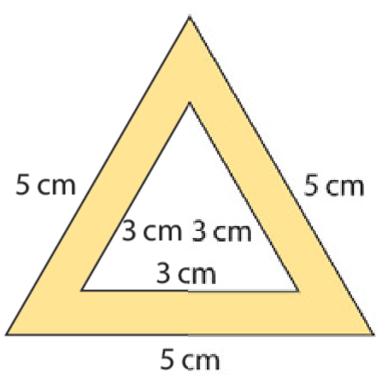


139. Магацински простор је облика квадра висине 3 m, димензије пода су 10 m и 8 m. Колико је потребно боје како би се окречио магацински простор, ако је за кречење 10 m^2 зида потребно 1l боје?

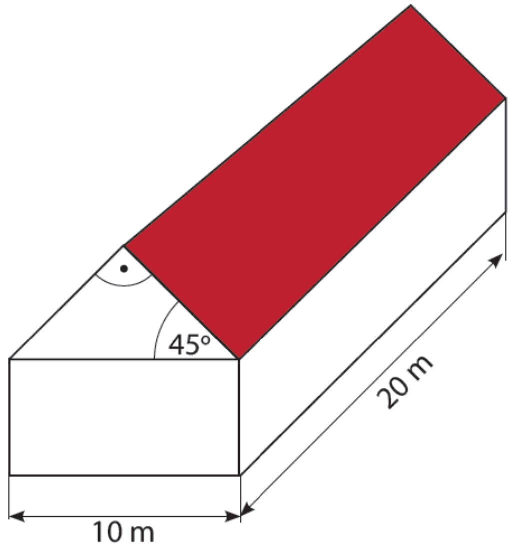
140. Дата је коцка ивице 12 cm. Средишта ивица основа представљају темена призме. Одреди површину и запремину добијене призме.



141. На слици је приказан попречни пресек бакарне цеви дужине 9 m. Колика је маса ове цеви ако је густина бакра 8,9 $\frac{g}{cm^3}$ ($\sqrt{3} \approx 1{,}73$)? (Напомена: резултат заокругли на две децимале.)

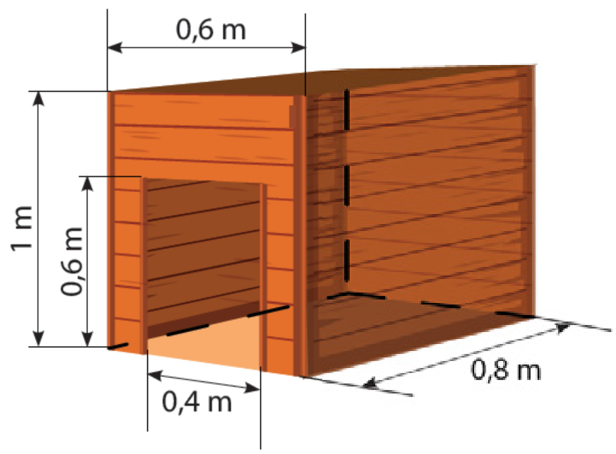


142. Израчунај на основу података са слике површину лименог крова хале.



143. Ирина је од коцке пластелина ивице 0,8 dm направила квадар чије су ивице 2 cm и 4 cm. Израчунај дужину треће ивице квадра који је Ирина направила.

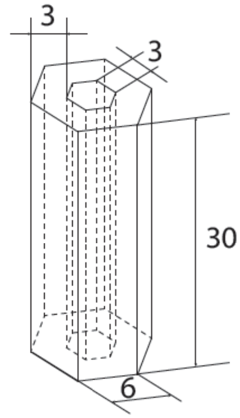
144. За свог пса Лука жели да направи кућицу у облику квадра од дрвених дасака. Жељене димензије кућице су 0,6 m, 0,8 m и 1 m. На кућици треба да постоји отвор за врата висине 0,6 m и дужине 0,4 m. Лука је купио даске по цени од 800 динара за један комад. Дужина даске је 3 m а ширина 0,3 m. Даске за кућицу могу да се режу и уклапају. Под кућице треба да буде постављен даскама.



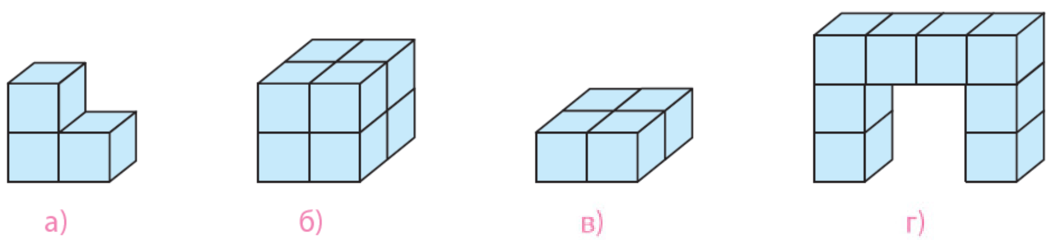
а) Колико ће дасака бити потребно Луки да направи кућицу?

б) Колико ће коштати материјал за прављење кућице за пса?

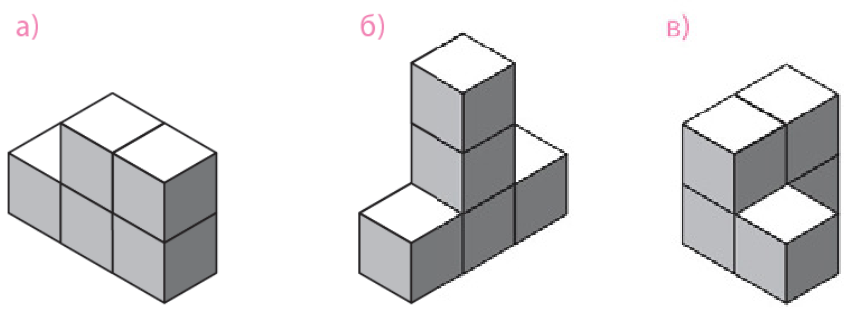
145. Део неке машине је изливен од гвожђа и облика је правилне шестостране призме из које је „извађена" шестострана призма. Израчунај масу тог дела ако је густина ливеног гвожђа 8,9 $\frac{g}{cm^3}$. (Мере на слици су у центиметрима.)



146. Израчунај површину и запремину тела са слике које је састављено од једнаких коцки дужине ивице 6 cm:



147. Израчунати површину и запремину тела са слике које је састављено од једнаких коцки дужине ивице 5 cm :



Предлог задатака за додатни рад

1. Једно теме коцке удаљено је од њене дијагонале 14 cm. Израчунај површину коцке.

2. Израчунај површину и запремину коцке чија је дијагонала једнака дијагонали квадра чије су ивице 1 cm, 5 cm и 7 cm.

3. Израчунај запремину коцке ако је растојање једног темена од средишта наспрамне стране $8\sqrt{6}$ cm.

4. Коцка ивице 12 cm пресечена је равни која садржи дијагоналу једне стране и средишта двеју суседних ивица наспрамне стране. Одреди површину пресека.

5. Растојање центра коцке од једне ивице је $8\sqrt{2}$ cm. Израчунај површину те коцке.

6. Ивице квадра, чија је површина 112 cm^2, односе се као 1 : 2 : 4. Одреди запремину тог квадра.

7. Дијагонале три стране квадра су m, n и p. Одреди ивице квадра.

8. Израчунај запремину квадра чије ивице су у размери 3 : 4 : 12, а дијагонала је 52 cm.

9. Израчунај запремину квадра чије ивице су у размери $m : n : p$, а дијагонала је D.

10. Одреди запремину квадра чије три различите стране имају површине 12 cm^2, 6 cm^2, 18 cm^2.

11. Површине три стране квадра су P_1, P_2 и P_3. Одреди запремину тог квадра.

12. Колико ивица, темена, страна и просторних дијагонала има n-тострана призма?

13. Површине трију страна квадра, које се састају у истом темену, односе се као 4 : 3 : 1. Одреди запремину квадра ако је његова површина 64 cm^2.

14. Израчунај површину коцке ако је њена дијагонала 8 cm.

15. Израчунај збир свих дужина ивица квадра чија је површина 924 cm^2, а дијагонала 26 cm.

16. Основа праве призме је ромб чија је висина $2\sqrt{3}$ cm и оштар угао 60°. Висина призме је једнака дужој дијагонали основе. Израчунај запремину те призме.

17. Дијагонала правилне четворостране призме је 12 cm и са бочном страном призме заклапа угао од 30°. Одреди запремину те призме.

18. Омотач призме чија је основа ромб, има површину 1 560 cm^2. Одреди површину и запремину призме ако је мања дијагонала ромба 10 cm, а ивица 13 cm.

19. Основа четворостране призме је једнакокраки трапез чије су основице 10 cm и 4 cm, а крак 5 cm. Израчунај површину и запремину те призме ако је њена висина једнака средњој линији трапеза.

20. Четворострана призма висине 10 cm има за основу правоугли трапез чије су основице 6 cm и 8 cm и оштар угао 45°. Израчунај запремину те призме.

21. Бочна ивица правог паралелепипеда је 10 cm, ивице основе су 11 cm и 23 cm, а однос дијагонала основе 2 : 3. Одреди површине дијагоналних пресека.

22. Основне ивице правог паралелепипеда су 3 cm и 5 cm, а једна дијагонала основе је 4 cm. Израчунај запремину паралелепипеда ако се зна да мања дијагонала образује са равни основе угао од 60°.

23. Мањи дијагонални пресек правилне шестостране призме је квадрат, а површина већег дијагоналног пресека је $32\sqrt{3}$ cm². Израчунај површину и запремину призме.

24. Одреди површину и запремину призме, која у основи има једнакокраки троугао, чији је крак $4\sqrt{3}$ cm, а угао на основици 30°. Висина те призме је 8 cm.

25. Основа праве призме је једнакокрако-правоугли троугао са катетама 8 cm. Највећа бочна страна призме је квадрат. Израчунај површину те призме.

26. Основа праве призме је правоугли троугао површине $9\sqrt{3}$ cm² и оштрог угла 30°. Површина највеће бочне стране је 8 cm. Одреди запремину те призме.

27. Раван садржи ивицу једне основе и њој наспрамну ивицу друге основе правилне шестостране призме чије су све ивице дужине *a*. Израчунај површину тог пресека.

28. У правилној тространој призми кроз ивицу доње основе и средиште наспрамне бочне ивице конструисана је раван која гради са равни основе угао од 60°. Површина добијеног пресека је $16\sqrt{3}$ cm². Израчунај површину и запремину те призме.

29. Пресек правилне тростране призме $ABCA_1B_1C_1$ и равни која садржи бочну ивицу AA_1 и средишта основних ивица BC и B_1C_1 је квадрат чија је површина 100 cm². Израчунај површину те призме.

30. Израчунај запремину правилне осмостране призме чији је највећи дијагонални пресек квадрат површине 144 cm².

31. Израчунај запремину правилне дванаестостране призме чији је највећи дијагонални пресек квадрат површине 256 cm².

32. Основа призме је паралелограм чије су странице 10 cm и $8\sqrt{2}$ cm, а оштар угао 45°. Ако је висина призме 5 cm, израчунај њену површину.

33. Површине бочних страна праве тростране призме су 64 cm², 80 cm² и 48 cm². Ако је висина призме 16 cm, израчунај запремину те призме.

Питалице

1.	Може ли призма да има четири темена?	да	не
2.	Може ли призма да има пет страна?	да	не
3.	Бочне стране праве призме су увек подударни правоугаоници.	да	не
4.	Да ли висина призме може бити већа од дужине основне ивице?	да	не
5.	Да ли постоји правилна двострана призма?	да	не
6.	У основи правилне тростране призме је правоугли троугао.	да	не
7.	У основи правилне четворостране призме је квадрат.	да	не
8.	Да ли постоји правилна једнакоивична шестострана призма?	да	не
9.	Дијагонални пресек правилне четворостане призме је правоугаоник.	да	не
10.	Површина омотача призме може бити једнака збиру површина основа призме.	да	не
11.	Површина и запремина призме могу имати исту бројевну вредност са различитим мерним јединицама.	да	не

Предлог теста знања

1. Ако је површина једне бочне стране коцке 49 cm^2, колика је њена запремина?

(А) 294 cm^2 (Б) 196 cm^2 (В) 343 cm^2 (Г) 68 cm^2 (Д) 136 cm^2

2. Дијагонала квадра је 13 cm, а основне ивице су 3 cm и 4 cm. Површина квадра је:

(А) 192 cm^2 (Б) 96 cm^2 (В) 144 cm^2 (Г) 118 cm^2 (Д) 92 cm^2

3. Дијагонала бочне стране правилне тростране призме основне ивице 4 cm и висине $4\sqrt{3}$ cm, је:

(А) 4 cm (Б) 12 cm (В) 9 cm (Г) 8 cm (Д) 16 cm

4. Запремина правилне четворостране призме чија је основна ивица 3 cm и површина 150 cm^2, је:

(А) 120 cm^3 (Б) 98 cm^3 (В) 34 cm^3 (Г) 150 cm^3 (Д) 99 cm^3

5. Површина једне бочне стране правилне шестостране призме је 120 cm^2, а однос основне ивице и висине је 3 : 5. Површина ове призме је:

(А) $108\sqrt{3}$ cm^2 (Б) $(216\sqrt{3}+720)$ cm^2

(В) $(54\sqrt{3}+720)$ cm^2 (Г) $828\sqrt{3}$ cm^2 (Д) 828 cm^2

6. Основа праве тростране призме је правоугли троугао са катетама 6 cm и 8 cm. Ако је висина призме једнака хипотенузи основе, онда је површина омотача призме:

(А) 240 cm^2 (Б) 170 cm^2 (В) 340 cm^2 (Г) 680 cm^2 (Д) 136 cm^2

7. Основа праве тростране призме је једнакокраки троугао чија је основица 8 cm и крак 5 cm. Висина призме једнака је висини основе која одговара основици троугла. Запремина ове призме је:

(А) 18 cm^3 (Б) 72 cm^3 (В) 36 cm^3 (Г) 68 cm^3 (Д) 136 cm^3

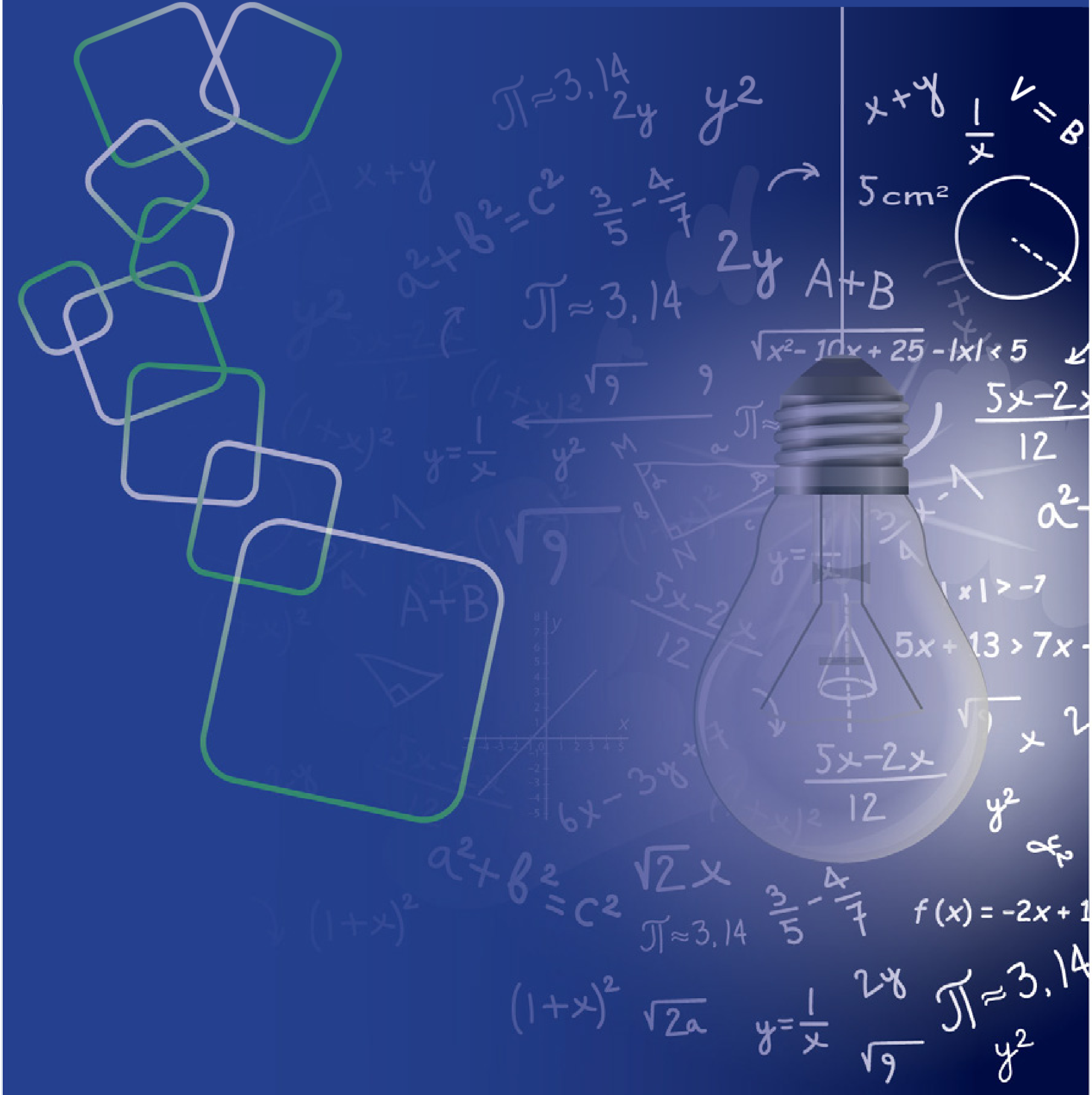
8. Дужа дијагонала правилне шестостране призме је 16 cm и са равни основе образује угао од 60°. Запремина ове призме је:

(А) $576\sqrt{3}$ cm^3 (Б) 192 cm^3 (В) 96 cm^3 (Г) $192\sqrt{3}$ cm^3 (Д) 576 cm^3

Предлог контролне вежбе

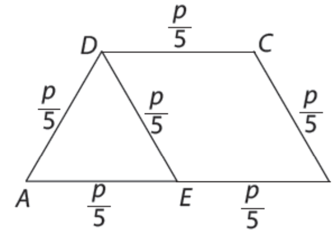
4.1.	Израчунај дијагоналу правилне четворостране призме ако је дијагонала основе 8 cm и висина призме 15 cm.	**12**
4.2.	Израчунај површину дијагоналног пресека правилне четворостране призме ако је обим основе 16 cm и висина призме 12 cm.	**16**
4.3.	Израчунај обим мањег дијагоналног пресека правилне шестостране призме чија је бочна страна обима 30 cm, а основна и бочна ивица су у размери 2 : 3.	**20**
4.4.	Израчунај површину и запремину коцке ивице 10 cm.	**12**
4.5.	Израчунај површину дијагоналног пресека квадра чије су ивице 3 cm, 4 cm, 10 cm.	**16**
4.6.	Растојање центра коцке од једног темена је $\sqrt{3}$ cm. Израчунај површину те коцке.	**20**
4.7.	Израчунај површину омотача правилне шестостране призме ако је основна ивица 10 cm, а обим једне бочне стране 50 cm.	**12**
4.8.	Израчунај површину правилне тростране призме ако је површина основе $36\sqrt{3}$ cm², а висина 10 cm.	**16**
4.9.	Израчунај површину правилне четворостране призме ако је површина једне бочне стране $36\sqrt{3}$ cm² а дијагонала бочне стране са основном ивицом образује угао од 60°.	**20**
4.10.	Израчунај запремину правилне тростране призме ако је основна ивица 12 cm, а висина 4,5 cm.	**12**
4.11.	Развијени омотач правилне шестостране призме је квадрат површине 576 cm². Израчунај запремину те призме.	**16**
4.12.	Израчунај запремину правилне четворостране призме ако је основна ивица 10 cm, а површина омотача је једнака трећини површине призме.	**20**
4.13.	Колико литара воде може да стане у базен димензија 20 m, 18 m и 2 m?	**12**
4.14.	Плоча облика квадра ивица 2 m, 1,5 m, 5 mm изливена је од гвожђа. Колика је маса ове плоче ако је густина гвожђа $\rho = 7{,}8\ \frac{\text{g}}{\text{cm}^3}$?	**16**
4.15.	Школски базен облика квадра је дугачак 8 m, широк 5 m, дубине 2 m. Сваке школске године домар напуни водом седам осмина базена. За одржавање чистоће у базену домар користи таблете хлора. Према упутству, он треба да на 5 000 l воде стави 2 таблете хлора једном у току месеца. Једна таблета хлора кошта 270 динара. Колико ће школа да плати за потребне таблете у току једног месеца?	**20**

РЕШЕЊА



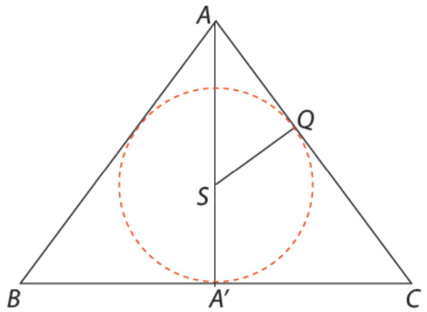
1. СЛИЧНОСТ

1. **а)** 1 : 4; **б)** 1 : 20; **в)** 20 : 7; **г)** 200 : 1. **2.** **б)**; **г)**; **ђ)**.
3. **а)** да; **б)** да; **в)** не; **г)** не; **д)** да.
4. **а)** $d = 11$; **б)** $c = 9$; **в)** $b = 14$. **5.** 78 km. **6.** 96 mm.
7. 10 mm и 7 mm. **8.** 6 400 m².
9. да. **10.** да, $d = 39$ cm. **11.** не.
12. **а)** AB да, AC да; **б)** AB да, AC не; **в)** AB да, AC да; **г)** AB не, AC не; **д)** AB не, AC не; **е)** AB не, AC да.
13. да. **14.** не. **15.** да. **16.** не.
17. **а)** $x = 10$ cm, $y = 20$ cm; **б)** $x = 12$ cm, $y = 10$ cm; **в)** $x = 6{,}4$ cm, $y = 9$ cm; **г)** $x = 12$ cm, $y = 15$ cm; **д)** $x = 8$ cm, $y = 12{,}5$ cm; **е)** $x = 12$ cm, $y = 10$ cm; **ж)** $x = 15$ cm, $y = 50$ cm.
18. $ST = 6$ m, $TR = 3$ m, $PR = 9$ m.
19. $KX = 2$ cm, $KM = 8$ cm. **20.** $CE = 9$ cm, $DE = 4{,}5$ cm.
21. $PB = 10$ m, $PS = 6$ m.
22. $CN = 8$ cm, $BM = 10$ cm, $AC = 12$ cm, $AB = 15$ cm.
23. $OA_2 = 7{,}5$ cm, $OB_1 = 6$ cm, $B_1B_3 = 9$ cm, $A_1A_2 = 2{,}5$ cm, $A_2A_4 = 11{,}25$ cm, $B_3B_4 = 7{,}5$ cm.
24. $CC_1 = 6{,}4$ cm, $SC_1 = 9{,}6$ cm, $B_1C_1 = 3{,}6$ cm, $AA_1 = 1{,}6$ cm, $SA_1 = 2{,}4$ cm, $A_1B_1 = 8{,}4$ cm.
25. $CD = 12$ cm, $DE = 11{,}52$ cm. **26.** $DE = 3$ cm.
27. Погледај пример 1 из лекције 1.3.
28. Исто као претходни задатак.
29. Погледај пример 2 из лекције 1.3.
30. Исто као претходни задатак.
31. Поделити дуж a на 5 делова и конструисати троугао чије су странице a, $\frac{3a}{5}$ и $\frac{3a}{5}$.
32. Поделити дуж b на 7 делова и конструисати троугао чије су странице $\frac{3b}{7}$, b и b.
33. Поделити дуж x на 7 делова и конструисати правоугли троугао чије су катете $\frac{2x}{7}$ и $\frac{5x}{7}$.
34. Поделити дуж p на 7 делова и конструисати троугао чије су странице $\frac{3p}{7}$, $\frac{2p}{7}$ и $\frac{2p}{7}$.
35. Поделити дуж m на 11 делова и конструисати троугао чије су странице $\frac{2m}{11}$, $\frac{5m}{11}$ и $\frac{4m}{11}$.
36. Поделити дуж x на 6 делова и конструисати правоугаоник чије су суседне странице $\frac{2x}{6}$ и $\frac{x}{6}$.
37. Поделити дуж m на 4 дела и конструисати ромб чије су дијагонале $\frac{m}{4}$ и $\frac{3m}{4}$. Можемо конструисати и правоугаоник чије су суседне странице $\frac{m}{4}$ и $\frac{3m}{4}$, па ће средишта страница овог правоугаоника бити темена траженог ромба.
38. Поделити дуж p на 5 делова, конструисати једнакостраничан AED троугао странице $\frac{p}{5}$ и затим конструисати трапез $ABCD$.



39. **а)** Пропорцију $a : x = b : c$ можемо записати и као $b : c = a : x$ и затим поступити као у примеру 4 из лекције 1.3.
б) Пропорцију $x : a = b : c$ можемо записати и као $c : b = a : x$ и затим поступити као у примеру 4 из лекције 1.3.
40. **а)** Дуж a конструисати као хипотенузу правоуглог троугла чије су катете 3 cm и 2 cm и затим поступити као у примеру 4 из лекције 1.3.
б) Погледај пример под а) у претходном задатку.
41. 1 и 6, 2 и 4 и 7, 3 и 5. **42.** да. **43.** не. **44.** 102°.
45. да. **46.** да. **47.** AC=15 cm, $A'B' = 28$ cm.
48. $KN = 5{,}4$, $MN = 9$, $PQ = 7{,}2$, $QR = 8$.
49. Свака од страница троугла PQR је средња линија одговарајуће странице троугла ABC, одакле следи да је $k = 0{,}5$.
50. $PQ = 24$ cm, $QR = 42$ cm, $PR = 48$ cm.
51. $PQ = 20$ cm, $PR = 37{,}5$ cm, $QR = 42{,}5$ cm.
52. 39 cm и 65 cm.
53. $a = 8$ cm, $b = 5$ cm, $a' = 28$ cm, $b' = 17{,}5$ cm.
54. $a = 12$ cm, $b = 20$ cm, $a' = 33$ cm, $b' = 55$ cm.
55. 1 и 6, 2 и 5, 3 и 7, 4 и 8. **56.** 13 m. **57.** 210 cm.
58. Да, по ставу УУ. **59.** Да, по ставу СУС.
60. $BD = 66$ cm. **61.** Не.
62. $AS = 18$ cm, $SC = 8$ cm.
63. **а)** $CD = 21$ cm; **б)** $DM = 15$ cm; **в)** $AB = 72$ cm; **г)** $BM = 27$ cm, $DM = 15$ cm.
64. **а)** $\sphericalangle PQA = \sphericalangle DQC$ (унакрсни углови), $\sphericalangle QAP = \sphericalangle QCD$ (углови са паралелним крацима), па су троуглови APQ и CDQ слични по ставу УУ; **б)** $AP = 15$ cm, $DQ = 16$ cm.
65. $BD = 28$ cm.
66. $\sphericalangle QAS = \sphericalangle CAP$, $\sphericalangle SQA = \sphericalangle APC = 90°$, па су троуглови AQS и APC слични по ставу УУ.

67. Из $AA' = 8$ cm и $SA' = r = 3$ cm следи $AS = 5$ cm, а из правоуглог троугла AQS добијамо да је $AQ = 4$ cm (види слику). Троуглови AQS и $AA'C$ су слични (погледај претходни задатак), одакле је $AQ : AA' = SQ : A'C$, $A'C = 6$ cm, па је $BC = 12$ cm, $AB = AC = 10$ cm и $O_{ABC} = 32$ cm.



68. **а)** Слични су по ставу УУ јер је $\sphericalangle BCB' = \sphericalangle ACA'$ и $\sphericalangle CB'B = \sphericalangle AA'C = 90^\circ$; **б)** слични су по ставу УУ јер је $\sphericalangle BA'H = \sphericalangle HB'A = 90^\circ$ и $\sphericalangle A'HB = \sphericalangle AHB'$ (унакрсни углови); **в)** $AA' = 20$ cm; **г)** $AB' = 7{,}5$ cm.

69. $O_{ABC} = 38{,}4$ cm. **70.** $P_{CQPR} = 46{,}08$ cm^2.

71. $O_{ABCD} = 184$ cm.

72. **а)** $h = 15$ cm, $q = 11{,}25$ cm, $b = 18{,}75$ cm;
б) $b = 15$ cm, $p = 16$ cm, $a = 20$ cm;
в) $h = 6$ m, $a = 10$ m, $b = 7{,}5$ m; **г)** $q = 18$ cm, $p = 32$ cm, $a = 40$ cm; **д)** $p = 3{,}6$ cm, $q = 6{,}4$ cm, $b = 8$ cm; **ђ)** $h = 14{,}4$ cm, $p = 10{,}8$ cm, $q = 19{,}2$ cm.

73. $a = 8\sqrt{13}$ cm, $b = 12\sqrt{13}$ cm.

74. 12 cm и 16 cm. **75.** $AC = 30$ cm, $BD = 28{,}8$ cm.

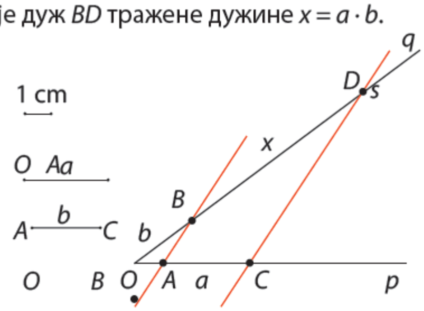
76. $AB = AD = 4\sqrt{13}$ cm, $BC = CD = 6\sqrt{13}$ cm.

77. $B = 25$ cm, $P = 300$ cm^2. **78.** 16 cm и 20 cm.

79. $O_{ABCD} = 70$ cm, $P_{ABCD} = 300$ cm^2. **80.** $BC = 4\sqrt{3}$ cm.

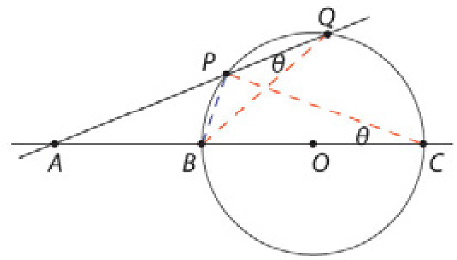
Решења задатака за додатни рад

1. На полуправој Op конструишимо тачке A и C, тако да је $OA = 1$ cm и $AC = a$, а на полуправој Oq тачку B, тако да је $OB = b$. Кроз тачку C конструишимо праву s која је паралелна правој AB. Пресечну тачку праве s и полуправе Oq означимо са D. На основу Талесове теореме следи да је $\frac{OA}{OB} = \frac{AC}{BD}$, односно $\frac{1}{b} = \frac{a}{x}$, па је дуж BD тражене дужине $x = a \cdot b$.

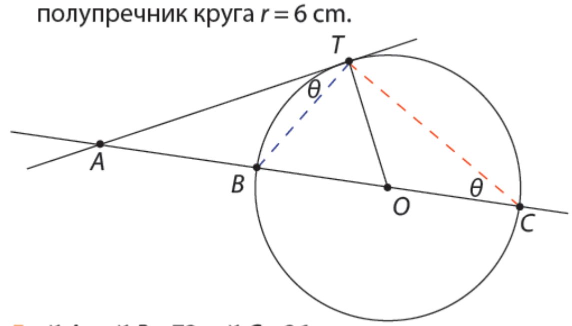


2. Искористи претходни задатак.

3. Повуцимо тетиву BP. Углови $\sphericalangle BCP$ и $\sphericalangle BQP$ су једнаки θ као периферијски над истом тетивом (види слику). Сада тврдимо да су троуглови ACP и AQB слични по ставу УУ (угао A им је заједнички), па су одговарајуће странице пропорционалне, тј. важи $\frac{AC}{AQ} = \frac{AP}{AB}$. Како је $AB = AO - OB$ и $AC = AO + OC$, добијамо да је $\frac{16}{AQ} = \frac{8}{6}$, односно $AQ = 12$ cm. Коначно, како је $PQ = AQ - AP$, следи да је $PQ = 4$ cm.



4. Повуцимо тетиву BT и означимо угао $\sphericalangle BTA = \theta$. Како је $OT \perp AT$, тада је $\sphericalangle OTB = 90^\circ - \theta$. Троугао OTB је једнакокраки ($OT = OB$), па је и $\sphericalangle TBO = 90^\circ - \theta$ (види слику). Збир унутрашњих углова у троуглу OTB је 180°, одакле следи да је $\sphericalangle BOT = 2\theta$. Угао $\sphericalangle BOT$ је централни, а $\sphericalangle BCT$ периферијски угао над тетивом BT, па је $\sphericalangle BCT = \theta$. Дакле, $\sphericalangle BTA = \sphericalangle BCT = \theta$, па су троуглови ABT и ATC слични по ставу УУ (угао у темену A им је заједнички). Из сличности ових троуглова следи и пропорционалност одговарајућих страница, одакле следи $\frac{AB}{AT} = \frac{AT}{AC}$, па добијамо да је $AC = 16$ cm. Сада је пречник круга $BC = AC - AB = 12$ cm, одакле је полупречник круга $r = 6$ cm.



5. $\sphericalangle A = \sphericalangle B = 72^\circ$, $\sphericalangle C = 36^\circ$.

6. $\sphericalangle A = \sphericalangle B = 36^\circ$, $\sphericalangle C = 108^\circ$.

7. Погледај решење 67. задатка.

8. Ако је коефицијент сличности троуглова ABC и $A'B'C'$ једнак k, тада је $AB = k \cdot A'B'$ и $h_c = k \cdot h_{c'}$. Множењем левих и десних страна, после краћег рачуна, добијамо да је $k = \sqrt{2}$.

9. Погледај пример 2 из лекције 1.6.

12. 18,75 cm и 25 cm.

Питалице – решења:

1. да. **2.** не. **3.** да. **4.** не. **5.** да. **6.** не. **7.** не. **8.** не. **9.** не. **10.** да.

Предлог теста знања – решења:

1. В. **2.** Б. **3.** Д. **4.** Г. **5.** Б. **6.** Б. **7.** А. **8.** А.

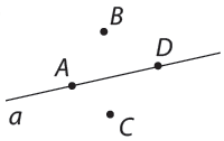
Предлог контролне вежбе – решења:

1.1. Погледај пример 2 из лекције 1.3. (Примена Талесове теореме у конструкцијама). **1.2.** 36 cm. **1.3** 31 cm. **2.1** 30 cm. **2.2** $O_{ABC} = 48$ cm, $O_{PQR} = 32$ cm. **2.3.** $\measuredangle A = \measuredangle B = 72^\circ$, $\measuredangle C = 36^\circ$. **3.1.** 15 m. **3.2.** 2 : 3. **3.3.** 16 cm². **4.1.** 150 cm². **4.2.** $O = 60$ cm, $P = 150$ cm². **4.3.** $O = 300$ cm, $P = 3\,750$ cm².

2. ТАЧКА, ПРАВА, РАВАН

1. $M \notin p; N \in p; Q \notin p$.

2.

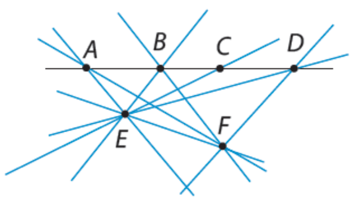


3. 6.

4. Укупан број тачака на датим правама је 8, из чега следи да је укупан број дужи $\frac{8 \cdot 7}{2} = 28$.

5. 17. **6.** 20. **7.** 28.

8. Тачке *A, B, C* и *D* су на једној правој, а тачке *E* и *F* ван те праве. Тада је број правих $4 \cdot 2 + 1 + 1 = 10$.



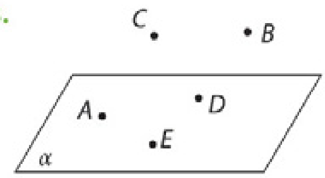
9. **а)** 21; **б)** 66; **в)** $\frac{n \cdot (n-1)}{2}$.

10. Нека су тачке $A_1, A_2 \ldots A_{10}$ на једној правој, а тачке $A_{11}, A_{12} \ldots A_{20}$ ван те праве. Највише правих овим скупом тачака је одређено када међу тачкама $A_{11}, A_{12} \ldots A_{20}$ не постоје три тачке на једној правој. Такође, ни по две тачке из овог скупа нису на једној правој са ма којом тачком $A_1, A_2 \ldots A_{10}$. Тада је одређено $10 \cdot 10 = 100$ правих (свака тачка из другог скупа са сваком тачком из првог скупа). Затим: $\frac{10 \cdot 9}{2} = 45$ правих је одређено тачкама само другог скупа. И још 1 права на којој су тачке $A_1, A_2 \ldots A_{10}$. Дакле, укупно 146 правих.

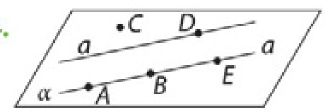
11. 15.

12. 21.

13.



14.

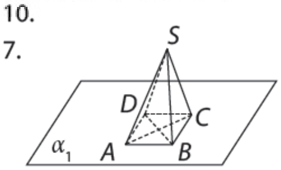


15. **а)** Нису колинеарне; **б)** ван те праве; **в)** праве; **г)** паралелне.

16. **а)** *B, C, G, F*; **б)** *A, D, E, H*. **17.** а), г).

18. 10.

19. 7.



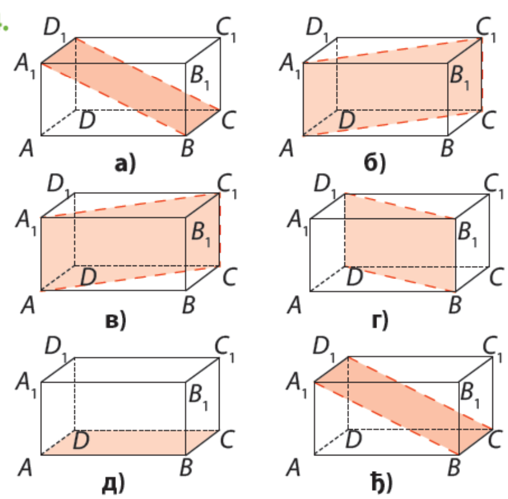
20. 20.

21. Највећи број равни је одређен овим скупом правих; праве *a, b* и *c* припадају трима различитим равнима $(\alpha_1(a, b), \alpha_2(a, c), \alpha_2(b, c))$. Дакле, укупно 3 равни.

22. $\frac{4 \cdot 3}{2} = 6$ равни.

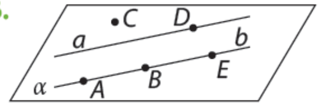
23. 8.

24.



25. 12.

26.



27. **б)**. **28.** **а)**.

29. **а)** $p_1(A,A_1), p_2(B,B_1), p_3(C,C_1)$;

б) $p_1(B,C), p_2(A,C), p_3(C,D), p_4(C_1,D_1)$,
$p_5(B_1,C_1), p_6(A_1,C_1)$;

в) $p_1(D_1,C_1), p_2(B_1,C_1), p_3(B,C), p_4(C,D)$,
$p_5(A,C), p_6(A,C_1), p_7(A_1,C_1), p_8(A_1,C)$;

г) $p_1(A,D), p_2(A_1,D_1), p_3(A_1,B_1), p_4(A,B)$,
$p_5(B,D_1), p_6(D,B_1), p_7(B,D), p_8(B_1,D_1)$,
$p_9(A,D_1), p_{10}(D,A_1), p_{11}(A,B_1), p_{12}(B,A_1)$.

30. Праве *a* и *c* су или паралелне, или се секу.

31. Праве *a* и *c* могу бити паралелне, могу се сећи и могу бити мимоилазне.

32. 4. **33.** 9.

34. Највише $4 \cdot 3 = 12$ пресечних тачака.

35. $p_1(A,D), p_2(A_1,D_1), p_3(A_1,B_1), p_4(A,B), p_5(B,D_1)$,
$p_6(D,B_1), p_7(B,D), p_8(B_1,D_1), p_9(A,D_1), p_{10}(D,A_1)$,
$p_{11}(A,B_1), p_{12}(B,A_1)$.

36. Мимоилазне.

37. **а)** Поклапају се; **б)** секу се;
в) или су паралелне, или су мимоилазне.

38. **б)**; **г)**.

39. **а)** $p_1(A,D), p_2(B,C), p_3(B_1,C_1)$;

б) $p_1(A,A_1), p_2(D,D_1), p_3(A,B), p_4(C,D)$,
$p_5(D,C_1), p_6(A,B_1)$;

в) $p_1(A,A_1), p_2(D,D_1), p_3(A,D_1), p_4(A,C_1)$,
$p_5(A_1,C_1), p_6(D_1,C_1), p_7(D,B_1), p_8(D_1,B_1)$;

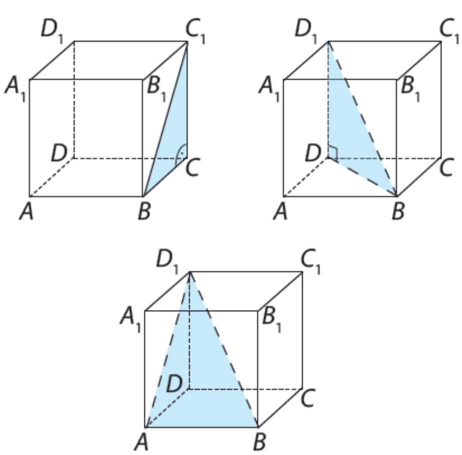
г) $p_1(D,C), p_2(C,C_1), p_3(D_1,C_1), p_4(D,D_1)$.

40. $\alpha_1(p, r), \alpha_2(q, r), \alpha_3(p, A), \alpha_4(q, B)$.

41. 6.

42. 5.

43.



44. **а)** Секу се; **б)** паралелна; **в)** секу се;
г) паралелна; **д)** секу се.

45. **а)** $\perp$; **б)** $\parallel$; **в)** $\subset$; **г)** $\perp$. **46.** б).

47. Праве *a* и *b* могу бити паралелне, или могу бити мимоилазне.

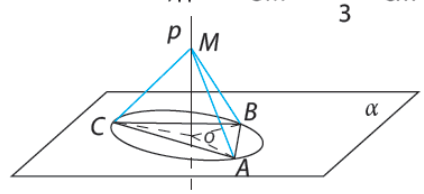
48. $\sphericalangle CSM = 90^\circ$.

49. Из $AD \perp \alpha$ следи $AD \perp AB, AD \perp AC$.
Из $AD = AD, DB = DC, \sphericalangle DAB = \sphericalangle DAC = 90^\circ$.
Из подударности следи $AB = AC$, што је требало и доказати.

50. 12 cm. **51.** **а)** 10 cm; **б)** 5 cm. **52.** 5 cm.

53. **а)** 5 cm; **б)** 2,5 cm.

54. Нека је $a = AB$ страница једнакостраничног троугла *ABC*, тада су $OA = OB = OC = \dfrac{a\sqrt{3}}{3}$ полупречници описане кружнице око троугла *ABC*. Из правоуглог троугла *MOC* следи $OM^2 = MC^2 - CO^2$, дакле $OM = \dfrac{20\sqrt{6}}{3}$ cm.



55. $OM = 6\sqrt{2}$ cm.

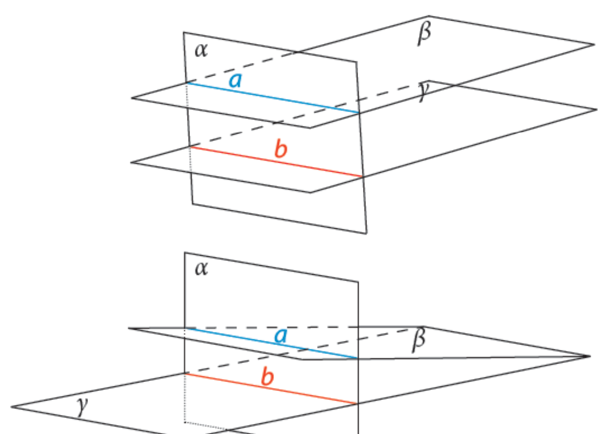
56. Равни α, β и γ су међусобно паралелне, раван δ је ортогонална на α, β и γ.

57. Праве *a* и *b* могу бити паралелне или мимоилазне.

58. Праве *a* и *b* могу бити паралелне или мимоилазне, или могу да се секу.

59. Ако права *m* није у равни α, тачни су а) и б).
Ако је права *m* у равни α, тада могу бити тачни сви одговори.

60. Равни α и β могу бити паралелне, или се могу сећи.



61. **а)** Секу се; **б)** паралелне су; **в)** ортогоналне.

62. α_1 (A, B, C, D) и α_2 (A_1, B_1, C_1, D_1);
β_1 (A, D, D_1, A_1) и β_2 (B, C, C_1, B_1);
γ_1 (A, B, A_1, B_1) и γ_2 (B, C, C_1, B_1).

63. **а)** Тачка; **б)** тачка или дуж.

64. **а)** Дуж је ортогонална на пројекцијску раван.
б) Дуж је паралелна са пројекцијском равни.
в) Дуж је коса према пројекцијској равни.

65. Пројекције две једнаке и паралелне дужи на раван су две једнаке и паралелне дужи, две тачке или једна дуж.

66. **а)** B; **б)** A; **в)** A; **г)** AB.

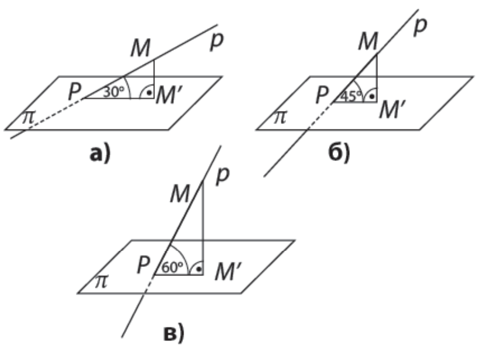
67. 12 cm. **68.** 17 cm. **69.** $6\sqrt{3}$ cm.

70. **а)** 5 cm. **б)** $2\sqrt{10}$ cm. **71.** 9 cm. **72.** 13 cm.

73. $BB' = 15$ cm или $BB' = 5$ cm.

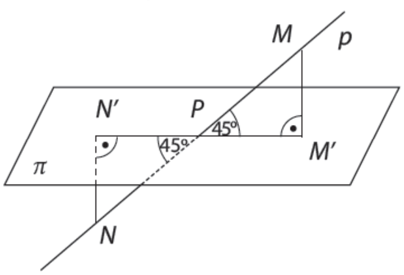
74. б). **75.** а), г). **76.** а) и б).

77. **а)** $MP = 24$ cm; **б)** $MP = 12\sqrt{2}$ cm;
в) $MP = 4\sqrt{3}$ cm.



78. **а)** $MN = 12$ cm; **б)** $6\sqrt{2}$ cm; **в)** $4\sqrt{3}$ cm.

79. $MM' = 10$ cm, $NN' = 6$ cm. Троуглови $PM'M$ и $PN'N$ су једнакокрако-правоугли, па следи да је $PM' = MM' = 10$ cm и $N'P = NN' = 6$ cm. Ортогонална пројекција $M'N' = PM' + N'P = 10 + 6 = 16$ cm, а $MN = 16\sqrt{2}$ cm.

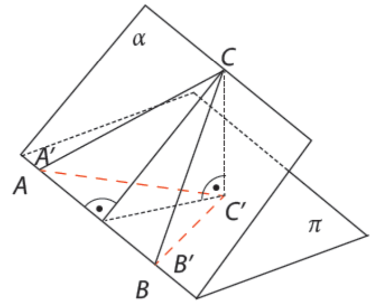


80. **а)** $AB = 16\text{cm}, A'B' = 8\sqrt{3}\text{cm}$;
б) $AB = 8\sqrt{2}\text{cm}, A'B' = 8\text{cm}$;
в) $AB = \dfrac{16\sqrt{3}}{3}\text{cm}, A'B' = \dfrac{8\sqrt{3}}{3}\text{cm}$.

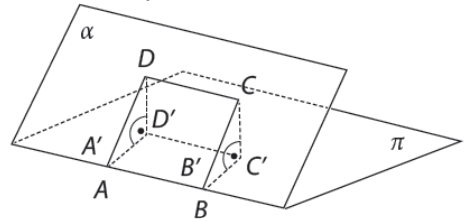
81. Тачке A' и B' су, редом, ортогоналне пројекције тачака A и B на пројекцијску раван. Четвороугао $B'BAA'$ је правоугли трапез чије су основице $BB' = 29$ cm и $AA' = 17$ cm. Нека је тачка S' ортогонална пројекција тачке S на раван. Дуж SS' је средња линија трапеза:

$$SS' = \frac{AA' + BB'}{2} = \frac{29\text{cm} + 17\text{cm}}{2} = 23\text{ cm}.$$

82. $SS' = 6$ cm. **83.** $C_1C' = 3$ cm, $P = 6$ cm².



84. $BC' = 4\sqrt{2}$ cm, $P = 24\sqrt{2}$ cm^2.



85. $BC' = 4\sqrt{2}$ cm, $P = 16\sqrt{2}$ cm^2.

86. Коцка.

87. Површ је састављена од троуглова, има 8 страна, 12 ивица и 6 темена.

88. 12 темена, 18 ивица и 8 страна.

89. 24 темена, 14 страна, 36 ивица.

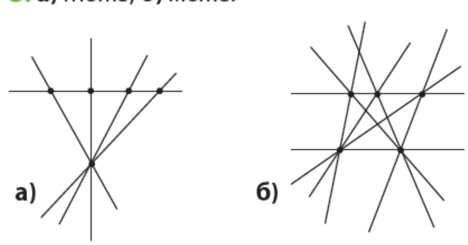
90. д). **91.** Први, други, трећи и четврти печат.

92. в). **93.** а).

Решења задатака за додатни рад

1. Најмање 1, највише 45. **2.** 21.

3. **а)** Може; **б)** може.

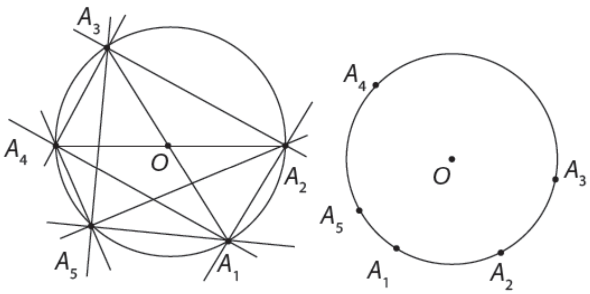


в) Не може, паровима датих тачака највише је одређено 10 правих.

4. 16. **5.** 11.

6. **а)** Паровима ових тачака је одређено најмање 11 правих када два пара тачака одређују пречник.

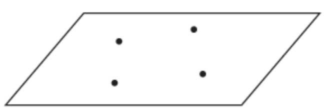
б) Паровима ових тачака је одређено највише 15 правих када не постоји пар тачака који одређује пречник.



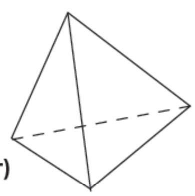
7. **а)** 35; **б)** 120; **в)** $\dfrac{n\cdot(n-1)\cdot(n-2)}{6}$.

8. 210 правих, 1 330 равни.

9. **а)** Може (види слику); **б)** не може; **в)** не може; **г)** може (види слику); **д)** не може.



а)



г)

10. 12. **11.** 36. **12.** $11\cdot 5+2=57$. **13.** 11.

14. Најмање 3 равни, највише 8 равни.

15. Најмање 1 раван, највише 21 раван.

16. Бесконачно. **17.** 20.

18. **а)** Могуће; **б)** могуће; **в)** могуће ако c не припада равни одређеном правама a и b.

19. $p_1(A,B), p_2(A',B'), p_3(D',C')$.

20. $p_1(A,D), p_2(B,C), p_3(C,C'), p_4(D,D')$.

21. 12.

22. **а)** Може, ако дуж AB припада правој p која гради угао α са пројекцијском равни.

б) Може, ако дуж AB припада правој p паралелној пројекцијској равни.

в) Не може.

23. Угао износи 30°. Тражени угао не зависи од положаја крајева дужи у односу на пројекцијску раван.

24. $\sqrt{2}$. **25.** 30°. **26.** 5 cm.

Питалице – решења:

1. да. **2.** не. **3.** не. **4.** не. **5.** да. **6.** не. **7.** да. **8.** не. **9.** не. **10.** не. **11.** да.

Предлог теста знања – решења:

1. А. **2.** В. **3.** Д. **4.** В. **5.** А. **6.** Б. **7.** Г. **8.** В.

Предлог контролне вежбе – решења:

2.1. 15. **2.2.** 14. **2.3.** 12.

2.4. **а)** AB, CD, BB', CC'; **б)** $AD, A'D', B'C'$;
в) $A'B', C'D', AA', DD'$.

2.5. Пет тачака одређују једну раван, уколико све тачке припадају тој равни. Највише је одређено 10 равни, уколико ниједна од 4 тачке не припадају једној равни.

2.6. 7.

2.7. **а)** $\alpha(C, C', D', D)$;
б) $\alpha_1(A, D, D', A'), \alpha_2(B, C, C', B'), \alpha_3(A, B, C, D)$, $\alpha_4(A', B', C', D')$.

2.8. 8. **2.9.** 15. **2.10.** $A'B' = 7$ cm. **2.11.** $A'B' = 12$ cm.

2.11. $\alpha = 60°$.

ЛИНЕАРНЕ ЈЕДНАЧИНЕ И НЕЈЕДНАЧИНЕ 3.

1. **а)** Једнакост $16 : 2 = 11 - 3 = 8$ је бројевна.

б) Једнакост $10 - 3a = 1$ је једначина.

в) Једнакост $81 = 5^2 + 55 = 80$ није тачна.

г) Једнакост $10 \cdot 8 = 200 : 20 + 70 = 80$ је тачна.

2. Добијају се нумеричке једнакости $12 : 4 = 9 - 6 = 3$ и једначине $3y - 15 = 12 : 4$ и $3y - 15 = 9 - 6$.

3. **а)** $17 - 4 \cdot 3 = 5$; **б)** $7b + 8 = 9$.

4. Три; $4c - 9 = 3c + 12$, $4c - 9 = 6 - 11$ и $3c + 12 = 6 - 11c$.

5. Само број 1, јер је $5 \cdot 1 - 9 = 2 \cdot 1 - 6 = -4$.

6. $2y - 4 = 10$.

7. Једнакост је $7 - 5 = 2$. Неке од могућих једначина су $5 + x = 7$, $2(x - 5) = 7$, $7(x + 2) = 5$.

8. Неке од могућих једначина су: $2 \cdot (x - 3) + x = 4$, $2 \cdot x - (3 + x) = 4$, $(2 \cdot x - 3) + x = 4$.

9. Тражена једначина је $n + (n + 1) + (n + 2) = 39$ и има једну непознату.

10. Тражена једначина је $2(a + b) = 24$ и има две непознате.

11. Једначине $x + 3 = x$ и $2y = 2(y + 1)$ немају решења.

12. **а)** $2m = 1$; **б)** $m + 6 = 0$.

13. Једначине $x + x = 2x$ и $x \cdot 0 = 0$ имају бесконачно много решења.

14. Јесу, јер обе имају решење 9. $5 \cdot 9 = 45$ и $3 \cdot 9 + 7 = 34$.

15. Зато што је скуп решења прве једначине $S_1 = \{6\}$, а скуп решења друге једначине $S_2 = \{-6, 6\}$.

16. Једначине $6z = 54$ и $63 : z = 7$, тј. $7z = 63$ су еквивалентне и линеарне (имају решење 9). Једначина $z^2 - z = 72$ има решења –8 и 9 и није линерана нити еквивалентна са претходном.

17. Јесу, јер обе немају решења у скупу реалних бројева, тј. $S_1 = S_2 = \varnothing$.

18. $12x = 20$, $3x = 5$, $x = 0{,}6$.

19. $7a - 6 = 5$, $b^2 + 5 = 21$.

20. Ако је n неки природан број, онда једначина $2ny + 17n = 0$ за сваки природан број n дефинише бесконачно много еквивалентних једначина.

21. Зато што прва једначина има скуп решења $S_1 = \{-10, 10\}$, а друга $S_2 = \{10\}$.

22. Прва једначина има скуп решења $S_1 = \{6\}$, а скуп решења друге једначине је $S_2 = \{-6, 6\}$.

23. Јесу, јер је $S_1 = S_2 = S_3 = \{0\}$.

24. $9x = 63$, $x = 7$, па је $m \cdot 7 = 77$, $m = 77 : 7 = 11$.

25. Из $5y + 20 = 0$, следи да је $y = -4$. Тада је $11y = -44 = n$.

26. Зато што је $S_1 = 14 \neq S_2 = \{14, -14\}$.

27. Једначине су еквивалентне, јер је $S_1 = S_2 = R$.

28. Јесте, јер из $\frac{1}{x} = \frac{4}{3}$ следи (због једнакости реципрочних вредности) да је $\frac{x}{1} = \frac{3}{4}$ $(x \neq 0)$, а то је очигледно линеарна једначина.

29. Није, јер нема облик $ay = b$.

30. **а)** $x = 2$; **б)** $y = 9$; **в)** $z = 3$.

31. **а)** $a = 13$; **б)** $b = 10$; **в)** $c = 4$.

32. **а)** $x = -1$; **б)** $y = 1$.

33. **а)** $x = 0$; **б)** $y = 0$.

34. Прва једначина има скуп решења $S_1 = \{1\}$, а друга $S_2 = \{0\}$. Нису еквивалентне.

35. Прва једначина је еквивалентна са $3y = 25$, а друга са $12y = 15$, и обе су линеарне.

36. **а)** Из $n + n + 1 + n + 2 = n + 3 + n + 4$, следи $3n + 3 = 2n + 7$ и $n = 4$ $(4 + 5 + 6 = 7 + 8)$.
б) Из $n + n + 2 + n + 4 = n + 1 + n + 3$, следи $3n + 6 = 2n + 4$ и $n = -2$ $(-2 + 0 + 2 = -1 + 1)$.

37. Дата једначина је еквивалентна са $3x = 9$, тј. $x = 3$ и све екивалентне једначине су $ax = 3a$, где је a било који реалан број изузев 0.

38. Све једначине облика $ax + 13a = 0$ (a било који реалан број изузев 0).

39. Прва једначина има скуп решења $S_1 = \{1\}$, а друга $S_2 = R$ (цео скуп реалних бројева) и због тога нису еквивалентне.

40. **а)** $x = 3$; **б)** $a = 3$; **в)** $b = -\frac{1}{3}$; **г)** $c = 8$.

41. **а)** $x = 3$; **б)** $y = 2$; **в)** $z = -\frac{7}{3}$.

42. **а)** $\frac{3}{2}$ (једначину помножи са 6);
б) $y = 20$; **в)** $z = -\frac{24}{5}$.

43. **а)** $x = 2a$; **б)** $a = \frac{x}{2}$.

44. **а)** $x + 7 = 0$; **б)** $2y = 8$; **в)** $z\sqrt{5} = 5$; **г)** $4a = 3$.

45. Решење теста 204 проверите на платформи *еЗбирка*, јер се за сваког корисника на платформи http://www.ezbirka.math.rs/ генерише посебна и различита комбинација задатака.

46. **а)** $a = 7$; **б)** $b = \frac{3}{11}$; **в)** $c = -\frac{5}{11}$.

47. **а)** $x = 42$; **б)** $a = \frac{105}{19}$; **в)** $b = -5$.

48. $y = -34$; **49.** $x = \frac{4}{3}$.

50. $a = 3$. **51.** $x = 1$. **52.** $x = \frac{11}{18}$.

53. **а)** $x = 3$; **б)** $y = \frac{2}{3}$; **в)** Увођењем смене $\frac{1}{z} = x$ добија се: $\frac{x}{2} + \frac{2x}{3} = 5 + \frac{3x}{4}$ и $x = 12$, $z = \frac{1}{12}$.

54. **а)** $C = \frac{1}{2}$; **б)** $x = 2$.

55. **а)** $x = 0$; **б)** $y = -1$; **в)** $z = 1$. **56.** $x = 7$.

57. **а)** Нема решења; **б)** једно решење, $x = -2$.

58. **а)** Једначина има решење $x = 0{,}5$.
б) Једначина има бесконачно решења.
в) Једначина нема решења.
г) Једначина има решење $x = 0$.

59. **а)** Прва једначина има једно решење, а друга има бесконачно много решења, па нису еквивалентне.
б) Прва једначина нема решења, а друга има решење $x = -36$, па нису еквивалентне.

60. Прва једначина има решење 3. Да би једначине биле еквивалентне $3a = 6$ и $a = 2$.

61. За ма коју вредност реалног броја b, једначина $5x = b$ ће имати јединствено решење $x = \frac{b}{5}$.

62. Ако је $a = 0$, једначина $ax = 2021$ је немогућа.

63. Једначина $(x-3)(x-4) = (x-2)(x-5)$ је еквивалентна са $12 = 10$ и нема решења.

64. Једначина $ax = 12$ је за $a = 0$ немогућа, а за све остале вредности реалног броја a једначина има јединствено решење $\frac{12}{a}$.

65. Ако је $a = b = 0$, једначина $ax = b$ има бесконачно много решења.

66. Алгебарским трансформацијама једначина се своди на $(m-2)(a+2)x = m-2$.

а) Ако је $m \neq 2$ и $m \neq -2$, једначина има јединствено решење $x = \frac{1}{m+2}$.

б) Ако је $m = -2$, једначина постаје $0 \cdot x = -4$ и нема решења.

в) Ако је $m = 2$, једначина постаје $0 \cdot x = 0$ и има бесконачно много решења.

г) Једначина има целобројна решења, ако је $(m+2) \in \{-1, 1\}$, тј. ако је $m \in \{-3, -1\}$.

67. $4x + 3 = 4(x-1)$, $5(y-7) = 5y - 35$ $(x, y \in R)$.

68. **а)** $S = \left\{\frac{3}{2}, -\frac{3}{2}\right\}$; **б)** $S = \{0, 2\}$; **в)** $S = \{-7, 7\}$.

69. Једначина се своди на $x^2 - 8x = 0$, и њен скуп решења је $S = \{0, 8\}$.

70. Једначине: (J_1) и (J_3) имају скуп решења $S = \{-9, 9\}$ и еквивалентне су.
Једначине: (J_2) и (J_4) имају скуп решења $S = \{9\}$ и еквивалентне су.

71. **а)** Једначине су еквивалентне и имају скуп решења $S = \{0\}$. **б)** Једначине су еквивалентне и имају скуп решења $S = \{3\}$.
в) Једначине су еквивалентне и имају скуп решења $S = \varnothing$, тј. немају решења.

72. Решење теста 212 проверите на платформи *еЗбирка*, јер се за сваког корисника на платформи http://www.ezbirka.math.rs/ генерише посебна и различита комбинација задатака.

73. **а)** $x = 3$; **б)** $y = 8$; **в)** $z = 10$. **74.** Само једно: 0.

75. **а)** $y = 0$; **б)** $y \in \{-3, 0, 3\}$.

76. Једначина $(y-3)^2 = 9 - y^2 = (3-y)(3+y)$ има два решења: 0 и 3.

77. Једначина $(3x-4)^2 - (2x+19)^2 =$
$= (3x - 4 - 2x - 19)(3x - 4 + 2x + 19) = 0$ има два решења: 23 и –3.

78. Решење једначине $(x+1)^2 = x^2 + 2x + 1$ је било који реалан број. Решење друге једначине је било који негативан реалан број. Дате једначине нису еквивалентне.

79. Могу, на пример: $x = 3$ и $(x-3)^2 = 0$, где је $S = \{3\}$, или $2y + 5 = 2(y+9)$ и $y^2 + 13 = 0$, где је $S = \varnothing$, или $4(z-5) = 4z - 20$ и $7z^2 - 14 = 7(z^2 - 2)$, које имају бесконачно много решења.

80. Ако је n средњи од датих бројева, онда је $(n-1) + n + (n+1) = 15$. Следи да је $n = 5$. Тражени бројеви су 4, 5 и 6.

81. Ако брат има x година, онда сестра има $2x$ и онда је $2x - x = 7$. Дакле, $x = 7$. Брат има 7, а сестра 14 година.

82. Ако је n тражени број, онда је $\frac{n}{4} + \frac{n}{5} = 54$. Следи да је $n = 120$.

83. Ако књига има x страница, онда је $\frac{x}{2} + 12 + \frac{x}{3} = x$. Следи да је $x = 72$.

84. Ако је n тражени број, онда је $n - \frac{n}{7} = 12$, а $n = 14$.

85. Нека је n тражени број станова. Тада је $n = 15\left(\frac{1}{3} + \frac{1}{5}\right) = 8$ станова.

86. Ако једна оловка кошта o динара, онда свеска кошта $52 - o$ динара, па је $4o + 3(52 - o) = 168$, $o = 168 - 156 = 12$. Оловка кошта 12, а свеска 40 динара.

87. Ако је n средњи од датих бројева, онда је $11n = 187$. Следи да је $n = 17$. Тражени бројеви су: 12, 13, 13, 15, 16, 17, 18, 19, 20, 21, 22.

88. Ако је n средњи од датих бројева, онда је збир тих бројева једнак $5n$. Њихова аритметичка средина је $5n : 5 = n = 1$. Тражени бројеви су –1, 0, 1, 2, 3 и њихов производ је 0.

89. Ако свеска кошта s динара, онда Бранко има $4s + 8$, односно $5s - 12$ динара. Из једначине $4s + 8 = 5s - 12$ добија се да свеска кошта 20 динара и да је Бранко имао 88 динара.

90. Ако се са 120 kg сена 5 оваца може хранити 8 дана, онда се дневни оброк једне овце x добија из једначине $5 \cdot 8x = 120$. Следи да је $x = 3$ kg сена. За стадо од 80 оваца за 15 дана, потребно је $80 \cdot 15 = 1\,200$ оброка. Тражена количина сена је $1\,200 \cdot 3$ kg $= 3\,600$ kg.

91. Ако новчића од 5 динара има x, онда новчића од 2 динара има $233 - x$. Из услова задатка је $5x + 2(233 - x) = 1\,000$. Следи да је $x = 178$, па новчића од 5 динара има 178, а од 2 динара 55.

92. После $32\frac{8}{11}$ минута.

93. Ако је мања цифра x, онда је већа $x + 3$. Тада је $10(x + 3) + x + 10x + x + 3 = 121$. Следи да је $22x + 33 = 121$, па је $x = 4$ и $x + 3 = 7$. Тражени број је 74 ($74 + 47 = 121$).

94. У тренутку њиховог сусрета били су једнако удаљени од Београда (а и од Ваљева).

95. Како је $s = vt$, то је $1\,980 = v \cdot 2\frac{1}{4}$. Следи да је $v = 880$ km/h.

96. Пешаци ће се срести после $72 : (6 + 6) = 6$ часова. Мува ће прећи $33 \cdot 6 = 198$ километара.

97. 40 000 km.

98. Нека је тражено време x минута. Тада је $120\,(x + 1) = 150x$. Следи да је $x = 4$ минута.

99. Дужина воза је $s = 16 \cdot 18 = 288$ метара. Воз тај пут пређе за 36 секунди. Како је $s = vt$, то је $288 = v \cdot 36$, па је $v = 8$ m/s или 28,8 km/h.

100. Анка и Бранка прелазе $13 + 17 = 30$ km за један сат. Како је $s = vt$, то је $3 = 30 \cdot t$. Тада је $t = 0{,}1$ часова, а то је 6 минута. Анка ће прећи $13 \cdot 0{,}1 = 1{,}3$ km, а Бранка $17 \cdot 0{,}1 = 1{,}7$ km.

101. Нека је време путовања брзог воза једнако t. Тада је $90\,t = 60\,(t + 1{,}5)$. Следи да је $t = 3$ часа. Растојање између A и B је $3 \cdot 90 = 4{,}5 \cdot 60 = 270$ km.

102. Нека је s дужина пута од гнезда до стабла (и обрнуто). Време путовања од гнезда до стабла је тада $\frac{s}{5}$, а време путовања од стабла до гнезда је $\frac{s}{3}$. Тада је $\frac{s}{5} + \frac{s}{3} = 20$. Следи да је $8s = 300$, па је $s = 300 : 8 = 37{,}5$ m.

103. Нека је s дужина пута између Београда и Минхена. Тада је $\frac{3s}{8} + \frac{5s}{12} + \frac{s}{6} + 40 = s$. Решавањем једначине добија се да је $s = 960$ километара.

104. Ако други атлетичар има корак дужине d, онда је дужина корака првог атлетичара једнака $0{,}9d$. Ако други атлетичар за неко време направи n корака, онда први направи $1{,}1d$. То значи да је први атлетичар прешао пут од $0{,}9d \cdot 1{,}1n = 0{,}99dn$, а други пут dn. Како је $0{,}99dn < dn$ победник ће бити други атлетичар.

105. Средња брзина је количник укупно пређеног пута са утрошеним временом. Ако је растојање од A до B једнако s, онда је

$$v_{sr} = \frac{2s}{\frac{s}{60} + \frac{s}{100}} = \frac{2s}{\frac{5s + 3s}{300}} = \frac{600s}{8s} = 75 \text{ km/h}.$$

106. Ако је цена мешавине x онда је $20 \cdot 500 + 30 \cdot 600 = 50 \cdot x$. Следи да је $x = 560$ динара.

107. Нека је мањи део ораха једнак m. Тада је $4m = \frac{130 - m}{3}$. Добија се да је $m = 10$, па први део садржи 10, а други 120 ораха.

108. Ако је ширина игралишта x, онда је $2x + 2(x + 40) = 320$. Ширина игралишта је 60 m, а дужина 100 m, па је површина игралишта 6 000 m^2.

109. Ако је већи број x, онда је $3x + 2(17 - x) = 41$. Већи број је 10, а мањи 7.

110. За 35 дана.

111. Решење теста 205 проверите на платформи *еЗбирка*, јер се за сваког корисника на платформи http://www.ezbirka.math.rs/ генерише посебна и различита комбинација задатака.

112. Површина троугла је 210.

113. **а)** 59°, 60°, 61°; **б)** 58°, 60°, 62°.

114. Ако је дељеник x, онда је делилац $5x + 10$, па је $5x + 10 - x = 1\,610$. Решавањем једначине добија се да је $x = 400$, па се ради о дељењу $2\,010 : 400 = 5(10)$.

115. $x + x + 1 + x + 2 + x + 3 + x + 4 + x + 5 = 3$, $6x + 15 = 3, x = -2$.
Тражени бројеви су: $-2, -1, 0, 1, 2$ и 3.

116. Нека је било x воћки. Тада је $\frac{3}{7}x + 4 = \frac{4}{7}x - 2$ и $x = 42$.
Јабука је било 18, а крушака 24.

117. Нека се базен напуни за t сати. Тада је $t\left(\frac{1}{6} + \frac{1}{10} - \frac{1}{5}\right) = 1$ и $t = 15$ сати.

118. Нека су дужине страница правоуглог троугла једнаке $n-1$, n и $n+1$.
Из Питагорине теореме је тада $(n-1)^2+n^2=(n+1)^2$. Следи да је $n^2=4n$ и $n=4$. Тражене странице су 3, 4 и 5.

119. Ако се децималном броју x децимални зарез помери за једно место у лево, добија се број који је десет пута мањи. Дакле,
$10x-x=9x=13{,}86$.
Тражени бројеви су: 15,4 и 1,54.

120. A) и C) су неједначине, а B) је тачна бројевна неједнакост.

121. $3x-12>0$, $x+7<0$, $x+7\geq 3x-12$.

122. Тражени бројеви су 1, $\sqrt{3}$, 2, π, 3, 4 .

123. $x<-5$.

124. $3+4<5+6$, $9x-8>7x-6$.

125. Да, јер је за ма који реалан број први сабирак ненагативан, а други позитиван.

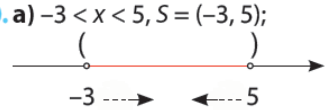
126. $x\geq 3$.

127. Неједначина $x<3$ у скупу природних бројева има само два решења (1 и 2), а у скупу целих и реалних бројева има бесконачно много решења.

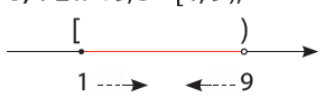
128. Само у скупу реалних бројева.

129. **а)** $S=R$; **б)** Нема решења, тј. $S=\varnothing$.

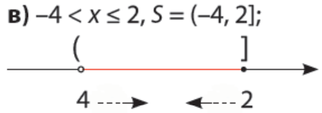
130. **а)** $-3<x<5$, $S=(-3, 5)$;



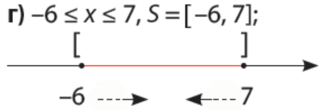
б) $1\leq x<9$, $S=[1, 9)$;



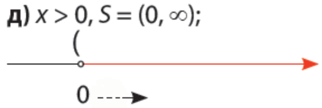
в) $-4<x\leq 2$, $S=(-4, 2]$;



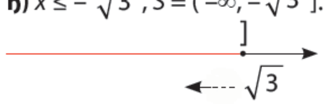
г) $-6\leq x\leq 7$, $S=[-6, 7]$;



д) $x>0$, $S=(0, \infty)$;



ђ) $x\leq -\sqrt{3}$, $S=(-\infty, -\sqrt{3}\,]$.



131. **а)** $(-2, 4)$, $-2<x<4$;
б) $[0, 7]$, $0\leq x\leq 7$;
в) $[-5, 3)$, $-5\leq x<3$;
г) $(-3, 8]$, $-3<x\leq 8$;
д) $(-\infty, 1]$, $x\leq 1$;
ђ) $[-6, \infty)$, $x\geq -6$.

132. **а)** Нема решења; **б)** бесконачно решења; **в)** нема решења; **г)** бесконачно решења.

133. Нису. Скуп решења прве је $(-\infty, 3)$, а скуп решења друге је $(3, \infty)$.

134. Једна од могућих је $2x+7\geq 27$.

135. Скупови решења датих неједначина су: $S_1=(-\infty, 4)$; $S_2=(-\infty, -6)$ и $S_3=(-\infty, 4)$.
Према томе, еквивалентне су прва и трећа неједначина.

136. Нису, јер је $S_1=(-\infty, 0]$, а $S_2=(-\infty, 0)$.

137. Јесте, јер је еквивалентна са $y<-22$ и има облик $ay<b$.

138. $x+3<10$.

139. Нису, јер је $S_1=[0, \infty)$, а $S_2=(-\infty, \infty)=R$.

140. $S=R$.

141. **а)** $3x^2+1>0$; **б)** $2y+10<2(y-4)$.

142. Немају. $S_1=(-3, \infty)$ и $S_2=(-3, 0)\cup(0, \infty)$, па 0 припада првом, а не припада другом скупу.

143. **а)** $x<3$; **б)** $y\geq 6$; **в)** $z<2$; **г)** $a\leq 15$; **д)** $b\geq 21$.

144. Нису. Решење прве је $m>1$, а решење друге је $m\leq 0$.

145. Јесу линеарне, јер је прва еквивалентна са $3y<25$, а друга са $15y<12$.

146. Нису, јер је прва еквивалентна са $x<-3$, а друга са $x>-3$.

147. Ако је r позитиван реалан број, онда доказ следи из неједнакости: **а)** $-rx>9r$; **б)** $ry\geq r$.

148. Ако је r позитиван реалан број, онда доказ следи из неједнакости: $rx+7r\geq 0$.

149. **а)** Нису; **б)** нису.

150. На пример, неједначина $5(x+3)>5x+17$ у сваком од скупова има решење $S=\varnothing$.

151. **а)** $x<4$; **б)** $y>17$; **в)** $-7\leq z$, односно $z\geq -7$.

152. **а)** $m\geq 7$; **б)** $n<-18$.

153. **а)** $x<-4$; **б)** $7\geq a$ или $a\leq 7$; **в)** $b>-2$.

154. **а)** $x\leq 5$; **б)** $5>a$ или $a<5$; **в)** $b\geq -4$.

155. **а)** $x\geq 11$; **б)** $-2>y$ или $y<-2$; **в)** $-7\leq a$ или $a\geq -7$.

156. **а)** $x<\frac{35}{8}$; **б)** $y\leq\frac{63}{4}$; **в)** $z<-\frac{144}{13}$.

157. Решење теста 213 проверите на платформи *еЗбирка*, јер се за сваког корисника на платформи http://www.ezbirka.math.rs/ генерише посебна и различита комбинација задатака.

158. **а)** $(-5, \infty)$, $x>-5$, $3x+17>2$;
б) $(-\infty, 4]$, $y\leq 4$, $7y-3\leq 25$.

159. **а)** $a < 3$; **б)** $b \geq \frac{39}{23}$; **в)** $c > \frac{17}{6}$.

160. **а)** $a > \frac{23}{7}$; **б)** $b > -\frac{5}{7}$; **в)** $c \geq -\frac{23}{31}$.

161. **а)** $x \geq -\frac{60}{7}$; **б)** $a > \frac{45}{23}$; **в)** $b < -5$.

162. **а)** $x \leq -4$; **б)** $y < -\frac{5}{6}$.

163. **а)** $x \leq -4$; **б)** $x < \frac{23}{7}$.

164. **а)** $x > 0$; **б)** $y \geq -1$; **в)** $z < 1$.

165. **а)** $S = (-\infty, \infty)$; **б)** нема решења.

166. **а)** $x \geq 3$; **б)** нема решења;
в) нема решења; **г)** $x < 0$.

167. **а)** $S = (-\infty, 0) \cup (0, \infty)$;
б) Неједначина нема решења.

168. **а)** Из $(a + 3)^2 \leq 0$, следи да је $a = -3$;
б) $S = (-\infty, 4) \cup (4, \infty)$; **в)** $-17 < c^2 < -11$, $S = \varnothing$.

169. Ако је p позитивно, лева страна је позитивна, а десна негативна, па нема решења. Ако је p негативно, решење је $p \geq -7$.

170. Решење неједначине је $S = (-\infty, 5) \cup (5, \infty)$, јер неједначина није дефинисана за $x = 5$.

171. $(2x - 14)^2 \leq 0$ чије једином решење је 7. Може и неједначина из задатка 166 **а)**.

172. Решење неједначине је $x < 22$, па таквих природних бројева има 21.

173. Решење неједначине је $y > -\frac{14}{5}$, па је тражени најмањи цео број -2.

174. Сви позитивни реални бројеви.

175. То су сви природни бројеви већи или једнаки са 403.

176. Решење теста 214 проверите на платформи *еЗбирка*, јер се за сваког корисника на платформи http://www.ezbirka.math.rs/ генерише посебна и различита комбинација задатака.

177. Највећи природан број је 26.

178. Таквих целих бројева има тачно 5.

179. Највећи цео број, који задовољава неједнакост $6{,}5 + 3y \leq 2 + y$, јесте -3.

180. Тражени бројеви су сви реални бројеви из интервала (3, 4).

181. **а)** Нема решења, јер апсолутна вредност је увек ненегативна; **б)** сви реални бројеви; **в)** сви реални бројеви.

182. Постоје. То су бројеви $16 < x < 21$, тј. бројеви: 17, 18, 19 и 20.

183. Само три: 1, 2 и 3.

184. Датих пет тврђења су: **1)** $x > 35$;
2) $x < 100$; **3)** $x > 8$; **4)** $x \geq 10$, **5)** $x > 5$.
Тражени природан број је 9. Тачна су тврђења 2), 3) и 5), а нетачна су 1) и 4).

185. Нека је маса кајсија k, а маса јабука j.
Из услова задатка $6j > 10k$. Ако се дата неједнакост подели са 3, добија се неједнакост $2j > \frac{10}{3}k > 3k$, па су 2 јабуке теже од 3 кајсије.

186. Решење теста 215 проверите на платформи *еЗбирка*, јер се за сваког корисника на платформи http://www.ezbirka.math.rs/ генерише посебна и различита комбинација задатака.

187. **а)** $x \in (-3,0) \cup (0,3)$; **б)** $x \in (-\infty, \infty)$;
в) $x \in (-2, 2)$.

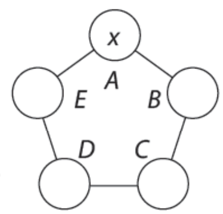
188. **а)** $x \leq 3$; **б)** $y < -5$; **в)** $z > 17$.

Решења задатака за додатни рад

1. Област дефинисаности прве једначине је $x < 1$, па прва једначина нема решења. Друга једначина има решење 2, што очигледно није решење прве једначине.

2. Ако се уведе смена $x = y + 2\,012$, добија се да је $y = 0$, па је $x = 2\,012$.

3. Из $a^2x - 3 = 9x + a$ следи да је $a^2x - 9x = a + 3$ или $(a - 3)(a + 3)x = a + 3$.
Ако је $a = 3$, добија се једначина $0 \cdot x = 6$, која очигледно нема решења.
Ако је $a = -3$, добија се једначина $0 \cdot x = 0$, која има бесконачно много решења.
Ако је $a \neq 3$ и $a \neq -3$, онда једначина има јединствено решење $x = \frac{1}{a-3}$.



4. Нека се у кружићу крај темена A налази број x. Тада се у кружићу код темена B налази број $1 - x$. У кружићу код темена C је број $2 - (1 - x) = 1 + x$. У кружићу код темена D је број $3 - (1 + x) = 2 - x$. У кружићу код темена E је број $4 - (2 - x) = 2 + x$.
Збир бројева на страници AE је 5, па је $x + 2 + x = 5$. Тада је $2x = 3$ и $x = 1{,}5$.
Тражени бројеви су: $\frac{3}{2}, -\frac{1}{2}, \frac{5}{2}, \frac{1}{2}, \frac{7}{2}$.

5. Како је 0°C једнако 32°F и један подеок Целзијусове скале једнак са 1,8 подеока Фаренхајтове скале, то је x°C једнако $(32 + 1{,}8x)$°F. Слично је $1{,}8 \cdot x$°F једнако $(x - 32)$°C, па је одговарајућа трансформација x°F једнако $\left(\frac{x-32}{1{,}8}\right)$°C.
Ако се температура на обе скале поклапа, онда је $(32 + 1{,}8x) = x$, па је $x = -40°$.

6. Из претходног задатка 14°F једнако је са $\frac{(14-32)}{1,8}=-\frac{18}{1,8}=-10$°C. Слично, 10°C једнако је $32+1,8\cdot 10=32+18=50$°F.

7. Како је $S_1=R$ и $S_2=R\backslash\{-3\}$ обе једначине имају бесконачно много решења, али нису еквивалентне, јер је $S_1\neq S_2$.

8. Скупови решења датих једначина су: $S_1=\{-9,9\}, S_2=\{9\}, S_3=\{-9,9\}, S_4=\{9\}$, па су еквивалентне прва и трећа и друга и четврта једначина.

9. Могу, на пример, $x+5=12$ је линерана једначина и $x^2-14x+49=0$ је квадратна, а обе имају скуп решења $S=\{7\}$.

10. **а)** $x^2-8x+12=(x-2)(x-6)=0$, $S=\{2,6\}$;
б) $S=\{2,5\}$; **в)** $S=\{-5,0,5\}$;
г) $S=\left(\frac{1}{2},\frac{2}{3},\frac{3}{4}\right)$.

11. **а)** $S=\{-3\}$; **б)** $S=\{0,1\}$; **в)** $S=\{-4,4\}$.

12. **а)** $S_1=(4,\infty)$, $S_2=R$, $S_3=(5,\infty)$. Све једначине имају бесконачно много решења и нису еквивалентне.

13. Домен једначине је $(-\infty,8)$, па је једино решење једначине 0.

14. $S=\{-2,2\}$.

15. Из $3-\frac{x-p}{2}=x$, следи $x=2+\frac{p}{3}$.

Како је x цео број такав да је $|x|<2$, то је x једнако -1, 0 или 1. Тада је $p\in\{-9,-6,-3\}$.

16. **а)** $S_1=\{-2,0,2\}$; **б)** $S_2=\{0,3,7\}$;
в) $S_3=\{-2,-1,1,2\}$.

17. **а)** $x+5=12$; **б)** $(2x-6)(3x-12)=0$;
в) $|x|=x$; **г)** $|x-6|+x-6=0$.

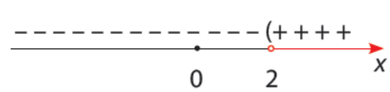
18.
$$\frac{2}{3+\frac{4}{5+x}}=1,$$
$$2=3+\frac{4}{5+x},$$
$$\frac{4}{5+x}=-1,$$
$$x+5=-4,\ x=-9.$$

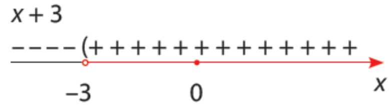
19. Нека Нада има x динара. Онда Јагода има $x+2\cdot 456$, јер када Јагода позајми Нади 456 динара, онда имају једнаке суме. Ако Нада позајми Јагоди 456 динара, онда ће Јагода имати два пута више новца од Наде, значи да је $2(x-456)=x+2\cdot 456+456$. Решавањем једначине добија се $x=5\cdot 456$, па је Нада имала 2 280 динара, а Јагода 3 192 динара.

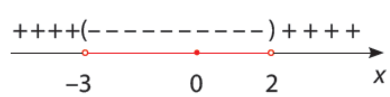
20. Велика казаљка је 12 пута „бржа" од мале, што значи да док велика казаљка пређе $12x$°, мала казаљка пређе x°. Да би се казаљке поклопиле, пређени путеви се разликују за 360°, тј. $12x-x=11x=360$. Дакле, $x=\frac{360}{11}$. Како мала казаљка 1° пређе за 10 секунди, то значи да је утрошено време $t=10\cdot\frac{360}{11}=327,27$ секунди или 5 минута и 27,2727... секунди. Дакле, казаљке ће се поново поклопити у 13 часова 5 минута и 27,2727... секунди.

21. У 100 kg јагода било је 99 kg влаге и 1 kg суве материје. Када је део влаге испарио, остало је 98% влаге и 2% суве материје. Како 2% суве материје износе 1 kg, то ће 100% масе јагода износити 50 kg.

22. Нека је математички град имао x становника. После прве године је број становника био $x+n$, а после друге $x+n+300$. Из услова задатка следи да је $x+n=(1+300\%)x$ или $x+n=4x$. Значи да је $n=3x$. Из другог услова се добија $4x(1+n\%)=x+n+300$. Како је $n=3x$ следи да је $4x(1+\frac{3x}{100})=x+3x+300$.
$4x+\frac{12x^2}{100}=4x+300, 12x^2=30\,000, x^2=2500,$
$x=50, n=3x=150.$
Било је 50 становника, па се доселило 150 становника прве и 300 становника друге године, тако да математички град сада има 500 становника.
Провера: Заиста је 150 становника 300% повећања у односу на 50. И заиста је 300 становника 150% повећања у односу на 200, колико је град имао становника после прве године.

23. **а)** Неједначину решавамо коришћењем знака сваког од израза, тј. системом од 2 паралелне бројевне осе:
$x-2$


$x+3$


Резултујући знак се добија по интервалима: $(-)(-)>0$, $(-)(+)<0$ и $(+)(+)>0$.


Решење неједначине је: $S=(-3,2)$;
б) $S=(-\infty,0)\cup(7,\infty)$; **в)** $S=[-7,7]$.

24. **а)** $S = (-\infty, 0) \cup [5, \infty)$; **б)** $S = (-2, 3)$;
в) Дата неједначина је еквивалентна са
$\dfrac{z+13-z+4}{z-4} = \dfrac{17}{z-4} > 0$. $S\,(4, \infty)$.

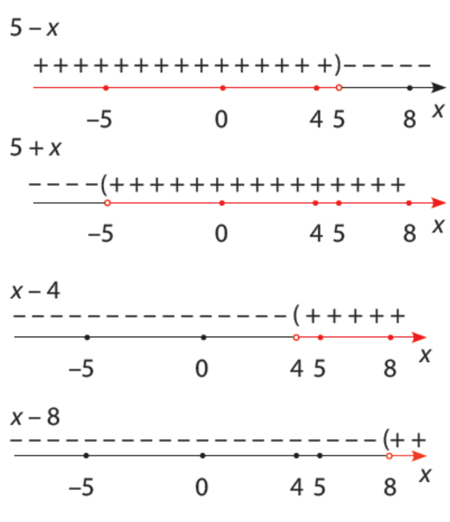
25. Ако је $x < 0$, неједнакост је испуњена, јер је лева страна неједнакости увек негативна.
Ако је $x > 0$, онда из $\dfrac{6}{x} \le 3$ следи да је $6 \le 3x$, односно $x \ge 2$, па је $S = (-\infty, 0) \cup [2, \infty)$.

26. **а)** Једино решење је $a = 3$.
б) Неједначина $b^3 > 16b$ је еквивалентна са $b(b+4)(b-4) > 0$. Коришћењем три паралелне бројевне праве добија се $S = (-4, 0) \cup (4, \infty)$.
в) Следи да је $-17 < c^2 < 4$, па је $S = (-2, 2)$.

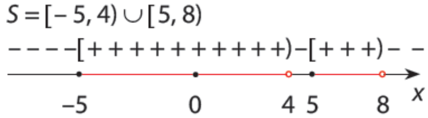
27. Може. На пример, ако има 200 реалних бројева и сваки од њих је 0,05. Збир њихових квадрата је $200 \cdot 0{,}0025 = 0{,}5 < 1$.

28. Нека је именилац једнак x. Онда се добија неједнакост $\dfrac{101-x}{x} < \dfrac{1}{3}$. Како је x позитиван број, то је решење неједначине $x > 75\dfrac{3}{4}$.
Највећи од свих позитивних разломака је $\dfrac{25}{76}$.

29. Неједначина $\dfrac{25-x^2}{x^2-12x+32} \ge 0$ еквивалентна је са $\dfrac{(5-x)(5+x)}{(x-4)(x-8)} \ge 0$. Дата неједначина има домен $D = R \setminus \{4, 8\}$. Неједначину решавамо коришћењем знака сваког од израза, тј. системом од 4 бројевне осе:



$S = [-5, 4) \cup [5, 8)$



30. Ако неједначину $1 \le \dfrac{3+2x}{x-1} < 2$ раставимо на две неједначине $\dfrac{3+2x}{x-1} \ge 1$ и $\dfrac{3+2x}{x-1} < 2$, онда решавањем сваке од њих добијамо да је $S_1 = (-\infty, -4] \cup (1, \infty)$ и $S_2 = -\infty, 1)$. Решење дате неједначине је $S = S_1 \cap S_2 = (-\infty, -4]$.

31. $\dfrac{x^2-9}{x^2-7x+12} < 8$, $\dfrac{(x-3)(x-5)}{(x-3)(x-4)} > 0$,
$x \ne 3$ и $x \ne 4$, $\dfrac{(x-5)}{(x-4)} > 0$.
Скуп решења је $S = (-\infty, 3) \cup (3, 4) \cup (5, \infty)$.

32. $x^2 - x + 1 < 0$, $(x-1)^2 + x^2 + 1 < 0$.
Добијена неједначина нема решења, јер су прва два сабирка увек ненегативна, а трећи увек позитиван.

33. Доказ је аналоган претходном.

34. Израз $4-(x+1)^2(x-2)^2 \le 4$, па је $\sqrt{4-(x+1)^2(x-2)^2} \le 2$. С друге стране, израз $x^2+2x+3 = (x+1)^2+2 \ge 2$. Дакле, лева и десна страна једначине могу бити једнаке само ако су обе једнаке 2. То значи да је $(x+1)^2+2 = 2$ и $(x+1)^2(x-2)^2 = 0$. Једино решење добијеног система једначина је $x = -1$, јер $x = 2$ задовољава другу, али није решење прве једначине.

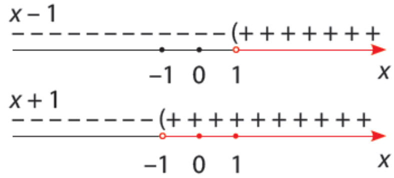
35. Једначина има негативно решење ако је $m \in (-\infty, \frac{3}{2}) \cup (4, \infty)$.

36. Из $2x + a > ax - 3$ следи $a + 3 > ax - 2x$ или $a + 3\ (a-2)x$. Ако је $a < 2$, онда је $x > \dfrac{a+3}{a-2}$, односно $x \in \left(\dfrac{a+3}{a-2}, \infty\right)$. Ако је $a = 2$, добија се $2 + 3 = 5 > 0 \cdot x = 0$ и неједначина има бесконачно много решења.
Ако је $a > 2$, $x < \dfrac{a+3}{a-2}$, односно $x \in \left(-\infty, \dfrac{a+3}{a-2}\right)$.

37. Нека 1 kg мандарина кошта x евра. Тада је $9x < 10$ и $10x > 11$, $x < \dfrac{10}{9}$ и $x > \dfrac{11}{10}$, $1{,}10 < x < 1{,}111...$ па 1 kg мандарина кошта тачно 1 евро и 11 центи. Тада 12 kg мандарина кошта 13 евра и 32 цента.

38. Нека је укупна маса бронзаних тегова x. Најмања могућа маса 9 сребрних тегова је $1 + 2 + ... + 8 + 9 = 45$ g, па је најмања могућа вредност бронзаних тегова $45 + 90 = 135$ g, тј. $x \ge 135$ g. Највећа могућа маса бронзаних тегова је $19 + 18 + ... + 12 + 11 = 135$ g, тј. $x \le 135$ g. Маса бронзаних тегова је 135 g, па је маса сребрних тегова 45 g и маса златног тега 10 g.

39. Треба посматрати изразе $x - 1$ и $x + 1$ и њихов знак.



Разликује се 5 случајева који су везани за три уочена интервала: $(-\infty, -1)$, $(-1, 1)$ и $(1, \infty)$ и две границе уочених интервала: -1 и 1.

1) Ако је $x < -1$, онда је $x - 1 < -2 < 0$ и $x + 1 < 0$ и једначина постаје $-(x - 1) + x = -(x + 1)$ или $1 = -x - 1$, па је $x = -2$. Како -2 припада посматраном интервалу, то је -2 једно решење.

2) Ако је $x = -1$, онда је $1 = 0$, па -1 није решење једначине.

3) Ако је $-1 < x < 1$, онда је $x - 1 < 0$, а $x + 1 > 0$ и једначина постаје $-(x - 1) + x = x + 1$ или $1 = x + 1$, па је $x = 0$. Како 0 припада посматраном интервалу, то је добијено још једно решење.

4) Ако је $x = 1$, добија се $1 = 2$, што значи да $x = 1$ није решење једначине.

5) Ако је $x > 1$, онда је $x - 1 > 0$ и $x + 1 > 0$, па се добија једначина $x - 1 + x = x + 1$ или $x = 2$. Како број 2 припада посматраном интервалу, број 2 је решење дате једначине. Скуп решења једначине је $S = \{-2, 0, 2\}$.

40. **а)** $x_1 = -3, x_2 = 3$; **б)** $x_1 = -4, x_2 = 6$; **в)** $x_1 = 3, x_2 = 9$; **г)** $x_1 = -6, x_2 = 2$; **д)** $x_1 = -3, x_2 = 5$; **ђ)** Једначина нема решења. **е)** $x_1 = -5$; **ж)** $x_1 = -4$; **з)** $x_1 = -4, x_2 = 2$; **и)** $S = \{0\} \cup [1, \infty)$.

41. Разликују се три случаја:

1) Ако је $x < 0$, онда је $|x| = -x$, па дата једначина постаје
$||||-x + x| + x| + x| + x| = 2\,000$,
$|||x| + x| + x| = 2\,020$,
$||-x + x| + x| = 2\,000$,
$|x| = 2\,020$.
Решење једначине је $-2\,020$.

2) Ако је $x = 0$, једначина нема решење, јер је $0 \neq 2\,020$.

3) Ако је $x > 0$, онда је $|x| = x$, па дата једначина постаје $||||x + x| + x| + x| + x| = 2\,000$,
$|||2x + x| + x| + x| = 2\,020$,
$|||2x + x| + x| + x| = 2\,020$,
$||3x| + x| + x| = 2\,020$,
$||4x| + x| = 2\,020$,
$|5x| = 2\,020$.
Решење једначине је 404. Скуп решење дате једначине је $S = \{-2\,020, 404\}$.

42. Из $||x - 2| - 1| = a$, следи закључак $a \geq 0$.
За $x < 2$ једначина постаје $|2 - x - 1| = |1 - x| = a$,
за $x \geq 2$, $|x - 3| = a$.
Добијају се четири једначине:
у интервалу $(-\infty, 1)$: $1 - x = a$;
у интервалу $[1, 2)$: $x - 1 = a$;
у интервалу $[2, 3)$: $3 - x = a$
у интервалу $[3, \infty)$: $x - 3 = a$.
Ако је $a = 0$, решења су: 1 и 3, и има их 2.
Ако је $0 < a < 1$, решења једначина су: $1 - a$, $1 + a$, $3 - a$ и $3 + a$, и има их 4.
Ако је $a = 1$, решења су: 0, 2, 4, и има их 3.
Ако је $a > 1$, решења једначина су: $1 - a$ и $3 + a$ и има их 2.
Према томе, највећи број решења је четири и добијају се ако је $0 < a < 1$.

43. $A = \sqrt{a + 2\sqrt{a - 1}} + \sqrt{a - 2\sqrt{a - 1}} = \sqrt{a - 1 + 2\sqrt{a - 1} + 1} + \sqrt{a - 1 - 2\sqrt{a - 1} + 1} = 2.$

44. Из $x^2 + 200 > 0$ и $x^2 - 2x + 100 = x^2 - 2x + 1 + 99 > 0$, следи $2x = 4\,022$, па је $x = 2\,011$.

45. **а)** Дата једначина је еквивалентна са $|x - 3| = 5$, па је $x_1 = -2$, $x_2 = 8$.
б) Дата једначина је еквивалентна са $|x| + |x - 1| = 7$ и $x_1 = -3$, $x_2 = 4$.
в) Дата једначина је еквивалентна са $|x + 4| = |x - 2|$, па је $x_1 = -1$.

46. Сва решења дате једначине су -41 и 123.

47. **а)** $S = (-7, 7)$; **б)** $S = (-\infty, \frac{1}{3}) \cup (1, \infty)$; **в)** $S = (2, 10)$; **г)** $S = (-\infty, -3) \cup (2, \infty)$; **д)** $S = (-\frac{9}{13}, 1)$; **ђ)** $S = (-\infty, 1)$; **е)** $S = (-6, \infty)$; **ж)** $S = (-\infty, 12)$; **з)** $S = (-\frac{7}{2}, 4)$; **и)** $S = (0, 1)$.

48. **а)** $x > 0$; **б)** $S = (-\infty, \frac{6}{5})$.

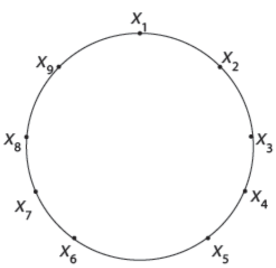
49. Једначина нема решења, јер у једначини $|x - 4| + |2x - 6| = 0$ оба сабирка морају бити једнали нули, а то није могуће за исту вредност непознате x.

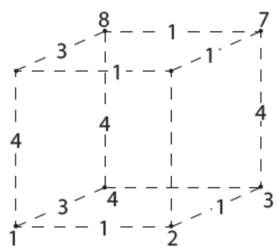
50. Два $x_1 = -2\,009$ и $x_2 = 287$.

51. Решења дате једначине су: $-4, -2, 0, 2, 4$.

52. Ако је $|x - 2| < 0{,}04$, онда је $-0{,}04 < x - 2 < 0{,}04$, па је $1{,}96 < x < 2{,}04$ и $3{,}8416 < x^2 < 4{,}1616$.
Тада је $-1{,}1584 < x^2 - 5 < -0{,}8384$, па је $|x^2 - 5| < 1{,}1584 = A$.

53. Нека су тражени бројеви распоређени по кружници у смеру казаљки на часовнику редом: $x_1, x_2 ... x_9$. Како је сваки број на кружници апсолутна вредност разлике два наредна посматрано у смеру казаљки на часовнику, то су сви написани бројеви ненегативни. Нека је $x_1 = a$ највећи од њих. Како је a једнако апсолутној вредности разлике два наредна броја $a = |x_2 - x_3|$, један од њих је на пример, $x_2 = a$, а други $x_3 = 0$. Тада је и $x_2 = a = |x_3 - x_4| = |0 - x_4|, x_4 = a$. Слично је $x_3 = 0 = |x_4 - x_5| = |a - x_5|, x_5 = a$. Настављајући дати поступак, добиће се да је $x_1 = x_2 = x_4 = x_5 = x_7 = x_8 = a$ и $x_3 = x_6 = x_9 = 0$. Како је збир свих бројева на кружници једнак 1, то је $x_1 = x_2 = x_4 = x_5 = x_7 = x_8 = \frac{1}{16}$.





54. Како је у неком од темена коцке смештен број $x_1 = 1$, то су на ивицама коцке које полазе из тог темена распоређени бројеви $|x_2 - 1|$, $|x_3 - 1|$ и $|x_4 - 1|$. Како су x_2, x_3 и x_4 различити $\rightarrow$ то су и бројеви $|x_2 - 1|$, $|x_3 - 1|$ и $|x_4 - 1|$ различити, па на ивицама коцке има три или више различитих бројева. Може се доказати и да постоји распоред при коме је на ивицама коцке распоређено тачно три броја. То је распоред где су у теменима основе коцке A, B, C и D редом распоређени бројеви 1, 2, 3 и 4, а у одговарајућим теменима горње основе A_1, B_1, C_1 и D_1 редом бројеви 5, 6, 7 и 8. Тада су на ивицама коцке размештени бројеви 1 (6 пута), 3 (2 пута) и 4 (4 пута).

Питалице – решења:

1. не. **2.** да. **3.** не. **4.** да. **5.** да.
6. не. **7.** не. **8.** да. **9.** не. **10.** да.
11. да. **12.** не. **13.** да. **14.** не. **15.** да.
16. да. **17.** да. **18.** не. **19.** да. **20.** да.
21. да. **22.** не. **23.** не. **24.** да. **25.** да.
26. да. **27.** да. **28.** не.

Предлог теста знања – решења:

1.

бројевна једнакост	$17 - 3 = 18 : 2 + 5$
једначина	$3x + 4 = 5x - 6$
идентитет	$y2 - 25 = (y + 5)(y - 5)$

2. Д. **3.** Г. **4.** Б. **5.** А. **6.** Б. **7.** В. **8.** Г.

Предлог контролне вежбе – решења:

1. $x = 10$. **2.** $y = -1$. **3.** Једначина нема решења.
4. $y > -6$. **5.** $x > 33$. **6.** $x > 13$. **7.** $P = 999\ cm^2$.

4. ПРИЗМА

1. **а)** Не може; **б)** Не може; **в)** Не може. **2.** б).

3. Основне ивице: $AB, BC, CD, DE, EA, A_1B_1, B_1C_1, C_1D_1, D_1E_1, E_1A_1$. Бочне ивице: $AA_1, BB_1, CC_1, DD_1, EE_1$.

4. 12 темена, 18 ивица, 8 страна.

5. Четворострана призма има 8 основних ивица.

6.

Призма / Број	Петострана	Шестострана	Деветострана	Десетострана	n-тострана
Основа	2	2	2	2	2
Бочних страна	5	6	9	10	n
Страна	7	8	11	12	$n+2$
Основних ивица	10	12	18	20	$2n$
Бочних ивица	5	6	9	10	n
Ивица	15	18	27	30	$3n$

7. 602 cm. **8.** Не, ако је призма права.

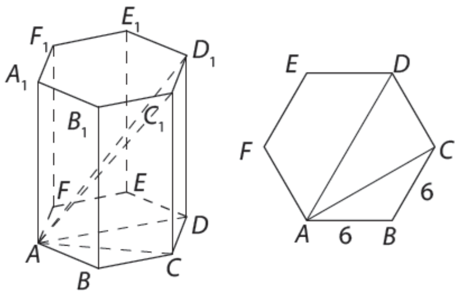
9. **а)** Да; **б)** не. **10.** в).

11. **а)** $4\sqrt{3}$ cm; **б)** 12 cm; **в)** $x\sqrt{3}$ cm.

12. $8\sqrt{3}$ cm.

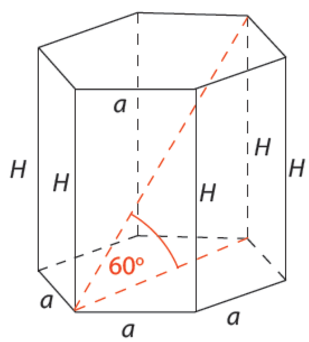
13. $12\sqrt{3}$ cm. **14.** 13 cm. **15.** 50 cm^2. **16.** 6 cm.

17. **а)** Мања дијагонала основе је $AC = 8\sqrt{3}$ cm.
Већа дијагонала основе је $AD = 16$ cm.
б) Дијагонала бочне стране је $AB_1 = 17$ cm.
в) Већа дијагонала призме је $AD_1 = \sqrt{481}$ cm, а мања $AC_1 = \sqrt{417}$ cm. Види слику.



18. Не.

19. Основна ивица 5 cm је а висина $10\sqrt{3}$cm.



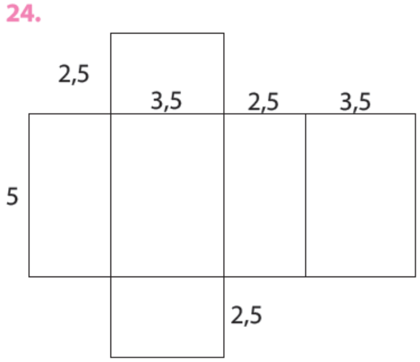
20. Основна ивица 12 cm је, а висина 12 cm.

21. 10 cm.

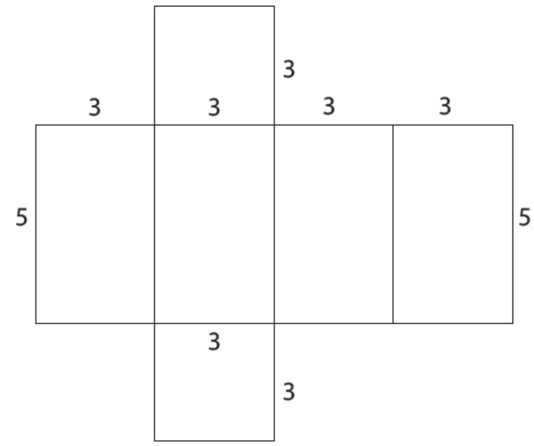
22. Основна ивица $3\sqrt{2}$ cm је, а висина $6\sqrt{3}$ cm.

23. а), г).

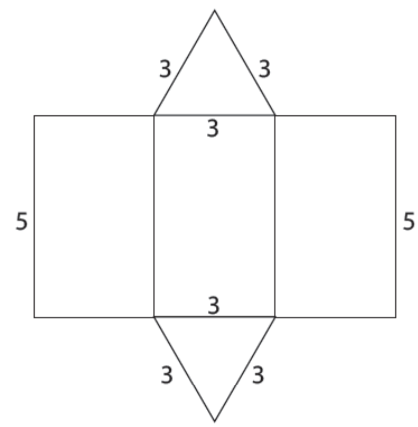
24.



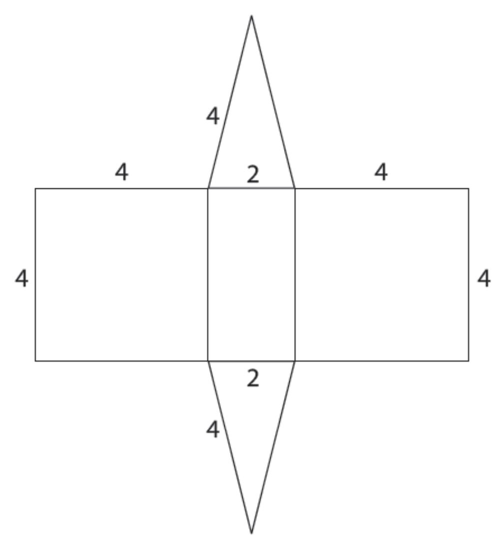
25.



26.



27.

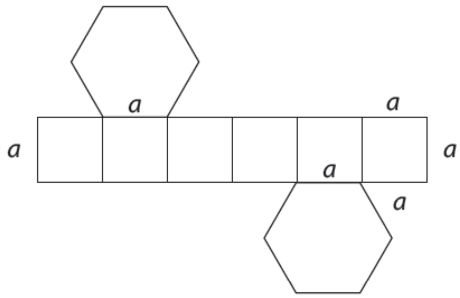


28. Нека је ивица коцке a. Тада је $MN^2 = (4a)^2 + a^2$, односно $289 = 17a^2$, $a = \sqrt{17}$ cm.

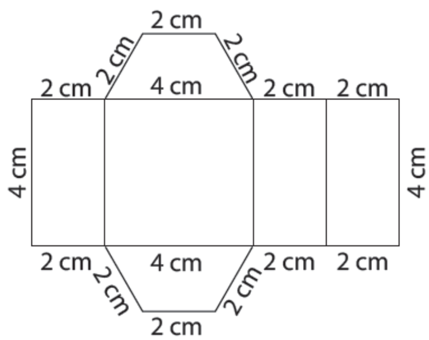
29. **а)** $a = 3$ cm, $H = 12$ cm; **б)** $a = 4$ cm, $H = 12$ cm; **в)** $a = 2$ cm, $H = 12$ cm.

30. **б)**. **31.** **в)**.

32. **а)** $a = 3{,}5$ cm (види слику); **б)** $a = 2{,}5$ cm, па је даље као под а); **в)** $a = 3\sqrt{2}$ cm, па је даље као под а).



33. Бочна ивица је 4 cm.



34. **а)** $P = 73{,}5$ cm²; **б)** $P = 294$ cm²; **в)** $P = 150$ cm²; **г)** $P = 96$ cm²; **д)** $P = 216$ cm²; **ђ)** $P = 600$ cm².

35. $D = 4\sqrt{3}$ cm.

36. $P = 94$ cm².

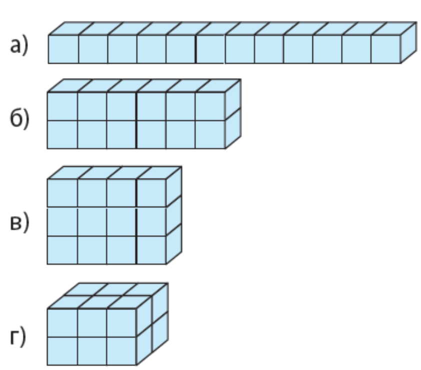
37. Површина коцке се повећа за 44%.

38. $P = 2\cdot(ab + ac + bc)$, $460 = 2\cdot(5\cdot 12 + 5\cdot c + 12\cdot c)$, $c = 10$ cm, $d = \sqrt{269}$ cm.

39. Ивице квадра су $a = 6$ cm, $b = 8$ cm и $c = 10$ cm, а површина $P = 376$ cm².

40. 44 cm².

41. Могу се саставити 4 различита квадра (слике а, б, в, г) и то као: 12×1, 6×2, 4×3, 3×2×2 коцкица. Њихове ивице су редом: 24×2×2, 12×4×2, 8×6×2, 6×4×4 (cm).
$P_а = 200$ cm², $P_б = 160$ cm², $P_в = 152$ cm², $P_г = 128$ cm². Највећу површину има квадар са слике а) $P_а = 200$ cm².



42. Треба докупити 3 конзерве фарбе.

43. **а)** $P = 840$ cm²; **б)** $P = 168$ cm²; **в)** $P = 552$ cm².

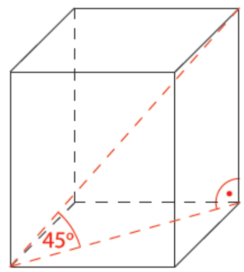
44. $H = 12$ cm; **а)** Дијагонала основе је $6\sqrt{2}$ cm; **б)** дијагонала бочне стране је $6\sqrt{5}$ cm; **в)** дијагонала призме је $6\sqrt{6}$ cm.

45. $a = 5$ cm, $H = 6$ cm. **46.** $H = 8$ cm.

47. $P = 608$ cm². **48.** $P = (144 + 384\sqrt{2})$ cm².

49. $P = 312$ cm².

50. $d = H = \dfrac{12}{\sqrt{2}}$ cm $= 6\sqrt{2}$ cm. Како је $d = a\sqrt{2}$, основна ивица је $a = 6$ cm. Површина призме је $P = (72 + 144\sqrt{2})$ cm².



51. $P = (768 + 512\sqrt{6})$ cm².

52. **а)** $P = 576$ cm²; **б)** $P_1 = 153{,}6$ cm², $P_2 = 115{,}2$ cm².

53. Ако је h висина основе, тада је

$$h^2 = 10^2 - \left(\frac{14-2}{2}\right)^2 = 100 - 36 = 64,\ h = 8 \text{ cm},$$

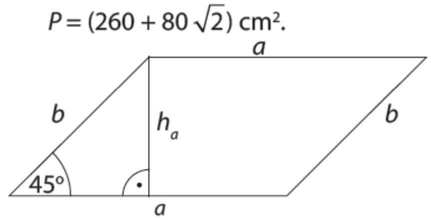
$$P = 2B + M = 2\cdot\frac{14+2}{2}\cdot 8 + 14\cdot 10 +$$
$$+ 10\cdot 10 + 2\cdot 10 + 10\cdot 10,$$
$$P = 488 \text{ cm}^2.$$

54. **а)** $P = 200$ cm²; **б)** $P = (128 + 144\sqrt{30})$ cm².

55. **а)** $H = 13$ cm; **б)** 712 cm².

56. Нека је h_a висина паралелограма која одговара дужој основици, тада је

$$h_a = \frac{8\sqrt{2}}{\sqrt{2}} = 8 \text{ cm}.$$
$$P = 2B + M = 2\cdot a\cdot h_a + 2\cdot a\cdot H + 2\cdot b\cdot H =$$
$$= 2\cdot 10\cdot 8 + 2\cdot 10\cdot 5 + 2\cdot 8\sqrt{2}\cdot 5,$$
$$P = (260 + 80\sqrt{2}) \text{ cm}^2.$$



57. $P = 124$ cm².

58. **а)** $P = (8\sqrt{3} + 144)$ cm²; **б)** $P = (18\sqrt{3} + 279)$ cm²; **в)** $P = (128\sqrt{3} + 1\,056)$ cm².

59. $a = 8$ m, $P = (32\sqrt{3} + 408)$ cm².

60. $a = 8$ cm, $d_b = 17$ cm, $H = 15$ cm, $P = (32\sqrt{3} + 360)$ cm².

61. $H = 22\sqrt{3}$ cm. **62.** $P = (18\sqrt{3} + 144)$ cm².

63. **а)** $a = 6$ cm, $H = 3$ cm, $P = (18\sqrt{3} + 54)$ cm²;
б) $a = 4\sqrt{6}$ cm, $P = (48\sqrt{3} + 144)$ cm²;
в) $a = H = 4$ cm, $P = (8\sqrt{3} + 48)$ cm².

64. $P = (18\sqrt{3} + 108)$ cm².

65. **а)** $a = H = 10$ cm, $P = (50\sqrt{3} + 300)$ cm²;
б) $a = H = 2$ cm, $P = (2\sqrt{3} + 12)$ cm².

66. $a = 4$ cm, $H = 6$ cm, $P = (8\sqrt{3} + 72)$ cm².

67. $P = 540$ cm². **68.** $H = c = 13$ cm, $P = 450$ cm².

69. $b = 5$ cm, $B = \dfrac{a \cdot h_a}{2} = 12$ cm²,
$M = (a + 2b) \cdot H = 192$ cm², $P = 216$ cm².

70. $P = 740$ cm².

71. **а)** $P = (48\sqrt{3} + 288)$ cm²;
б) $P = (432\sqrt{3} + 1\,116)$ cm²;
в) $P = (768\sqrt{3} + 2\,112)$ cm².

72. $a = 4$ cm, $P = (48\sqrt{3} + 240)$ cm².

73. $a = 4$ cm, $P = (48\sqrt{3} + 360)$ cm².

74. $P = (108\sqrt{3} + 432)$ cm².

75. $P = (108\sqrt{3} + 216)$ cm².

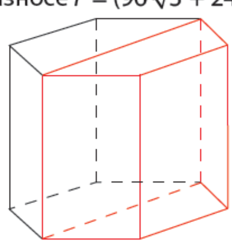
76. $a = 8$ cm, $H = 8$ cm, $P = (192\sqrt{3} + 384)$ cm².

77. $P = (300\sqrt{3} + 600)$ cm².

78. $P = (54\sqrt{3} + 216)$ cm².

79. $P = (192\sqrt{3} + 384)$ cm².

80. Настала тела су призме чије су основе једнакокраки трапези, њихове површине су једнаке и износе $P = (96\sqrt{3} + 240)$ cm².



81. **а)** $V = 125$ cm³; **б)** $V = 3{,}375$ cm³; **в)** $V = 16\sqrt{2}$ cm³.

82. $V = 64$ cm³. **83.** $P = 384$ cm², $V = 512$ cm³.

84. $V = 8\text{ cm} \cdot 8\text{ cm} \cdot 8\text{ cm} = 512\text{ cm}^3 =$
$= 0{,}512\text{ dm}^3 = 0{,}512$ l

85. **а)** $V = 384$ cm³; **б)** $V = 65{,}875$ cm³; **в)** $V = 48$ cm³.

86. $V = 96$ cm³.

87. $V = \dfrac{3}{5} \cdot a \cdot b \cdot c = \dfrac{3}{5} \cdot 20\text{ m} \cdot 15\text{ m} \cdot 2{,}5\text{ m} =$
$= 450\text{ m}^3 = 450\,000$ l.

88. $P = 126$ cm².

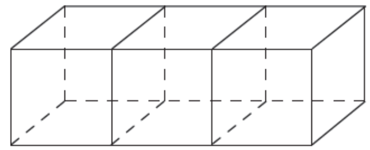
89. Нека је a ивица почетне коцке, тада је $a + 2$ ивица нове коцке, па важи $6a^2 + 96 = 6(a + 2)^2$, односно $a = 3$ cm.

90. Ивица коцке је 13 cm, а запремина $V = 2\,197$ cm³.

91. $a_1 = 6$ cm, $a_2 = 4$ cm, $V_1 = 216$ cm³, $V_2 = 64$ cm³,
$V_1 - V_2 = 152$ cm³.

92. $V = 48\sqrt{87}$ cm³.

93. Квадар се састоји од 14 квадрата, па је ивица квадрата $\sqrt{3}$ cm. Види слику.

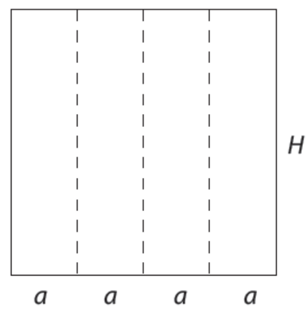


Ивице квадра су $3\sqrt{3}$ cm, $\sqrt{3}$ cm, $\sqrt{3}$ cm, а запремина квадра је $V = 9\sqrt{3}$ cm³.

94. $V = 45\,000$ l, $45\,000 : 5 = 9\,000$ s $= 2{,}5$ h.

95. **а)** $V = 192$ cm³; **б)** $V = 558$ cm³; **в)** $V = 5{,}632$ dm³.

96. $H = 4a$, $a = 3$ cm, $H = 12$ cm, $V = 108$ cm³.



97. $B = 25$ cm², $a = 5$ cm, $H = 6$ cm, $V = 150$ cm³.

98. $a = 12$ cm, $P = 768$ cm². **99.** $P = 608$ cm².

100. $V = 1\,200$ cm³.

101. $a = 2\sqrt{5}$ cm, $H = 6\sqrt{5}$ cm, $V = 120\sqrt{5}$ cm³.

102. $V = 96$ cm³. **103.** Стане 245 000 литара воде.

104. **а)** $V = 300\sqrt{3}$ cm³; **б)** $V = 256\sqrt{3}$ cm³;
в) $V = 1{,}08\sqrt{3}$ dm³.

105. **а)** $V = 180\sqrt{3}$ cm³; **б)** $V = 80\sqrt{3}$ cm³;
в) $V = 1\,000\sqrt{3}$ cm³; **г)** $V = 16\sqrt{3}$ cm³.

106. $H = 8$ cm, $a = 6$ cm, $V = 72\sqrt{3}$ cm³.

107. $B = 81\sqrt{3}$ cm², $M = 1\,188\sqrt{3}$ cm²,
$H = 22\sqrt{3}$ cm, $V = 5\,346$ cm³.

108. $a = 40$ cm; **а)** $H = 20\sqrt{3}$ cm, $V = 24\,000$ cm³;
б) $H = 120$ cm, $V = 48\,000\sqrt{3}$ cm³.

109. $V = 32\sqrt{3}$ cm³. **110.** $V = 28\sqrt{3}$ cm³.

111. **а)** $V = 324\sqrt{3}$ cm³; **б)** $V = 1\,296\sqrt{3}$ cm³.

112. $B = 9\sqrt{3}$ cm², $a = 6$ cm, $M = 126$ cm²,
$P = (18\sqrt{3} + 126)$ cm².

113. $P = (8\sqrt{3} + 48)$ cm², $V = 16\sqrt{3}$ cm³.

114. $a = 10$ cm, $H = 10$ cm, $P = (50\sqrt{3} + 300)$ cm².

115. $P = (72\sqrt{3} + 504)$ cm², $V = 504$ cm³.

116. **а)** $h=\frac{a\sqrt{3}}{2}$, $a=12$ cm, $H=12\sqrt{3}$ cm,
$P=504\sqrt{3}$ cm^2, $V=1296$ cm^3;
б) $a=6$ cm, $P=126\sqrt{3}$ cm^2, $V=162$ cm^3.

117. **а)** $V=1\,152\sqrt{3}$ cm^3; **б)** $V=3\,456\sqrt{3}$ cm^3;
в) $V=9{,}72\sqrt{3}$ dm^3.

118. $V=1\,800\sqrt{3}$ cm^3. **119.** $V=2\,592\sqrt{3}$ cm^3.

120. **а)** $V=3\,240\sqrt{3}$ cm^3; **б)** $V=750\sqrt{3}$ cm^3;
в) $V=9\,000$ cm^3; **г)** $V=270\sqrt{3}$ cm^3.

121. $a=6$ cm, $H=6$ cm, $V=324\sqrt{3}$ cm^3.

122. $a=H=8$ cm, $V=768$ cm^3.

123. $B=54\sqrt{3}$ cm^2, $a=6$ cm, $P=(108\sqrt{3}+360)$ cm^2.

124. $a=12$ cm, $H=3$ cm, $P=648\sqrt{3}$ cm^2,
$V=648\sqrt{3}$ cm^3.

125. $H=3x$, $a=2x$, $x=4$ cm, $B=96\sqrt{3}$ cm^2,
$M=576$ cm^2, $P=(192\sqrt{3}+576)$ cm^2,
$V=1152\sqrt{3}$ cm^3.

126. $H=d=a\sqrt{3}=9$ cm, $a=3\sqrt{3}$ cm;
а) Површина већег дијагоналног пресека је
$54\sqrt{3}$ cm^2; **б)** $V=\frac{729\sqrt{3}}{2}$ cm^3.

127. $V=288$ cm^3.

128. $P=(144\sqrt{3}+864)$ cm^2, $V=2\,592$ cm^3.

129. $m=40{,}5$ kg. **130.** $m=12{,}14$ kg. **131.** Не може.

132. Ископаће канал за 2 сата 30 минута.

133. Ниво воде ће се подићи за 2,25 cm.

134. **а)** мање од 10 cm.

135. Стане 2 450 000 литара воде.

136. Камионом може да се превезе највише 907 цигли.

137. Површина једне летве је 3 100 cm^2, а свих 155 m^2. Потребно је 38,75 kg боје.
Маса једне летве је
$140\text{ cm}\cdot 10\text{ cm}\cdot 1\text{ cm}\cdot 0{,}74\text{ g/cm}^3=1\,036$ g,
а свих 518 kg.

138. Марти је потребно најмање 3 480 cm^2 картона.

139. За кречење учионице потребно је 18,8 литара боје.

140. $P=(144+288\sqrt{2})$ cm^2, $V=864$ cm^3.

141. 55,43 kg.

142. Површина крова прекривена црепом је
$200\sqrt{2}$ m$^2\approx 282$ m^2.

143. 64 cm.

144. **а)** 4 даске; **б)** 3 200 динара.

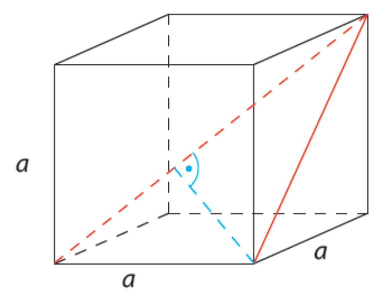
145. 18,729 kg.

146. **а)** $P=504$ cm^2, $V=648$ cm^3;
б) $P=864$ cm^2, $V=1\,728$ cm^3;
в) $P=576$ cm^2, $V=864$ cm^3;
г) $P=1\,224$ cm^2, $V=1\,728$ cm^3.

147. **а)** $P=500$ cm^2, $V=625$ cm^3;
б) $P=550$ cm^2, $V=625$ cm^3;
в) $P=500$ cm^2, $V=625$ cm^3.

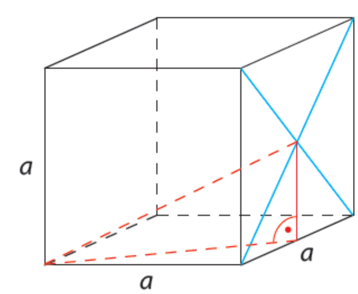
Решења задатака за додатни рад

1. Ивица коцке је $7\sqrt{6}$ cm. Површина коцке је 1 764 cm^2.

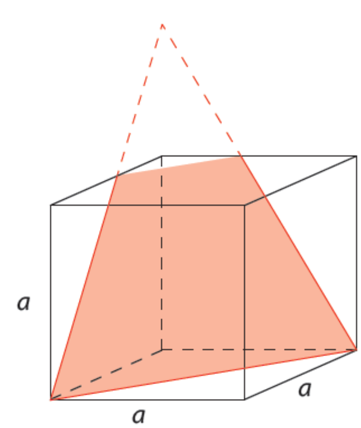


2. Дијагонала квадра је $D=\sqrt{a^2+b^2+c^2}=5\sqrt{3}$ cm, дијагонала коцке је $5\sqrt{3}$ cm, а ивица коцке 5 cm. Површина коцке је 150 cm^2, а запремина 125 cm^3.

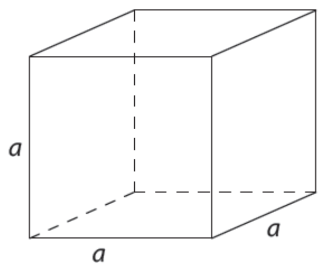
3. Ивица коцке је 16 cm а запремина коцке је 4 096 cm^3.



4. Пресек равни и коцке је једнакокраки трапез површине 162 cm^2.



5. Растојање центра коцке од једне ивице једнако је половини дијагонале стране. Види слику! Ивица коцке је 16 cm. Површина коцке је 1 536 cm^2.



6. Нека су a,b,c ивице квадра. Тада је $a = 2$ cm, $b = 4$ cm, $c = 8$ cm, $V = 64$ cm^3.

7. Ивице квадра су

$$\sqrt{\frac{m^2+n^2-p^2}{2}}, \sqrt{\frac{m^2+p^2-n^2}{2}}, \sqrt{\frac{n^2+p^2-m^2}{2}}.$$

8. Нека су a, b, c ивице квадра.
Тада је $a : b : c = 3 : 4 : 12$, односно $a = 3x$, $b = 4x$, $c = 12x$ где је x коефицијент пропорционалности.
Из: $52^2 = (3x)^2 + (4x)^2 + (12x)^2$,
$x = 4$, следи $a = 12$ cm, $b = 16$ cm, $c = 48$ cm.
Запремина квадра је $V = 9\,216$ cm^3.

9. Нека су a, b, c ивице квадра.
Тада је $a : b : c = m : n : p$, односно $a = mx$, $b = nx$, $c = px$, где је x коефицијент пропорционалности.
Из: $D^2 = (mx)^2 + (nx)^2 + (px)^2$, $x = \dfrac{D}{\sqrt{m^2+n^2+p^2}}$

$$a = \frac{mD}{\sqrt{m^2+n^2+p^2}},$$

$$b = \frac{nD}{\sqrt{m^2+n^2+p^2}},$$

следи $c = \dfrac{pD}{\sqrt{m^2+n^2+p^2}}$.

Запремина квадра је

$$V = \frac{mnpD^3}{\left(m^2+n^2+p^2\right)\sqrt{m^2+n^2+p^2}}.$$

10. $V = 36$ cm^3.

11. $V = \sqrt{P_1P_2P_3}$.

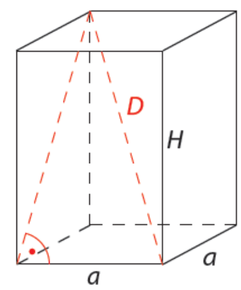
12. $3n$ ивица, $2n$ темена, $n + 2$ страна, $n(n-3)$ просторних дијагонала.

13. $V = 16\sqrt{3}$ cm^3. **14.** $P = 128$ cm^2.

15. Нека су a, b, c ивице квадра.
Тада је $2ab + 2ac + 2bc = 924$, $a^2 + b^2 + c^2 = 676$, $a^2 + b^2 + c^2 + 2ab + 2ac + 2bc = 1\,600$, односно, $(a + b + c)^2 = 1\,600$, $a + b + c = 40$ cm. Збир свих ивица квадра је $4a + 4b + 4c = 160$ cm.

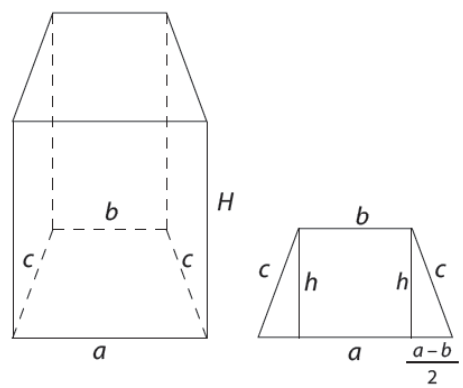
16. Ивица ромба је 4 cm. Дужа дијагонала основе је $4\sqrt{3}$ cm па је и висина призме $4\sqrt{3}$ cm. Запремина призме је 96 cm^3.

17. Основна ивица је $a = 6$ cm.
Из $H^2 = D^2 - (a\sqrt{2})^2$ следи да је $H = 6\sqrt{2}$ cm.
Запремина призме је $216\sqrt{2}$ cm^3. Види слику!



18. $P = 1\,800$ cm^2, $V = 3\,600$ cm^3.

19. $H = \dfrac{a+b}{2} = 7$ cm, $h^2 = c^2 - \left(\dfrac{a-b}{2}\right)^2 = 4$ cm,
$B = 28$ cm^2, $M = 168$ cm^2, $P = 22{,}4$ cm^2,
$V = 196$ cm^3. Види слику!



20. $V = 140$ cm^3.

21. Површина већег дијагоналног пресека је 300 cm^2. Површина мањег дијагоналног пресека је 200 cm^2.

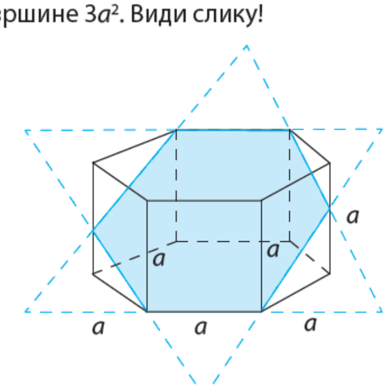
22. $V = 48\sqrt{3}$ cm^3. **23.** $V = 288$ cm^3.

24. $P = (96 + 88\sqrt{3})$ cm^2, $V = 96\sqrt{3}$ cm^3.

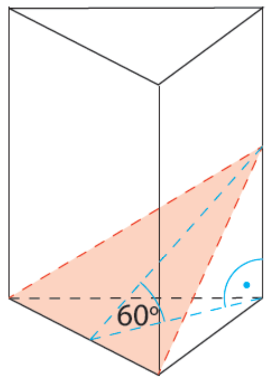
25. $P = (192 + 128\sqrt{2})$ cm^2.

26. $V = 6\sqrt{6}$ cm^3.

27. Пресек равни и призме је шестоугао површине $3a^2$. Види слику!



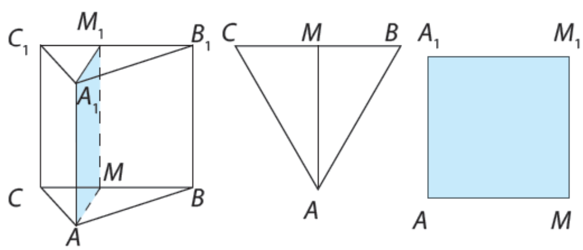
28. $a = 4\sqrt{2}$ cm, $H = 12\sqrt{2}$ cm,
$P = (16\sqrt{3} + 288)$ cm², $V = 96\sqrt{6}$ cm³.



29. Нека су M и M_1 средишта, редом, ивица BC и B_1C_1. Из $AM = 10$ cm, следи $a = \frac{20\sqrt{3}}{3}$ cm, $H = 10$ cm. Површина призме је

$$P = 2 \cdot \frac{\left(\frac{20\sqrt{3}}{3}\right)^2 \sqrt{3}}{4} + 3 \cdot \frac{20\sqrt{3}}{3} \cdot 10,$$

$$P = \frac{800\sqrt{3}}{3} \text{cm}^2$$



30. $V = 864\sqrt{2}$ cm³. **31.** V =3 072 cm³.

32. $P = (260 + 80\sqrt{2})$ cm².

33. Нека су a,b,c ивице основе призме. Из $aH = 64$ cm², $bH = 80$ cm², $cH = 48$ cm², $H = 16$ cm, следи да је $a = 4$ cm, $b = 5$ cm, $c = 3$ cm. Запремина призме је $V = 96$ cm³.

Питалице – решења:

1. не. **2.** да. **3.** не. **4.** да. **5.** не. **6.** не. **7.** да. **8.** да. **9.** да. **10.** да. **11.** да.

Предлог теста знања – решења:

1. В. **2.** А. **3.** Г. **4.** Д. **5.** Б. **6.** А. **7.** В. **8.** Д.

Предлог контролне вежбе – решења:

1. $D = 17$ cm.

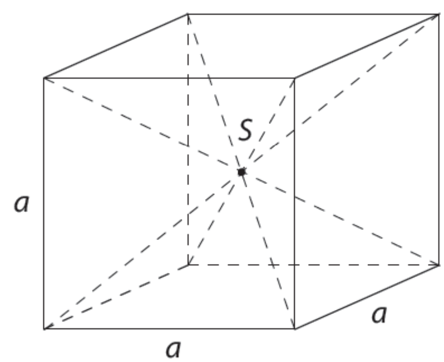
2. $P_p = 48\sqrt{2}$ cm².

3. $O = (12\sqrt{3} + 18)$ cm.

4. $P = 600$ cm², $V = 216$ cm³.

5. $P_p = 50$ cm².

6. Растојање центра коцке од једног темена једнако је половини дијагонале коцке. Дијагонала коцке је $2\sqrt{3}$ cm. Ивица коцке је 2 cm. Површина коцке је 24 cm², запремина коцке је 8 cm³.



7. $M = 900$ cm².

8. $P = (72\sqrt{3} + 360)$ cm².

9. $P = (72+144\sqrt{3})$ cm².

10. $V = 162\sqrt{3}$ cm³.

11. $V = 576\sqrt{3}$ cm³.

12. $V = 25$ cm³.

13. $V = 720$ m³=720 000 l.

14. $m = 117$ kg.

15. 7 560 динара.

ИНДЕКС ПОЈМОВА

ИНДЕКС ПОЈМОВА

ЛИТЕРАТУРА

Вера Јоцковић, Владимир Мићић, Ђорђе Дугошија, Војислав Андрић. *Математика за 8. разред основне школе*. Завод за уџбенике. Београд. 2011.

Вера Јоцковић, Владимир Мићић, Ђорђе Дугошија, Војислав Андрић. *Збирка задатака из математике за 8. разред основне школе*. Завод за уџбенике. Београд. 2011.

Вера Јоцковић, Владимир Мићић, Ђорђе Дугошија, Војислав Андрић. *Приручник за наставнике математике* (*за 8. разред основне школе*). Завод за уџбенике. Београд. 2011.

Вера Јоцковић, Владимир Мићић, Ђорђе Дугошија, Војислав Андрић. *Збирка задатака из математике за оне који могу и желе више за 8. разред основне школе*. Завод за уџбенике. Београд. 2011.

Бранимир Дакић, Невен Елезовић. *Математика за 1. разред гимназије, 1. и 2. део.* ИП Елемент. Загреб. 2015.

Иван Ивић, Ана Пешикан, Слободанка Антић. *Водич за добар уџбеник*. Образовни форум. Београд. 2009.