Јелена Алексић • Сандра Андрић
Верица Илић • Никола Митриновић

МАТЕМАТИКА 7

Уџбеник са збирком задатака
за седми разред основне школе

АрхиКњига

МАТЕМАТИКА 7

Уџбеник са збирком задатака за седми разред основне школе

ФОНДАЦИЈА АЛЕК КАВЧИЋ

Редакција Фондације Алек Кавчић

Аутори уџбеника: Проф. др Јелена Алексић, Сандра Андрић и Верица Илић

Аутор збирке: Мр Никола Митриновић

Рецензенти: Проф. др Миљан Кнежевић, Математички факултет, Београд
Бранка Зацеро, ОШ „Руђер Бошковић", Београд
Душанка Ковачевић, ОШ „Милош Црњански", Београд

Главни уредник: Крста Поповски

Уредник: Проф. др Александар Кавчић

Илустрације: Shutterstock, Wikipedia Commons

Лектура и коректура: Мр Марија Милосављевић Тодоровић

Ликовни уредник: Слађана Николић

Дизајн и прелом: Срђан Попов

Издавач: АрхиКњига д. о. о.
Љубостињска 2, Београд

За издавача: Оливер Кавчић

Штампа: Birograf Comp d. o. o., Земун

Прво издање, 2025.

Тираж: 20.000

ISBN: 978-86-6130-064-6

CIP - Каталогизација у публикацији Народна библиотека Србије, Београд

37.016:51(075.2)

МАТЕМАТИКА 7: уџбеник са збирком задатака : за седми разред основне школе / Јелена Алексић ... [и др.]. - 1. изд. - Београд : АрхиКњига, 2025 (Земун : Birograf Comp). - 248 стр. : илустр. ; 29 cm

Тираж 20.000. - Регистар.

ISBN 978-86-6130-064-6

1. Алексић, Јелена, 1979- [autor]

COBISS.SR-ID 160890633

Министарство просвете, науке и технолошког развоја Републике Србије одобрило је овај уџбенички комплет за употребу у школама решењем број:
650-02-00196/2024-07 од 24. 12. 2024. године.

САДРЖАЈ

Драги ученици,

Пред вама је уџбеник са збирком задатака који прати Програм наставе и учења за седми разред основне школе, а који садржи шест поглавља – Реални бројеви, Питагорина теорема, Цели алгебарски изрази, Многоугао, Круг и Обрада података.

Ауторке уџбеника, Јелена Алексић, Сандра Андрић и Верица Илић, су у свакој лекцији пажљиво изложиле теорију, изабрале и детаљно решиле карактеристичне примере, али и употпуниле лекције разним занимљивостима, најчешће из богате историје математике.

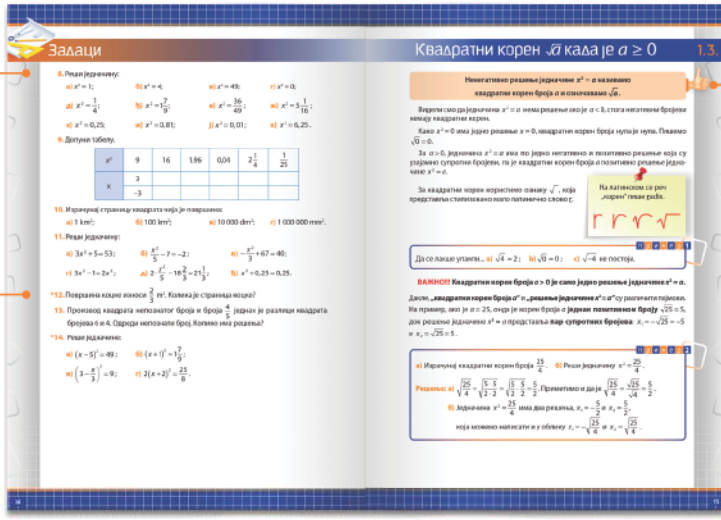
Аутор збирке задатака, Никола Митриновић, осмислио је велики број задатака различите тежине и пажљиво их распоредио, како би збирка била од користи приликом усвајања и провере знања, како кроз самосталан рад, тако и уз помоћ наставника.

Ова књига настала је као резултат нашег искуства у настави математике у седмим разредима Гимназије „Јован Јовановић Змај" у Новом Саду и Математичке гимназије у Београду, са циљем да буде корисно помоћно средство, како ученицима, тако и нашим колегама наставницима. Захваљујемо својим ученицима и колегама, који су нам несебично помагали својим идејама, саветима и лепим решењима задатака, као и уредницима и рецензентима на подршци и сугестијама које су допринеле да ова књига буде што квалитетнија и кориснија.

Срећно,

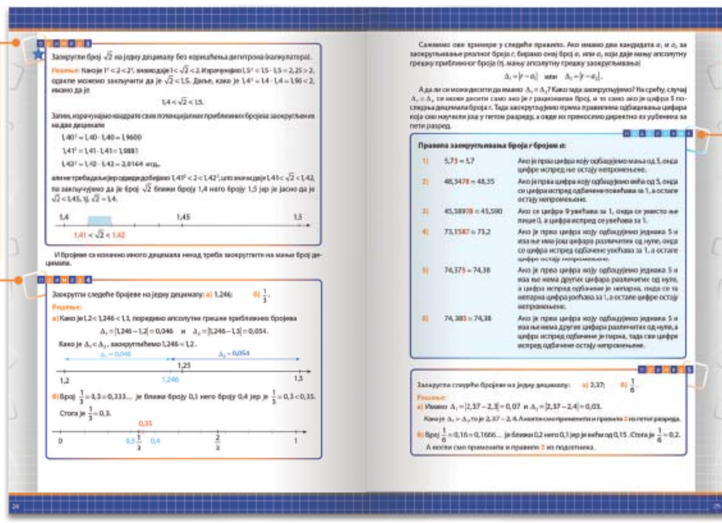
Аутори

ВОДИЧ



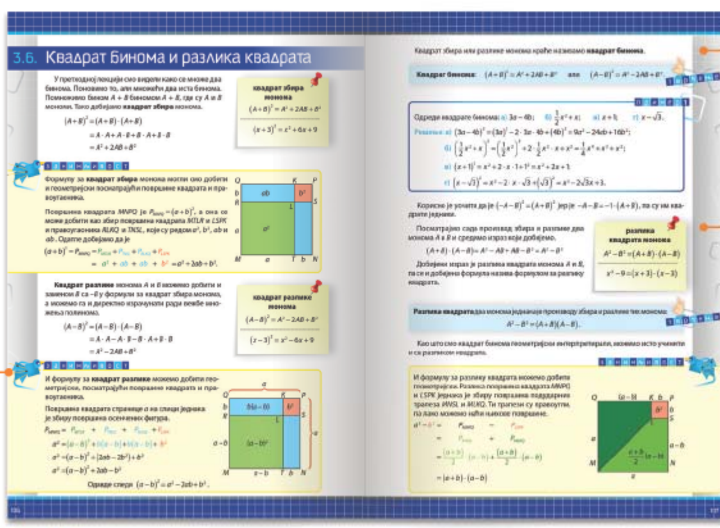
Задаци – задаци различитих тежина и сложености за увежбавање градива лекције; **тежи и сложенији задаци су обележени звездицом**

Дефиниција – објашњење математичког појма



Пример – решени примери за разумевање градива изложеног у лекцији; **нешто тежи и сложенији примери су обележени звездицом**

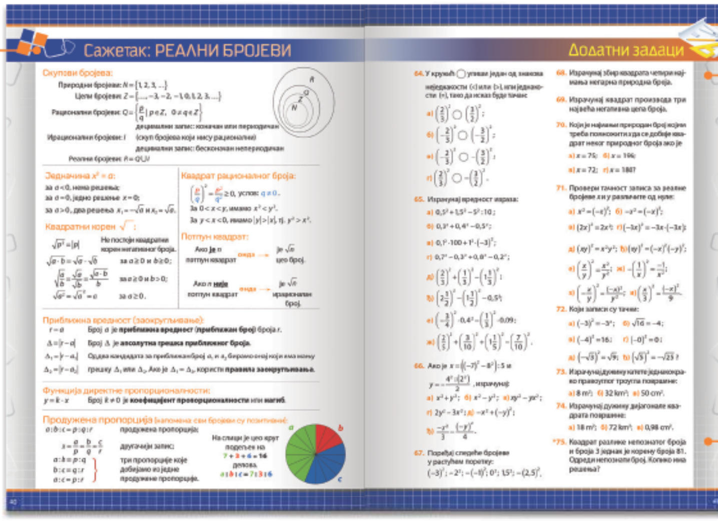
Подсетник – подсећање на претходно усвојено градиво



Тврђење – математичко тврђење које се користи у процесу математичког закључивања

Цедуља – кратки искази којима треба поклонити пажњу

Занимљивост – интересантне чињенице у вези са наставним садржајем у оквиру одређене лекције

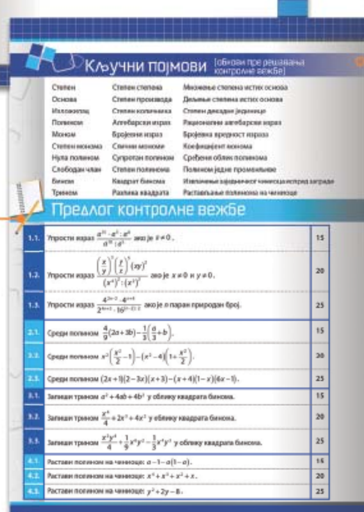


Додатни задаци – задаци различитих тежина и сложености за додатно увежбавање градива тематске целине; **тежи и сложенији задаци су обележени звездицом**

Сажетак – То је најмање што мора да се разуме и запамти из одређене тематске целине

Питалице – кратки задаци на које се траже брзи одговори (да/не) и који се углавном решавају без великог рачунања

Предлог теста знања – тестови на крају сваке тематске целине садрже по осам задатака вишеструког избора углавном са пет понуђених одговора



Кључни појмови – преглед најважних математичких појмова

Предлог контролне вежбе – контролни задаци на крају тематске целине за самопроцену знања ученика дати су диференцирано и по образовним нивоима

1 РЕАЛНИ БРОЈЕВИ

ЗАНИМЉИВОСТ

МИСТЕРИЈА ИРАЦИОНАЛНИХ БРОЈЕВА

Латинска реч *ratio*, између осталог, значи и разломак, тако да реални бројеви који могу да се напишу у облику разломка зову се рационални, а који не могу – ирационални.

ОТКРИЋЕ БРОЈА $\sqrt{2}$

У 5. веку пре н. е. грчки филозоф **Хипас из Метапонта** (на територији данашње Италије) открио је да постоје бројеви који се не могу написати у облику разломка. Питагорејцима (следбеницима много познатијег филозофа Питагоре, оснивача чувене и утицајне школе о бројевима) није се свидело Хипасово откриће јер је реметило њихово учење о бројевима. Мото у који су питагорејци дубоко веровали гласио је: „Све је број", а Хипасово откриће је наизглед нарушавало веровање питагорејаца. Стога су Хипаса, по неким историјским изворима, питагорејци бацили у море. По другим изворима, Хипас се утопио.

Његова смрт је остала легенда, али откриће је стварно. Хипасов доказ да $\sqrt{2}$ није рационалан број и данас се учи, као на пример овде у седмом разреду. Један је од најједноставнијих и најлогичнијих доказа такозвани доказ свођењем на противречност. Полази се од претпоставке да број $\sqrt{2}$ може да се напише у облику разломка, а онда се низом логичних закључака (или математичких прорачуна) дође до неке нелогичности (противречности), одакле остаје једини могућ логични крајњи закључак да полазна претпоставка није тачна.

Хипас

РЕАЛНИ БРОЈЕВИ

У овом поглављу ћемо се упознати са реалним бројевима. Да бисмо лакше савладали ново градиво, подсетимо се важних појмова у вези са природним, целим и рационалним бројевима.

ПОДСЕТНИК

Скуп природних бројева $N = \{1, 2, 3, \ldots\}$

Скуп целих бројева $Z = \{\ldots, -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, \ldots\}$

Парове бројева 1 и −1, 2 и −2 итд. зовемо **супротни бројеви**. Међусобно супротни бројеви имају исту апсолутну вредност, нпр. $|-3| = |3| = 3$.

$-n$ n

супротни бројеви

$|-n| = |n|$

ПОДСЕТНИК

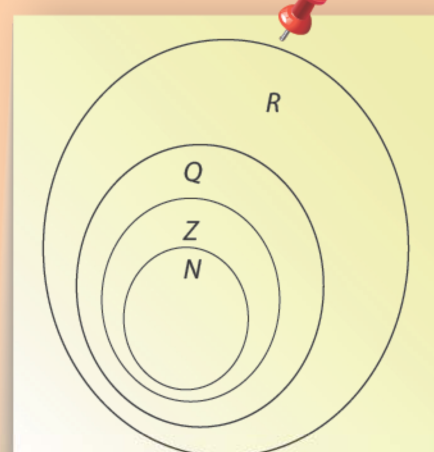
Рационалне бројеве смо записивали у облику разломка или у децималном запису.

То су бројеви облика $\frac{p}{q}$, где је p било који цео број, а q било који цео број различит од нуле. Нпр. $\frac{2}{3}$ је рационалан број јер је 2 цео број, што пишемо $2 \in Z$, а 3 је такође цео број различит од нуле, дакле $3 \in Z$ и $3 \neq 0$. По истом правилу је и $\frac{4}{6}$ рационалан број, али овај разломак (рационалан број) можемо скратити, па имамо $\frac{4}{6} = \frac{2}{3}$.

Скуп рационалних бројева $Q = \left\{ \frac{p}{q} \mid p \in Z,\ 0 \neq q \in Z \right\}$

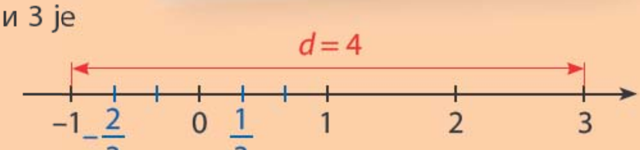
Скуп целих бројева је подскуп скупа рационалних бројева. На пример, број −3 можемо написати као $\frac{-3}{1} = -3$ или $\frac{3}{-1} = -3$, те видимо да сваки цео број можемо представити као рационалан број.

Реални бројеви. Осим рационалних бројева, постоје и реални бројеви. Скуп реалних бројева означаваћемо словом R и видећемо да је скуп рационалних бројева подскуп скупа реалних бројева, дакле $Q \subset R$.



Као и рационални бројеви, и реални бројеви се приказују на **бројевној правој** (коју можемо назвати и реална права). Растојање између два броја x и y на бројевној правој мери се апсолутном вредношћу њихове разлике, $d = |x - y|$.

Нпр. растојање између бројева −1 и 3 је $d = |-1-3| = |-4| = 4$.



Квадрат рационалног броја 1.1.

подсетник

Подсетимо се правила за множење разломака, као и да је квадрат целог броја p једнак производу $p \cdot p$.

Занимљиво (а и корисно): Подсети (или увери) се да квадрат целог броја не може имати цифру јединица 2, 3, 7 или 8, и да је природан број p дељив бројем d ако и само ако је p^2 дељив са d^2.

$$\frac{a}{b} \cdot \frac{c}{d} = \frac{a \cdot c}{b \cdot d},$$

$$(b \neq 0 \quad \text{и} \quad d \neq 0)$$

$$p^2 = p \cdot p$$

Квадрат рационалног броја $\frac{p}{q}$ (где је $p \in Z$ и $0 \neq q \in Z$) рачунамо исто као у подсетнику, тако што број помножимо са самим собом. Притом користимо правила из подсетника. Дакле,

$$\left(\frac{p}{q}\right)^2 = \frac{p}{q} \cdot \frac{p}{q} = \frac{p \cdot p}{q \cdot q} = \frac{p^2}{q^2}.$$

пример 1

Израчунај квадрате бројева: **а)** $\frac{1}{2}$; **б)** 0,3; **в)** –4.

Решење: а) $\left(\frac{1}{2}\right)^2 = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{4}$; **б)** $(0,3)^2 = 0,3 \cdot 0,3 = 0,09$ **в)** $(-4)^2 = (-4) \cdot (-4) = 16$.

Кажемо да је „број 0,09 квадрат броја 0,3” или да је „0,3 на квадрат једнако 0,09”.

пример 2

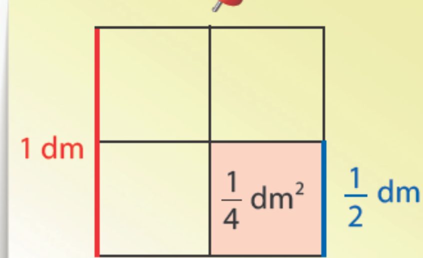
Израчунај површину квадрата странице $\frac{1}{2}$ dm.

Решење: Израчунали смо у претходном примеру да је $\left(\frac{1}{2}\right)^2 = \frac{1}{4}$, али морамо водити рачуна и о јединицама за дужину и површину. Дакле,

$$P = \left(\frac{1}{2}\,\text{dm}\right)^2 = \frac{1}{2}\,\text{dm} \cdot \frac{1}{2}\,\text{dm} = \frac{1}{4}\,\text{dm}^2.$$

Други (геометријски) начин: Приметимо да се, као на слици, квадрат странице 1 dm и површине 1 dm² може поделити на 4 квадрата странице $\frac{1}{2}$ dm. Стога је површина сваког од та четири квадрата једнака једној четвртини површине великог квадрата, дакле

$$\frac{1}{4} \cdot 1\,\text{dm}^2 = \frac{1}{4}\,\text{dm}^2.$$



На исти начин квадрирамо и рационалне бројеве у децималном запису.

пример 3

Израчунај површину квадрата чија је страница дугачка 0,3 cm.

Решење: $P = (0,3\text{ cm})^2 = 0,3\text{ cm} \cdot 0,3\text{ cm} = 0,09\text{ cm}^2$.

Како је површина ненегативан број, тако је и квадрат рационалног броја ненегативан број. Прецизније, **једино је квадрат нуле једнак нули**, а **квадрат сваког позитивног или негативног броја је позитиван број**.

$\left(\frac{p}{q}\right)^2 \geq 0$

пример 4

Израчунај квадрат броја $-\frac{1}{2}$. (Помоћ: квадрат негативног броја је позитиван број.)

Решење: $\left(-\frac{1}{2}\right)^2 = -\frac{1}{2} \cdot \left(-\frac{1}{2}\right) = \frac{1}{4}$

Да ли те изненађује што је $\left(\frac{1}{2}\right)^2 < \frac{1}{2}$? У ствари, то важи за све бројеве између 0 и 1.

тврђење

Ако је $0 < x < 1$, онда је $x^2 < x$.

Доказ: Када у неједнакости $x < 1$ помножимо позитивним бројем $x > 0$ леву и десну страну, смер неједнакости остаје исти, па добијамо $x \cdot x < 1 \cdot x$, тј. $x^2 < x$.

Знамо да за $x > 1$ важи $x^2 > x$ (што се може показати исто као у претходном доказу). Негативни бројеви су свакако мањи од својих квадрата јер је квадрат сваког броја позитиван. Бројеви 0 и 1 су једнаки својим квадратима.

тврђење

Ако је $0 < x < y$, онда је $x^2 < y^2$.

Доказ: Када неједнакост $x < y$ помножимо позитивним бројем $x > 0$, добијамо $x \cdot x < y \cdot x$, тј. $x^2 < xy$, а када исту ту неједнакост $x < y$ помножимо позитивним бројем $y > 0$, добијамо $xy < y^2$. Сада из $x^2 < xy$ и $xy < y^2$ следи да је $x^2 < y^2$.

За негативне бројеве важи обрнута неједнакост, тј. ако је $x < y < 0$, онда је $x^2 > y^2$. У том случају је заправо $|x| > |y| > 0$, па закључак о односу њихових квадрата можемо извести из претходног тврђења.

пример 5

Упореди квадрате следећих парова бројева: **а)** 0,5 и 0,6; **б)** –2 и –1.

Решење:

а) $0{,}5 < 0{,}6$, па је $0{,}5^2 = 0{,}25 < 0{,}36 = 0{,}6^2$. Или краће: $0 < 0{,}5 < 0{,}6$, па мора бити $0{,}5^2 < 0{,}6^2$.

б) $-2 < -1 < 0$, па је $(-1)^2 < (-2)^2$. А можемо и рачунати $(-1)^2 = 1 < 4 = (-2)^2$.

пример 6

Израчунај квадрат броја $\frac{3}{4}$. Претвори број $\frac{3}{4}$ у децимални запис и израчунај квадрат тог броја у децималном запису. Упореди добијене резултате.

Решење: Прво, $\left(\frac{3}{4}\right)^2 = \frac{3}{4} \cdot \frac{3}{4} = \frac{3 \cdot 3}{4 \cdot 4} = \frac{3^2}{4^2} = \frac{9}{16}$.

Претворимо сада $\frac{3}{4}$ у децимални запис дељењем броја 3 бројем 4,

$$\frac{3}{4} = 3 : 4 = 0{,}75.$$

Израчунајмо квадрат броја 0,75:

$$0{,}75^2 = 0{,}75 \cdot 0{,}75 = 0{,}5625.$$

Бројеве 0,5625 и $\frac{9}{16}$ можемо упоредити тако што 0,5625 претворимо у разломак

$$0{,}5625 = \frac{5625}{10\,000} = \frac{3 \cdot 3 \cdot \cancel{5 \cdot 5 \cdot 5 \cdot 5}}{2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot \cancel{5 \cdot 5 \cdot 5 \cdot 5}} = \frac{3 \cdot 3}{2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2} = \frac{9}{16}$$

или тако што број $\frac{9}{16}$ претворимо у децимални запис $\frac{9}{16} = 9 : 16 = 0{,}5625$.

Примећујемо да су квадрати $0{,}75^2$ и $\left(\frac{3}{4}\right)^2$ једнаки јер су и почетни бројеви 0,75 и $\frac{3}{4}$ једнаки.

Ускоро ћемо научити да обрнуто не мора да важи, тј. да ако су квадрати нека два рационална броја једнаки, ти бројеви не морају бити једнаки.

Задаци

1. Израчунај:

а) 1^2; **б)** 7^2; **в)** $(-11)^2$; **г)** -11^2; **д)** $\left(\frac{7}{5}\right)^2$; **ђ)** $-\left(-\frac{5}{7}\right)^2$; **е)** $-\left(\frac{5}{9}\right)^2$; **ж)** $\left(\frac{1}{3}\right)^2$.

2. Израчунај:

а) $0{,}2^2$; **б)** $-(-0{,}3)^2$; **в)** $1{,}1^2$; **г)** $-2{,}5^2$; **д)** $\left(1\frac{1}{3}\right)^2$; **ђ)** $\left(-2\frac{2}{5}\right)^2$; **е)** $-\left(1\frac{1}{4}\right)^2$; **ж)** $\left(2\frac{2}{4}\right)^2$.

3. Израчунај:

а) $\left(\frac{4}{5}\right)^2$; **б)** $\left(-\frac{4}{5}\right)^2$; **в)** $-\left(\frac{4}{5}\right)^2$; **г)** $\frac{4^2}{5}$; **д)** $-\frac{4}{5^2}$; **ђ)** $\frac{(-4)^2}{5}$.

4. Попуни табелу.

x	0,5	−0,7	$2\frac{1}{5}$	$-1\frac{2}{5}$	$\frac{3}{7}$	$\frac{3}{-2}$	$\frac{-2}{3}$	$-\frac{2}{3}$
x^2								

5. Израчунај вредност x^2 ако је:

а) $x = -\frac{2}{7}$; **б)** $x = 4\frac{1}{4}$; **в)** $x = \frac{-3}{-4}$; **г)** $x = 0{,}07$.

6. Одреди да ли је запис тачан:

а) $(-1) \cdot (-1) = 1^2$; **б)** $-1 \cdot (-1) = -1^2$; **в)** $\left(-\frac{3}{8}\right)^2 = \left(\frac{3}{8}\right)^2$; **г)** $0^2 = 0$; **д)** $3 \cdot 3 = (-3)^2$.

7. Израчунај површину квадрата странице a ако је:

а) $a = 6$ cm; **б)** $a = 1{,}5$ dm; **в)** $a = 2\frac{1}{3}$ m; **г)** $a = 0{,}4$ cm.

1.2. Решавање једначине $x^2 = a$ за $a \geq 0$

Сада ћемо се позабавити проналажењем бројева чији је квадрат једнак унапред датом броју a. Решаваћемо једначину $x^2 = a$, где је a унапред дат ненегативан рационалан број.

Посматрајмо прво случај $a = 0$. Већ смо приметили да само нула има квадрат једнак нули, стога једначина $x^2 = 0$ и има само једно решење: $x = 0$.

Ако је $x^2 = 0$, онда је $x = 0$.

Важи и обрнуто.

Ако је $x = 0$, онда је $x^2 = 0$.

Пример 1

Реши једначину $x^2 = 1$. Овде је $a = 1$.

Решење: У шестом разреду смо научили да је $1^2 = (-1)^2 = 1$, те једначина $x^2 = 1$ има (бар) два решења, $x_1 = -1$ и $x_2 = 1$.

Да нема више од два решења, што пишемо $x \in \{-1, 1\}$, показаћемо касније.

Пример 2

Реши једначину $x^2 = \frac{1}{4}$. Овде је $a = \frac{1}{4}$.

Решење: У претходној лекцији израчунали смо да је $\left(-\frac{1}{2}\right)^2 = \frac{1}{4}$, а како важи и $\left(\frac{1}{2}\right)^2 = \frac{1}{4}$, то једначина $x^2 = \frac{1}{4}$ има два решења, $x \in \left\{-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right\}$.

Из претходна два примера у којима је $a = 1^2 = 1$, тј. $a = \left(\frac{1}{2}\right)^2 = \frac{1}{4}$, можемо да закључимо да, ако је $a = b^2$ и $b \neq 0$, онда једначина $x^2 = b^2$ има два решења, супротне бројеве: $x_1 = b$ и $x_2 = -b$. Још раније смо приметили да је квадрат било ког рационалног броја ненегативан број. Стога, ако је $a < 0$, једначина $x^2 = a$ нема решење. Сумирајмо сада досадашње закључке о броју решења једначине $x^2 = a$ у следећој табели.

$a < 0$	$a = 0$	$a = b^2 > 0$, где је $b \neq 0$
Нема решења.	Постоји једно решење: $x = 0$.	Постоје два решења: $x_1 = b$ и $x_2 = -b$.

пример 3

Докажи да је $\{-1,\ 1\}$ скуп решења једначине $x^2=1$, дакле да има само два решења.

Решење: Како је $1^2=(-1)^2=1$, бројеви –1 и 1 јесу решења једначине $x^2=1$.

Докажимо сада да остали бројеви нису решења једначине $x^2=1$.

А) Докажимо да било који **број $p>1$ није решење**. Пошто је $p>1$, онда је $p\cdot p>1\cdot 1$, тј. $p^2>1$, што значи $p^2\neq 1$. Дакле, ниједан број p већи од 1 није решење једначине $x^2=1$.

Б) Докажимо да било који **број q између 0 и 1 није решење**. Ако је $0<q<1$, онда је $q\cdot q<1\cdot 1=1$, тј. $q^2\neq 1$. Дакле, ниједан број q између 0 и 1 није решење једначине $x^2=1$.

В) Квадрат нуле је нула, па ни **број 0 није решење** једначине $x^2=1$.

Г) Докажимо да било који **број $r<-1$ није решење**. Напишимо $r=-p$, где је $p>1$. Из $r=-p$ имамо $r^2=p^2$, а под А смо већ показали да је $p^2\neq 1$, па је зато и $r^2\neq 1$, те r није решење.

Д) Докажимо да било који **број s између –1 и 0** није решење. Напишимо $s=-q$, где је $0<q<1$. Али знамо $s^2=q^2$, а под Б смо већ доказали да је $q^2\neq 1$, па је зато и $s^2\neq 1$, те s није решење.

пример 4

Докажи да не постоји рационалан број чији је квадрат једнак броју 2.

Решење (доказ свођењем на противречност): Тврђење можемо доказати тако што претпоставимо супротно, тј. да постоји рационалан број чији је квадрат једнак броју 2 и та претпоставка нас доведе до неке **нелогичности**, тј. **противречности** (ово се зове **доказ свођењем на противречност**).

Дакле, претпоставимо да постоји позитиван рационалан број $\frac{p}{q}$ такав да је $p\in N,\ q\in N$ и НЗД$(p,q)=1$ и да је $2=\left(\frac{p}{q}\right)^2=\frac{p^2}{q^2}$. Одатле следи да је $2q^2=p^2$, па је p^2 дељив са 2. Стога је p паран број и може се записати у облику $p=2k$, где је k неки природан број.

Кад све спојимо у једну једнакост, добијамо $2q^2=p^2=(2k)^2=4k^2$. Кад поделимо леву и десну страну са 2, добијемо да је $q^2=2k^2$, што значи и да је и q паран природан број.

Добили смо да су оба броја p и q парни, тј. имају заједнички делилац 2, што је **нелогичност** (**противречност**) јер је претпоставка била да бројеви p и q имају највећи заједнички делилац 1, тј. НЗД$(p,q)=1$.

Стога претпоставка није тачна, тј. **НЕ** постоји позитиван рационалан број чији је квадрат једнак 2. (Сада одмах знамо да не постоји ни негативан рационалан број чији је квадрат једнак 2. Зашто?)

Овакав доказ извео је грчки математичар Хипас из Метапонта у 5. веку пре н. е.

Задаци

8. Реши једначину:

а) $x^2 = 1$; **б)** $x^2 = 4$; **в)** $x^2 = 49$; **г)** $x^2 = 0$;

д) $x^2 = \frac{1}{4}$; **ђ)** $x^2 = 1\frac{7}{9}$; **е)** $x^2 = \frac{36}{49}$; **ж)** $x^2 = 5\frac{1}{16}$;

з) $x^2 = 0{,}25$; **и)** $x^2 = 0{,}81$; **ј)** $x^2 = 0{,}01$; **к)** $x^2 = 6{,}25$.

9. Допуни табелу.

x^2	9	16	1,96	0,04	$2\frac{1}{4}$	$\frac{1}{25}$
x	3					
	−3					

10. Израчунај страницу квадрата чија је површина:

а) 1 km²; **б)** 100 km²; **в)** 10 000 dm²; **г)** 1 000 000 mm².

11. Реши једначину:

а) $3x^2 + 5 = 53$; **б)** $\frac{x^2}{5} - 7 = -2$; **в)** $-\frac{x^2}{3} + 67 = 40$;

г) $3x^2 - 1 = 2x^2$; **д)** $2 \cdot \frac{x^2}{5} - 18\frac{2}{3} = 21\frac{1}{3}$; **ђ)** $x^2 + 0{,}25 = 0{,}25$.

***12.** Површина коцке износи $\frac{2}{3}$ m². Колика је страница коцке?

13. Производ квадрата непознатог броја и броја $\frac{4}{5}$ једнак је разлици квадрата бројева 6 и 4. Одреди непознати број. Колико има решења?

***14.** Реши једначине:

а) $(x-5)^2 = 49$; **б)** $(x+1)^2 = 1\frac{7}{9}$;

в) $\left(3 - \frac{x}{3}\right)^2 = 9$; **г)** $2(x+2)^2 = \frac{25}{8}$.

Квадратни корен $\sqrt{a}$ када је $a \geq 0$ 1.3.

Ненегативно решење једначине $x^2 = a$ називамо квадратни корен броја a и означавамо $\sqrt{a}$.

Видели смо да једначина $x^2 = a$ нема решење ако је $a < 0$, стога негативни бројеви немају квадратни корен.

Како $x^2 = 0$ има једно решење $x = 0$, квадратни корен броја нула је нула. Пишемо $\sqrt{0} = 0$.

За $a > 0$, једначина $x^2 = a$ има по једно негативно и позитивно решење која су узајамно супротни бројеви, па је квадратни корен броја a позитивно решење једначине $x^2 = a$.

За квадратни корен користимо ознаку $\sqrt{}$, која представља стилизовано мало латинично слово **r**.

На латинском се реч „корен” пише **r**adix.

пример 1

Да се лакше упамти... **а)** $\sqrt{4} = 2$; **b)** $\sqrt{0} = 0$; **c)** $\sqrt{-4}$ не постоји.

ВАЖНО!!! Квадратни корен броја $a > 0$ је само једно решење једначине $x^2 = a$.

Дакле, **„квадратни корен броја a”** и **„решење једначине $x^2 = a$”** су различити појмови. На пример, ако је $a = 25$, онда је корен броја a **једнак позитивном броју** $\sqrt{25} = 5$, док решење једначине $x^2 = a$ представља **пар супротних бројева**: $x_1 = -\sqrt{25} = -5$ и $x_2 = \sqrt{25} = 5$.

пример 2

а) Израчунај квадратни корен броја $\frac{25}{4}$. **б)** Реши једначину $x^2 = \frac{25}{4}$.

Решење: а) $\sqrt{\frac{25}{4}} = \sqrt{\frac{5 \cdot 5}{2 \cdot 2}} = \sqrt{\frac{5}{2} \cdot \frac{5}{2}} = \frac{5}{2}$. Приметимо и да је $\sqrt{\frac{25}{4}} = \frac{\sqrt{25}}{\sqrt{4}} = \frac{5}{2}$.

б) Једначина $x^2 = \frac{25}{4}$ има два решења, $x_1 = -\frac{5}{2}$ и $x_2 = \frac{5}{2}$,

која можемо написати и у облику $x_1 = -\sqrt{\frac{25}{4}}$ и $x_2 = \sqrt{\frac{25}{4}}$.

Користећи ознаку за корен $\sqrt{}$, решења једначине $x^2 = a$ можемо представити следећом табелом.

$a < 0$	$a = 0$	$a > 0$
Нема решења.	Једно решење: $x = 0$.	Два решења: $x_1 = -\sqrt{a}$ и $x_2 = \sqrt{a}$.

„Квадрат” и „корен” су међусобно **инверзне** операције **само на скупу ненегативних бројева**. То значи да је за $p \geq 0$ корен квадрата броја p једнак броју p, али је и квадрат корена броја p такође једнак броју p, тј. $\sqrt{p^2} = p = \sqrt{p}^2$.

На пример $\sqrt{3^2} = 3 = \sqrt{3}^2$.

Међутим, како је $(-3)^2 = 9$, то је $\sqrt{(-3)^2} = \sqrt{9} = 3 = |-3|$.

Због тога за све бројеве a можемо закључити да је $\sqrt{a^2} = |a|$.

$$\sqrt{a^2} = |a|$$

$$\sqrt{(-3)^2} = |-3| = 3$$

$$\sqrt{3^2} = |3| = 3$$

подсетник

Природне бројеве попут 1, 4, 9, 16... зовемо **потпуни квадрати** јер је њихов корен природан број. Наравно, број 2 није потпун квадрат јер не постоји природан број чији је квадрат број 2. (У претходној лекцији смо видели да заправо не постоји ни рационалан број чији је квадрат број 2.)

Ако су и бројилац и именилац рационалног броја потпуни квадрати, онда је лако израчунати корен тог броја, нпр. $\sqrt{\frac{100}{49}} = \sqrt{\frac{10^2}{7^2}} = \sqrt{\left(\frac{10}{7}\right)^2} = \frac{10}{7}$. Овај закључак представимо и формулом

$$\sqrt{\frac{p^2}{q^2}} = \left|\frac{p}{q}\right| = \frac{|p|}{|q|} = \frac{\sqrt{p^2}}{\sqrt{q^2}}, \qquad q \neq 0.$$

пример 3

Израчунај: **а)** $\sqrt{\frac{36}{16}}$; **б)** $\sqrt{\frac{128}{98}}$; **в)** $\sqrt{\frac{48}{108}}$.

Решење:

а) $\sqrt{\frac{36}{16}} = \frac{\sqrt{36}}{\sqrt{16}} = \frac{6}{4} = \frac{3}{2}$; **б)** $\sqrt{\frac{128}{98}} = \sqrt{\frac{64}{49}} = \frac{8}{7}$; **в)** $\sqrt{\frac{48}{108}} = \sqrt{\frac{16}{36}} = \sqrt{\frac{4}{9}} = \frac{2}{3}$.

пример 4

Реши једначину $27x^2 = 12$.

Решење: $x^2 = \frac{12}{27} = \frac{4}{9}$, одакле добијамо два решења: $x_1 = \sqrt{\frac{4}{9}} = \frac{2}{3}$ и $x_2 = -\sqrt{\frac{4}{9}} = -\frac{2}{3}$.

Ако треба да израчунамо квадратни корен рационалног броја у децималном запису, најједноставније ћемо то урадити преласком у облик разломка, као у следећем примеру.

пример 5

Израчунај: а) $\sqrt{0,09}$; б) $\sqrt{1,44}$.

Решење: а) $\sqrt{0,09}=\sqrt{\frac{9}{100}}=\frac{\sqrt{9}}{\sqrt{100}}=\frac{3}{10}=0,3$; б) $\sqrt{1,44}=\sqrt{\frac{144}{100}}=\frac{\sqrt{144}}{\sqrt{100}}=\frac{12}{10}=1,2$.

Задаци

15. Израчунај вредност корена:

а) $\sqrt{81}$; б) $\sqrt{625}$; в) $\sqrt{169}$; г) $\sqrt{4900}$;

д) $\sqrt{0,16}$; ђ) $\sqrt{0,01}$; е) $\sqrt{1,21}$; ж) $\sqrt{6,25}$;

з) $\sqrt{\frac{1}{16}}$; и) $\sqrt{\frac{9}{25}}$; ј) $\sqrt{\frac{49}{121}}$; к) $\sqrt{\frac{81}{4}}$.

16. Допуни табелу.

x	100	64	196	289	729
$\sqrt{x}$	10				

17. Реши једначину:

а) $\sqrt{x}=5$; б) $\sqrt{x}=7$; в) $\sqrt{x}=0$; г) $\sqrt{x}=11$;

д) $\sqrt{x}=\frac{2}{3}$; ђ) $\sqrt{x}=\frac{3}{2}$; е) $\sqrt{x}=\frac{7}{9}$; ж) $\sqrt{x}=2\frac{1}{3}$;

з) $\sqrt{x}=0,5$; и) $\sqrt{x}=1,2$; ј) $\sqrt{x}=2,3$; к) $\sqrt{x}=3,2$.

18. Ослободи се корена:

а) $\sqrt{5^2}$; б) $\sqrt{(-5)^2}$; в) $\sqrt{\left(\frac{3}{4}\right)^2}$; г) $\sqrt{\left(-\frac{3}{4}\right)^2}$;

д) $\sqrt{\left(1\frac{1}{2}\right)^2}$; ђ) $\sqrt{\left(-1\frac{1}{2}\right)^2}$; е) $\sqrt{\left(\sqrt{2}-1\right)^2}$; ж) $\sqrt{\left(1-\sqrt{2}\right)^2}$.

19. Корен збира непознатог броја и броја 2 једнак је 1,5. Одреди непознати број.

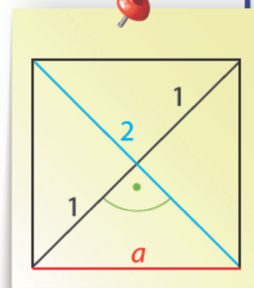
1.4. Ирационални бројеви и бројевна права

Већ смо показали да не постоји рационалан број једнак броју $\sqrt{2}$. А да ли уопште постоји број $\sqrt{2}$? Ако постоји, онда мора постојати и дуж дужине $\sqrt{2}$. Конструишимо сада такву дуж и тиме покажимо да број $\sqrt{2}$ заиста постоји.

пример 1

Конструиши дуж дужине $\sqrt{2}$.

Решење: Површину квадрата странице a и дијагонале d можемо рачунати на два начина: помоћу странице $P=a^2$ и помоћу дијагонале $P=\dfrac{d^2}{2}$. Ако је $P=2$, добијамо да је $d=2$, а онда је $a=\sqrt{2}$. Дакле, конструишимо квадрат чија дијагонала има дужину 2, а страница тог квадрата ће бити тражена дуж дужине $\sqrt{2}$. Довољно је конструисати правоугли троугао са катетама дужине 1 (види слику).



Закључујемо да **број $\sqrt{2}$ постоји.**

Сада је јасно да осим рационалних постоје и још неки бројеви који нису рационални. Бројеве који нису рационални зовемо **ирационални**.

Ирационални бројеви су бројеви који постоје, а нису рационални.

Скуп ирационалних бројева обележавамо великим латиничним словом *I*.

Латинска реч *ratio*, између осталог значи и разломак. Стога, скуп бројева који могу да се напишу у облику разломка зовемо скуп рационалних бројева *Q*, а скуп бројева који се не могу написати у облику разломка називамо **скуп ирационалних бројева *I***. Ако је неки број рационалан, онда он не може бити у исто време ирационалан, па можемо донети закључак у следећем тврђењу.

тврђење

Скупови *Q* и *I* су дисјунктни, тј. $Q \cap I = \emptyset$.

Рационални и ирационални бројеви заједно чине **скуп реалних бројева *R***.

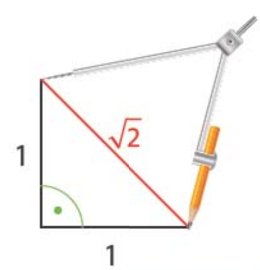
Скуп реалних бројева *R* је скуп свих рационалних и ирационалних бројева, или

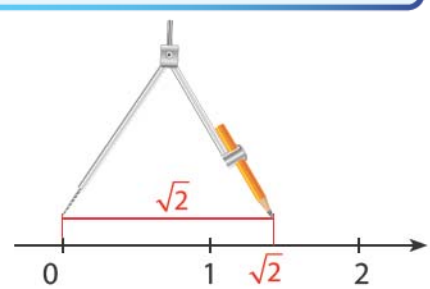
$$R = Q \cup I.$$

подсетник

Бројеве представљамо на бројевној правој. Када задамо јединичну дуж, прецизно можемо да одредимо место сваког рационалног броја на бројевној правој.

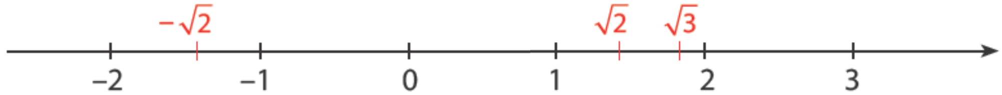
Сада када смо научили да конструишемо дуж дужине $\sqrt{2}$ можемо и броју $\sqrt{2}$ одредити место на бројевној правој.





Ако природан број n није потпун квадрат, онда је $\sqrt{n}$ ирационалан број.

И друге ирационалне корене, попут $\sqrt{3}$, $\sqrt{5}$, $\sqrt{6}$ ... , као и све реалне бројеве из скупа R представљамо на бројевној правој на сличан начин као и $\sqrt{2}$. Конструкције дужи оваквих дужина знатно ће олакшати Питагорина теорема, коју ћемо учити у следећем поглављу.



пример 2

Израчунај дужину странице квадрата површине **а)** 9; **б)** 5; **в)** $P>0$.

Решење: Ако је a дужина странице, површина квадрата је $P=a^2$.

а) Једначина $9=a^2$ има два решења: $a_1=3$ и $a_2=-3$, али како дужина странице мора бити позитиван број, једино прихватљиво решење је $a=a_1=\sqrt{9}=3$.

б) Слично решењу под а, добијамо $a=\sqrt{5}$. **в)** $a=\sqrt{P}$.

Задаци

20. За сваку од следећих једначина одреди да ли су решења рационални или ирационални бројеви:

а) $x^2=1$; **б)** $x^2=2$; **в)** $x^2=0$; **г)** $x^2+2=62$; **д)** $5+x^2=9$.

21. За сваку од следећих једначина одреди да ли су решења рационални или ирационални бројеви:

а) $\sqrt{x}=2$; **б)** $\sqrt{3x}=\sqrt{15}$; **в)** $2x=\sqrt{3}$; **г)** $x+1=\sqrt{3}$.

22. На бројевној правој конструиши дуж дужине:

а) 1; **б)** 0; **в)** $\frac{3}{5}$; **г)** $-\frac{1}{5}$;

д) $2\frac{3}{10}$; **ђ)** $-1\frac{4}{5}$; **е)** 0,4; **ж)** –1,3.

23. На бројевној правој конструиши дуж дужине:

а) $\sqrt{8}$; **б)** $-\sqrt{8}$; **в)** $\sqrt{32}$; **г)** $-3\sqrt{2}$.

24. Конструиши квадрат површине 2 cm^2. Колика је дужина странице тог квадрата?

25. Одреди које од следећих реченица су тачне.

а) Унија скупова рационалних и ирационалних бројева је скуп реалних бројева.

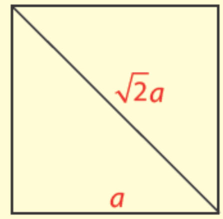
б) Скупови рационалних и ирационалних бројева имају заједничке елементе.

в) Постоји реалан број који није рационалан.

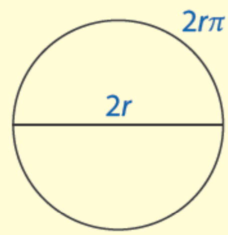
г) Постоји реалан број који није ирационалан.

занимљивост

Занимљиво је да је откриће ирационалних бројева у ствари резултат геометријских истраживања везаних за појам односа дужина правих и кривих линија, као што су странице и дијагонале квадрата, али и кружнице.



Питагорејци су, у начелу, веровали да се размере дужина поменутих линија могу представити као разломци (рационални бројеви), док су мало „несташнији” питагорејци, попут Хипаса или Зенона (познатог по парадоксима), показали да су неке од тих размера ипак ирационални бројеви.



Однос дијагонале и странице квадрата је баш $\sqrt{2}$, док нас однос дужине кружнице и њеног пречника доводи до још једног познатог ирационалног броја који означавамо π (грчко слово, чита се „пи”). О броју π ћемо такође учити у седмом разреду када будемо изучавали дужину кружнице.

занимљивост

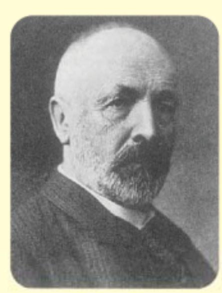
Кад год природни број није потпуни квадрат (кад се не може записати као квадрат природног броја), његов квадратни корен је ирационалан број. До тог открића дошао је Ал Хорезми, персијски математичар који је живео у 8. и 9. веку н. е. У свом делу „Ал Гебр” Ал Хорезми нам је оставио свој општи поступак за проналажење решења једначина, али и многа друга открића због којих се сматра оцем алгебре.

Већ смо поменули ирационални број π, који ћемо детаљније разматрати када будемо изучавали однос дужине кружнице и пречника круга. Још су стари Грци знали да број π постоји, али нису знали да је ирационалан. Тек у 18. веку је немачки математичар Ламберт доказао да је π ирационалан број.

Занимљиво је да је тек у 19. веку још један познати немачко-руски математичар, Кантор, доказао да ирационалних бројева има више од рационалних, иако и једних и других има бесконачно много. Кажемо да рационалних бројева има *пребројиво много* (исто колико и природних и целих бројева), док ирационалних има *непребројиво* много (исто колико и реалних бројева).

Ал Хорезми

Ламберт



Кантор

Децимални записи рационалних и ирационалних бројева 1.5.

подсетник

У шестом разреду смо научили да рационалне бројеве представљамо децималним записом. Када рационалан број има бесконачно много децимала, уочили смо да се оне периодично понављају.

$$1\frac{1}{4}=\frac{5}{4}=1,25$$

$$\frac{1}{3}=0,333333\ldots=0,\dot{3}$$

$$\frac{1}{7}=0,142857142857142\ldots=0,\dot{1}\dot{4}\dot{2}\dot{8}\dot{5}\dot{7}$$

Тачкице изнад цифара децимала означавају цифре које се периодично понављају.

Постоји неколико начина да нотирамо периодично понављање децимала:

$$0,1333333=0,1\dot{3}=0,1(3)=0,1\overline{3} \qquad \text{или} \qquad 3,1424242=3,1\dot{4}\dot{2}=3,1(42)=3,1\overline{42}.$$

У овом уџбенику користићемо запис са тачкицама, али знај да се могу користити и заграде око понављаних бројева, као и црта изнад њих.

тврђење

Реалан број је рационалан ако и само ако има коначан или периодичан децимални запис.

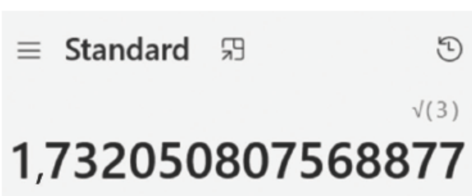
пример 1

Представи децималним записом: а) $\frac{2}{5}$; б) $-\frac{1}{6}$; в) $\frac{9}{8}$.

Решење:

а) $\frac{2}{5}=\frac{4}{10}=0,4$; б) $-\frac{1}{6}=-1:6=-0,166\ldots=-0,1\dot{6}$; в) $\frac{9}{8}=1\frac{1}{8}=1\frac{125}{1000}=1,125$.

Ирационални бројеви имају бесконачно много децимала које се **не понављају** периодично. Прикажимо на калкулатору (дигитрону) неке од децимала броја $\sqrt{3}$.



Ово запажање можемо претворити и у формално тврђење.

тврђење

Реалан број је ирационалан ако и само ако има бесконачан децимални запис у коме се цифре не понављају периодично.

пример 2

Који од следећих бројева су рационални, а који ирационални?

x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6
1,3	−4,567	1,444…	−1,232323…	0,202320232023…	0,12345678910111213…

Решење: Бројеви $x_1 = 1{,}3 = \dfrac{13}{10}$ и $x_2 = -4{,}567 = \dfrac{-4567}{1000}$ су рационални јер имају коначан децимални запис.

Број x_3 је рационалан јер се цифра 4 периодично понавља. Приметимо, $x_3 = \dfrac{13}{9}$.

Број $x_4 = -1{,}\dot{2}\dot{3}$ је рационалан јер се цифре 2 и 3 периодично понављају. Докажи: $x_4 = \dfrac{-122}{99}$. (Помоћ: помножи x_4 са 100, па одузми x_4 да добијеш $100x_4 - x_4 = -122$.)

Рационалан број $x_5 = 0{,}\dot{2}02\dot{3}$ претвори у разломак множењем са 10 000, дакле

$$10\,000x_5 - x_5 = 2023{,}\dot{2}02\dot{3} - 0{,}\dot{2}02\dot{3} = 2023, \text{ па је } x_5 = \frac{2023}{9999}.$$

Број x_6 је ирационалан јер има бесконачан непериодичан запис. Приметимо да се у његовом децималном запису иза запете појављује прво број један, затим два, па три, итд. Сваки пут се допише по један нови природни број, па запис

0,12345678910111213…

нема периодично понављање, те је овај број ирационалан.

Задаци

26. Који од наведених бројева су ирационални:

а) 1,333... ; б) $-\sqrt{4}$; в) $1+\sqrt{2}$; г) $1-\sqrt{2}$; д) $\dfrac{3}{2}$;

ђ) 0,123123123… ; е) $\sqrt{9}+\sqrt{16}$; ж) 1,202002000200002… .

27. Докажи да су наведени бројеви рационални, тј. представи их у облику количника два цела броја:

а) 1,111111... ; б) 0,454545... ; в) 1,234234... ; г) 1,234444... .

28. Следеће бројеве представи децималним записом:

а) $\dfrac{2}{3}$; б) $\dfrac{5}{7}$; в) $\dfrac{9}{4}$; г) $\dfrac{7}{6}$; д) $2\dfrac{3}{7}$; ђ) $-1\dfrac{5}{13}$; е) $-\dfrac{4}{15}$; ж) $-1\dfrac{2}{3}$.

29. За сваку од следећих реченица одреди да ли је тачна.

а) Број који у свом децималном запису има коначан број цифара различитих од 0 је рационалан.

б) Сваки број који у свом децималном запису има бесконачно много цифара је ирационалан.

в) Број који у свом децималном запису иза запете нема цифре различите од 0 је природан.

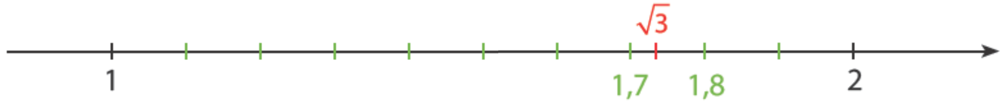
г) Сваки број у чијем се децималном запису иста цифра појављује иза запете бесконачно пута је ирационалан.

Приближна вредност 1.6.

За краће децимално записивање реалних бројева користимо **приближну вредност**, тј. реални број који има жељени број децимала, а најближи је броју којем тражимо приближну вредност. Приближну вредност другачије називамо и **приближан број**.

пример 1

Број $\sqrt{3}$ се налази између 1,7 и 1,8, али је ближи броју 1,7. Стога пишемо $\sqrt{3} \approx 1{,}7$.



Растојање између бројева на реалној правој рачунамо као апсолутну вредност њихове разлике. Код рачунања приближне вредности овај број постаје **апсолутна грешка приближног броја**. Приметимо да је $\left|\sqrt{3}-1{,}7\right| < \left|\sqrt{3}-1{,}8\right|$, па кажемо да је апсолутна грешка приближног броја 1,7 мања од апсолутне грешке приближног броја 1,8. Другим речима, приближан број 1,7 је ближи броју $\sqrt{3}$ него приближан број 1,8.

Нека је *r* дат реални број и *a* његова приближна вредност, тада се апсолутна грешка приближног броја *a* рачуна помоћу формуле

$$\Delta = |r - a|$$

и најчешће се означава великим грчким словом делта Δ.

Уместо проналажења приближне вредности са једном децималом, краће кажемо заокругљивање броја на једну децималу. Слично важи и за заокругљивање на две или више децимала.

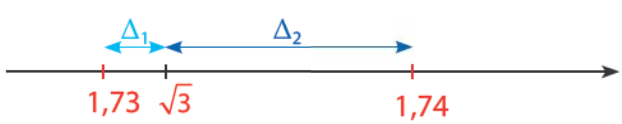
пример 2

Заокругли број $\sqrt{3}$ на две децимале.

Решење: Увери се да је $2{,}9929 = 1{,}73^2 < 3 < 1{,}74^2 = 3{,}0276$. Следи да је $1{,}73 < \sqrt{3} < 1{,}74$. Дакле, број $\sqrt{3}$ можемо представити приближним бројевима 1,73 или 1,74. Израчунајмо дигитроном апсолутне грешке оба приближна броја.

$$\Delta_1 = \left|\sqrt{3}-1{,}73\right| = \sqrt{3}-1{,}73 \approx 0{,}00205\ldots \quad \text{и} \quad \Delta_2 = \left|\sqrt{3}-1{,}74\right| = 1{,}74-\sqrt{3} \approx 0{,}0079\ldots$$

Како је $\Delta_1 < \Delta_2$, изабраћемо број 1,73 за приближну вредност броја $\sqrt{3}$, односно $\sqrt{3} \approx 1{,}73$.



пример 3

Заокругли број $\sqrt{2}$ на једну децималу без коришћења дигитрона (калкулатора).

Решење: Како је $1^2 < 2 < 2^2$, знамо да је $1 < \sqrt{2} < 2$. Израчунајмо $1,5^2 = 1,5 \cdot 1,5 = 2,25 > 2$, одакле можемо закључити да је $\sqrt{2} < 1,5$. Даље, како је $1,4^2 = 1,4 \cdot 1,4 = 1,96 < 2$, имамо да је

$$1,4 < \sqrt{2} < 1,5.$$

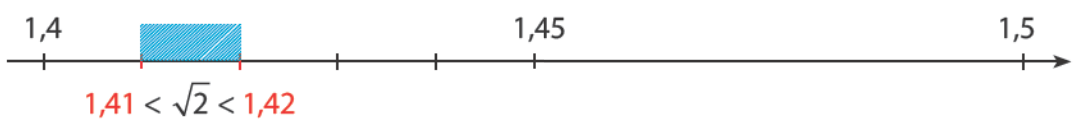
Затим, израчунајмо квадрате свих потенцијалних приближних бројева заокругљених на две децимале

$$1,40^2 = 1,40 \cdot 1,40 = 1,9600$$

$$1,41^2 = 1,41 \cdot 1,41 = 1,9881$$

$$1,42^2 = 1,42 \cdot 1,42 = 2,0164 \text{ итд.,}$$

али не треба даље јер одавде добијамо $1,41^2 < 2 < 1,42^2$, што значи да је $1,41 < \sqrt{2} < 1,42$, па закључујемо да је број $\sqrt{2}$ ближи броју 1,4 него броју 1,5 јер је јасно да је $\sqrt{2} < 1,45$, тј. $\sqrt{2} \approx 1,4$.



И бројеве са коначно много децимала некад треба заокруглити на мањи број децимала.

пример 4

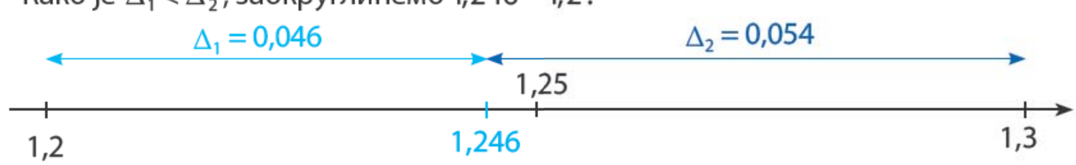
Заокругли следеће бројеве на једну децималу: **а)** 1,246; **б)** $\frac{1}{3}$.

Решење:

а) Како је $1,2 < 1,246 < 1,3$, поредимо апсолутне грешке приближних бројева

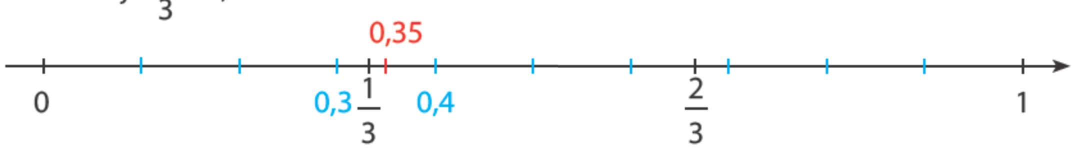
$$\Delta_1 = |1,246 - 1,2| = 0,046 \quad \text{и} \quad \Delta_2 = |1,246 - 1,3| = 0,054.$$

Како је $\Delta_1 < \Delta_2$, заокруглићемо $1,246 \approx 1,2$.



б) Број $\frac{1}{3} = 0,\dot{3} = 0,333\ldots$ је ближи броју 0,3 него броју 0,4 јер је $\frac{1}{3} = 0,\dot{3} < 0,35$.

Стога је $\frac{1}{3} \approx 0,3$.



Сажмимо ове примере у следеће правило. Ако имамо два кандидата a_1 и a_2 за заокругљивање реалног броја r, бирамо онај број a_1 или a_2 који даје мању апсолутну грешку приближног броја (тј. мању апсолутну грешку заокругљивања)

$$\Delta_1 = |r - a_1| \quad \text{или} \quad \Delta_2 = |r - a_2| .$$

А да ли се може десити да имамо $\Delta_1 = \Delta_2$? Како тада заокругљујемо? На срећу, случај $\Delta_1 = \Delta_2$ се може десити само ако је r рационалан број, и то само ако је цифра 5 последња децимала броја r. Тада заокругљујемо према правилима одбацивања цифара која смо научили још у петом разреду, а овде их преносимо директно из уџбеника за пети разред.

подсетник

Правила заокругљивања броја *r* бројем *a*:

1)	5,7**3** ≈ 5,7	Ако је прва цифра коју одбацујемо мања од 5, онда цифре испред ње остају непромењене.
2)	48,34**78** ≈ 48,35	Ако је прва цифра коју одбацујемо већа од 5, онда се цифра испред одбачене повећава за 1, а остале остају непромењене.
3)	45,589**78** ≈ 45,590	Ако се цифра 9 увећава за 1, онда се уместо ње пише 0, а цифра испред се увећава за 1.
4)	73,1**587** ≈ 73,2	Ако је прва цифра коју одбацујемо једнака 5 и иза ње има још цифара различитих од нуле, онда се цифра испред одбачене увећава за 1, а остале цифре остају непромењене.
5)	74,37**5** ≈ 74,38	Ако је прва цифра коју одбацујемо једнака 5 и иза ње нема других цифара различитих од нуле, а цифра испред одбачене је непарна, онда се та непарна цифра увећава за 1, а остале цифре остају непромењене.
6)	74,38**5** ≈ 74,38	Ако је прва цифра коју одбацујемо једнака 5 и иза ње нема других цифара различитих од нуле, а цифра испред одбачене је парна, тада све цифре испред одбачене остају непромењене.

пример 5

Заокругли следеће бројеве на једну децималу: **а)** 2,37; **б)** $\frac{1}{6}$.

Решење:

а) Имамо $\Delta_1 = |2{,}37 - 2{,}3| = 0{,}07$ и $\Delta_2 = |2{,}37 - 2{,}4| = 0{,}03$.

Како је $\Delta_1 > \Delta_2$, то је $2{,}37 \approx 2{,}4$. А могли смо применити и правило **2** из петог разреда.

б) Број $\frac{1}{6} = 0{,}1\dot{6} = 0{,}1666\ldots$ је ближи 0,2 него 0,1 јер је већи од 0,15. Стога је $\frac{1}{6} \approx 0{,}2$.

А могли смо применити и правило **2** из подсетника.

пример 6

У претходном примеру под **б** израчунај апсолутну грешку приближног броја.

Решење: $\Delta = |0{,}1\dot{6} - 0{,}2| = 0{,}2 - 0{,}1\dot{6} = 0{,}2000\ldots - 0{,}1666\ldots = 0{,}0333\ldots \approx 0{,}03.$
Овде смо апсолутну грешку приближног броја заокруглили на две децимале и добили смо приближну вредност апсолутне грешке 0,03.

Апсолутну грешку можемо рачунати и у облику разломка као

$$\Delta = \left|\frac{1}{6} - 0{,}2\right| = \left|\frac{1}{6} - \frac{2}{10}\right| = \left|\frac{1}{6} - \frac{1}{5}\right| = \left|\frac{5-6}{30}\right| = \left|\frac{-1}{30}\right| = \frac{1}{30}.$$

пример 7

Заокругли: **а)** број 0,98 на једну децималу; **б)** број 1,2998 на три децимале.

Решење:

а) Како се број $r = 0{,}98$ налази између кандидата за заокругљивање $a_1 = 0{,}9$ и $a_2 = 1{,}0$, јасно је да је број $r = 0{,}98$ ближи броју $a_2 = 1{,}0$, те ћемо заокруглити $r \approx 1{,}0$. А можемо користити и правила заокругљивања из петог разреда тако што приметимо да, пошто је $8 > 5$, цифру 9 треба да повећамо за 1. Али како је 9 + 1 = 10, онда добијамо нулу на месту деветке, а претходну цифру увећавамо за 1.

б) Применимо правило **3** из петог разреда. Цифра коју одбацујемо је 8, а испред ње је 9, којој додајемо 1 и постаје 10.

1	,	2	9	9	8
				+1	

Задржавамо нулу, а јединицу додајемо на цифру испред, која је опет 9 и онда понављамо поступак.

1	,	2	9	0	
			+1		

Опет задржимо нулу, а јединицу додајемо на двојку, која постаје тројка.

1	,	2	0	0	
		+1			
1	,	3	0	0	

Дакле, $1{,}2998 \approx 1{,}300 = 1{,}3$.

А можемо доћи до истог резултата рачунајући апсолутну грешку. Пошто је $r = 1{,}2998$, кандидати за заокругљивање на три децимале су $a_1 = 1{,}299$ и $a_2 = 1{,}300$. Сада израчунајмо апсолутне грешке

$$\Delta_1 = |1{,}2998 - 1{,}299| = 0{,}0008 \quad \text{и} \quad \Delta_2 = |1{,}2998 - 1{,}300| = 0{,}0002.$$

Како је $\Delta_2 < \Delta_1$, то је број $a_2 = 1{,}300$ бољи кандидат за заокругљивање на три децимале, те пишемо $1{,}2998 \approx 1{,}300 = 1{,}3$.

Урадимо сада примере у којима је прва децимала коју одбацујемо баш цифра 5.

пример 8

Заокругли на једну децималу: **а)** 123,456; **б)** 2,950001; **в)** 8,35; **г)** 8,45.

Решење:

а) Кандидати за заокругљивање су $a_1 = 123{,}4$ и $a_2 = 123{,}5$. Увери се самостално да је решење $123{,}456 \approx 123{,}5$.

б) Кандидати за заокругљивање су $a_1 = 2{,}9$ и $a_2 = 3{,}0$. Увери се самостално да је решење $2{,}950001 \approx 3{,}0$.

в) Кандидати за заокругљивање су $a_1 = 8{,}3$ и $a_2 = 8{,}4$. Овде су апсолутне грешке међусобно једнаке, $\Delta_1 = |8{,}35 - 8{,}3| = 0{,}05$ и $\Delta_2 = |8{,}35 - 8{,}4| = 0{,}05$, те морамо применити правила заокругљивања из петог разреда. Примени правило **5** из Подсетника. Дакле, добијамо $8{,}35 \approx 8{,}4$.

г) И у овом случају морамо применити правила заокругљивања из петог разреда, али сада примењујемо правило **6** из Подсетника. Дакле, добијамо $8{,}45 \approx 8{,}4$.

Задаци

30. Заокругли дати број на три децимале и израчунај апсолутну грешку на четири децимале:

а) 1,3579; **б)** 0,2468; **в)** 0,456456...; **г)** 0,555555...; **д)** $\frac{1}{3}$; **ђ)** $\frac{1}{6}$; **е)** $\frac{2}{3}$; **ж)** $1\frac{2}{7}$.

31. Без коришћења калкулатора израчунај приближну вредност на једну децималу:

а) $\sqrt{3}$; **б)** $\sqrt{5}$; **в)** $\sqrt{6}$; **г)** $\sqrt{7}$.

32. Помоћу калкулатора заокругли дати број на две децимале и апсолутну грешку заокругљивања на три децимале:

а) $2\sqrt{5}$; **б)** $3\sqrt{6}$; **в)** $\sqrt{0{,}45}$; **г)** $\sqrt{1{,}33}$.

33. Помоћу калкулатора израчунај приближну вредност израза на две децимале:

а) $\sqrt{13} + \sqrt{11}$; **б)** $\sqrt{15} - \sqrt{29}$; **в)** $\sqrt{110} - \sqrt{56}$; **г)** $-\sqrt{22} - \sqrt{33}$; **д)** $2\sqrt{7} + 3\sqrt{3}$;

ђ) $2\sqrt{10} - 3\sqrt{8}$; **е)** $\sqrt{0{,}63} + \sqrt{1{,}23}$; **ж)** $\sqrt{0{,}55} - \sqrt{0{,}77}$.

34. Решење једначине заокругли на две децимале:

а) $\sqrt{x + \frac{1}{3}} = \frac{2}{3}$; **б)** $x + \frac{1}{3} = \frac{1}{2}$; **в)** $2\sqrt{x} + \frac{1}{2} = \frac{11}{2}$; **г)** $2x + \frac{3}{5} = \frac{7}{6}$.

35. Провери тачност записа:

а) $3 < \sqrt{15} < 4$; **б)** $11 < \sqrt{111} < 12$; **в)** $2{,}6 < \sqrt{7} < 2{,}7$; **г)** $3{,}1 < \sqrt{10} < 3{,}2$;

д) $4{,}2 < \sqrt{17} < 4{,}3$; **ђ)** $1{,}40 < \sqrt{2} < 1{,}41$; **е)** $1{,}72 < \sqrt{3} < 1{,}73$; **ж)** $2{,}23 < \sqrt{5} < 2{,}24$.

1.7. Основне рачунске операције и квадратни корен

подсетник

Основне рачунске операције су сабирање и множење, док одузимање можемо представити као сабирање са супротним бројем, а дељење као множење реципрочним бројем, нпр.

$$\frac{3}{4}-\frac{1}{6}=\frac{3}{4}+\left(-\frac{1}{6}\right)=\frac{3\cdot 3+2\cdot(-1)}{12}=\frac{9-2}{12}=\frac{7}{12} \qquad \text{или} \qquad \frac{7}{4}:2=\frac{7}{4}\cdot\frac{1}{2}=\frac{7}{8}.$$

Рачунске операције смо примењивали на рационалне бројеве, а потпуно иста правила важе и за све реалне бројеве. За сабирање и множење важе комутативност и асоцијативност, као и дистрибутивност множења у односу на сабирање, односно за све реалне бројеве *a, b, c* важи:

$a+b=b+a$	**Комутативност:** сабирци могу да промене места.
$ab=ba$	**Комутативност:** чиниоци могу да промене места.
$a+(b+c)=(a+b)+c$	**Асоцијативност:** сабирци се могу произвољно груписати.
$a(bc)=(ab)c$	**Асоцијативност:** чиниоци се могу произвољно груписати.
$a(b+c)=ab+ac$	**Дистрибутивност множења** у односу на сабирање.

Број 0 је неутрални елемент за сабирање, а број 1 је неутрални елемент за множење. Инверзни елемент за сабирање сваком реалном броју је његов супротни број, а инверзни елемент за множење сваком реалном броју (осим броја 0) је његов реципрочни број. Број 0 нема себи реципрочан број.

$a+0=a$ $\qquad a\cdot 1=a$ $\qquad a+(-a)=0$ $\qquad a\cdot\frac{1}{a}=1,\quad a\neq 0$

Напомена: Код дељења увек водимо рачуна да делилац не може бити једнак нули.

пример 1

Израчунај: **а)** $\sqrt{5}+\sqrt{5}$; **б)** $\sqrt{5}+\left(-\sqrt{5}\right)$; **в)** $\sqrt{5}\left(1+\sqrt{5}\right)$.

Решење:

а) $\sqrt{5}+\sqrt{5}=2\sqrt{5}$; **б)** $\sqrt{5}+\left(-\sqrt{5}\right)=0$.

Приметимо овде да **збир два ирационална броја не мора бити ирационалан број** (док **збир два рационална броја мора бити рационалан број**).

в) $\sqrt{5}\left(1+\sqrt{5}\right)=\sqrt{5}\cdot 1+\sqrt{5}\cdot\sqrt{5}=\sqrt{5}+5.$

Приметимо овде да збир ирационалног броја $\sqrt{5}$ и рационалног броја 5 не можемо краће записати а да имамо тачну вредност. Једино можемо узети приближну вредност броја $\sqrt{5}\approx 2{,}236$ и добити приближну вредност $\sqrt{5}+5\approx 7{,}236$.

пример 2

Израчунај: **а)** $\sqrt{48}$; **б)** $\sqrt{50}$; **в)** $3\cdot\sqrt{12}$; **г)** $\sqrt{63}:\sqrt{7}$.

Решење: **а)** $\sqrt{48}=\sqrt{16\cdot 3}=\sqrt{16}\cdot\sqrt{3}=4\sqrt{3}$;

б) $\sqrt{50}=\sqrt{25\cdot 2}=\sqrt{25}\cdot\sqrt{2}=5\sqrt{2}$;

в) $3\cdot\sqrt{12}=3\cdot\sqrt{4\cdot 3}=3\cdot\sqrt{4}\cdot\sqrt{3}=3\cdot 2\cdot\sqrt{3}=6\sqrt{3}$;

г) $\sqrt{63}:\sqrt{7}=\dfrac{\sqrt{63}}{\sqrt{7}}=\dfrac{\sqrt{7\cdot 9}}{\sqrt{7}}=\dfrac{\cancel{\sqrt{7}}\cdot\sqrt{9}}{\cancel{\sqrt{7}}}=\sqrt{9}=3$ или

$\sqrt{63}:\sqrt{7}=\dfrac{\sqrt{63}}{\sqrt{7}}=\sqrt{\dfrac{63}{7}}=\sqrt{9}=3.$

тврђење

Збир, разлика, производ и количник (уз услов да делилац не сме бити нула)
– два рационална броја је рационалан број;
– једног рационалног броја различитог од нуле и једног ирационалног броја је ирационалан број (изузетак је множење нулом јер је $0\cdot a=0$);
– два ирационална броја може бити ирационалан или рационалан број.

Већ смо раније приметили да је $\sqrt{\dfrac{25}{4}}=\dfrac{\sqrt{25}}{\sqrt{4}}$. Уопштимо то запажање.

тврђење

$\sqrt{a\cdot b}=\sqrt{a}\cdot\sqrt{b}$ (уз услове $a\geq 0$ и $b\geq 0$) и $\sqrt{\dfrac{a}{b}}=\dfrac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}}$ (уз услове $a\geq 0$ и $b>0$).

За сабирање и одузимање слично **не важи**, тј. $\sqrt{a+b}\neq\sqrt{a}+\sqrt{b}$ и $\sqrt{a-b}\neq\sqrt{a}-\sqrt{b}$.

пример 3

Докажи: $\sqrt{2+3}=\sqrt{5}$, али $\sqrt{2}+\sqrt{3}\neq\sqrt{5}$.

Решење: Уверимо се помоћу дигитрона да је $\sqrt{2+3}=\sqrt{5}\approx 2{,}2$ а $\sqrt{2}+\sqrt{3}\approx 3{,}1$.

Доказ: Докажимо да су бројеви $\left(\sqrt{2}+\sqrt{3}\right)$ и $\sqrt{5}$ различити тако што ћемо доказати да је број $\left(\sqrt{2}+\sqrt{3}\right)^2$ већи од броја 5.

$\left(\sqrt{2}+\sqrt{3}\right)^2=\left(\sqrt{2}+\sqrt{3}\right)\left(\sqrt{2}+\sqrt{3}\right)=\sqrt{2}\left(\sqrt{2}+\sqrt{3}\right)+\sqrt{3}\left(\sqrt{2}+\sqrt{3}\right)$ (дистрибутивност)

$=\sqrt{2}\sqrt{2}+\sqrt{2}\sqrt{3}+\sqrt{3}\sqrt{2}+\sqrt{3}\sqrt{3}$ (дистрибутивност)

$=\sqrt{2}^2+\sqrt{2}\sqrt{3}+\sqrt{3}\sqrt{2}+\sqrt{3}^2$ Уочи $\sqrt{2}^2=2$ и $\sqrt{3}^2=3$ и $\sqrt{2}\sqrt{3}=\sqrt{3}\sqrt{2}$.

$=2+2\sqrt{2}\sqrt{3}+3$ Примети да је $2\sqrt{2}\sqrt{3}$ позитиван број,

$=5+2\sqrt{2}\sqrt{3}>5=\sqrt{5}^2$ па збир $5+2\sqrt{2}\sqrt{3}$ мора бити већи од 5.

Из исказа $\left(\sqrt{2}+\sqrt{3}\right)^2>\sqrt{5}^2$ следи $\sqrt{2}+\sqrt{3}\neq\sqrt{5}$.

пример 4

Докажи да разлика два корена $\sqrt{2}-\sqrt{3}$ није једнака корену разлике $\sqrt{2-3}$.

Решење: Број $\left(\sqrt{2}-\sqrt{3}\right)$ је негативан, провери $\sqrt{2}-\sqrt{3}\approx 1{,}4-1{,}7=-0{,}3$; док $\sqrt{2-3}$ и не постоји јер је $2-3=-1$, а не постоји корен негативног броја. Дакле, број $\sqrt{2}-\sqrt{3}$ не може бити једнак непостојећем броју $\sqrt{2-3}$.

Напомена: Нисмо могли доказивати неједнакост квадрата као у претходном примеру јер је $\sqrt{2}-\sqrt{3}$ негативан број, па имамо $\sqrt{\left(\sqrt{2}-\sqrt{3}\right)^2}\neq\sqrt{2}-\sqrt{3}$.

Приликом сабирања и одузимања можемо груписати само корене истог броја, нпр. $\sqrt{2}$ као овде

$$\sqrt{2}+\sqrt{8}=\sqrt{2}+\sqrt{4\cdot 2}=\sqrt{2}+2\sqrt{2}=3\sqrt{2},$$

док нпр. израз $\sqrt{2}+\sqrt{3}$ остаје такав, али евентуално можемо израчунати приближну вредност израза $\sqrt{2}+\sqrt{3}$.

Када множимо, примењујемо правило $\sqrt{a\cdot b}=\sqrt{a}\cdot\sqrt{b}$ (уз услове $a\geq 0$ и $b\geq 0$) а природан број можемо записати и као корен његовог квадрата, нпр.

$$\sqrt{7}\cdot\sqrt{5}=\sqrt{7\cdot 5}=\sqrt{35}\qquad\text{и}\qquad 4\cdot\sqrt{3}=\sqrt{16}\cdot\sqrt{3}=\sqrt{16\cdot 3}=\sqrt{48}.$$

Приликом множења целог броја и ирационалног корена усталила су се и два жаргонска израза за следеће поступке:

- **извлачење** природног броја пред корен, нпр. $\sqrt{48}=\sqrt{16\cdot 3}=\sqrt{16}\cdot\sqrt{3}=4\sqrt{3}$;
- **убацивање** природног броја под корен, нпр. $-2\sqrt{7}=-\sqrt{4}\cdot\sqrt{7}=-\sqrt{4\cdot 7}=-\sqrt{28}$.

При дељењу ирационалним кореном користимо поступак **рационалисања** имениоца. То је поступак у ком се трудимо да у имениоцу добијемо рационалан, тј. природан број. Илуструјмо поступак рационалисања имениоца следећим примером.

пример 5

Рационалиши имениоце у следећим разломцима: **а)** $\dfrac{1}{\sqrt{7}}$; **б)** $\dfrac{-\sqrt{5}}{\sqrt{11}}$.

Решење: а) $\dfrac{1}{\sqrt{7}}=\dfrac{1}{\sqrt{7}}\cdot\dfrac{\sqrt{7}}{\sqrt{7}}=\dfrac{\sqrt{7}}{7}$; **б)** $\dfrac{-\sqrt{5}}{\sqrt{11}}=\dfrac{-\sqrt{5}}{\sqrt{11}}\cdot\dfrac{\sqrt{11}}{\sqrt{11}}=-\dfrac{\sqrt{5\cdot 11}}{11}=-\dfrac{\sqrt{55}}{11}$.

Задаци

36. Реши једначину:

а) $\sqrt{3x}=6$; **б)** $\sqrt{\dfrac{2}{5}x}=4$; **в)** $\sqrt{0{,}25x+1}=8$; **г)** $\sqrt{\dfrac{x-3}{2}}=1$;

д) $3\sqrt{x}=6$; **ђ)** $\dfrac{2}{5}\sqrt{x}=4$; **е)** $0{,}25\sqrt{x+1}=8$; **ж)** $\dfrac{\sqrt{x-3}}{2}=1$.

37. Под условима $a \geq 0$ и $b \geq 0$, користећи једнакост $\sqrt{a \cdot b} = \sqrt{a} \cdot \sqrt{b}$ израчунај:

а) $\sqrt{4 \cdot 16}$; б) $\sqrt{9 \cdot 25}$; в) $\sqrt{81 \cdot 64}$; г) $\sqrt{121 \cdot 49}$;

д) $\sqrt{1{,}44 \cdot 0{,}36}$; ђ) $\sqrt{2\frac{1}{4} \cdot 3\frac{6}{25}}$; е) $\sqrt{2{,}25 \cdot 3\frac{1}{16}}$; ж) $\sqrt{4 \cdot 1{,}21 \cdot 81}$.

38. Под условима $a \geq 0$ и $b > 0$, користећи једнакост $\sqrt{\frac{a}{b}} = \frac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}}$, израчунај:

а) $\sqrt{\frac{16}{9}}$; б) $\sqrt{\frac{4}{25}}$; в) $\sqrt{2 - \frac{1}{25}}$; г) $\sqrt{2\frac{1}{144}}$;

д) $\sqrt{\frac{1{,}69}{1{,}21}}$; ђ) $\sqrt{\frac{0{,}1}{14{,}4}}$; е) $\sqrt{\frac{0{,}9}{1{,}6}}$; ж) $\sqrt{\frac{0{,}64}{0{,}81}}$.

39. Под условима $a \geq 0$ и $b \geq 0$, користећи једнакост $\sqrt{a \cdot b} = \sqrt{a} \cdot \sqrt{b}$ израчунај:

а) $\sqrt{20} \cdot \sqrt{5}$; б) $-\sqrt{2} \cdot \sqrt{32}$; в) $\sqrt{6} \cdot \sqrt{24}$; г) $\sqrt{7} \cdot \left(-\sqrt{28}\right)$;

д) $\sqrt{\frac{32}{3}} \cdot \sqrt{\frac{27}{2}}$; ђ) $\sqrt{0{,}1} \cdot \sqrt{4{,}9}$; е) $\sqrt{4\frac{4}{9}} \cdot \sqrt{2\frac{3}{6}}$; ж) $\sqrt{\frac{7}{15}} \cdot \sqrt{0{,}4} \cdot \sqrt{4\frac{2}{3}}$.

40. Под условима $a \geq 0$ и $b > 0$, користећи једнакост $\frac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}} = \sqrt{\frac{a}{b}}$, израчунај:

а) $\frac{\sqrt{27}}{\sqrt{3}}$; б) $\frac{-\sqrt{48}}{-\sqrt{12}}$; в) $\frac{\sqrt{32}}{\sqrt{\frac{1}{2}}}$; г) $\frac{\sqrt{3\frac{1}{3}}}{\sqrt{0{,}3}}$;

д) $\frac{-\sqrt{\frac{252}{5}}}{\sqrt{\frac{7}{20}}}$; ђ) $\frac{\sqrt{\frac{2}{21}}}{\sqrt{\frac{6}{7}}}$; е) $\frac{\sqrt{0{,}8}}{-\sqrt{0{,}2}}$; ж) $\frac{\sqrt{1{,}47}}{\sqrt{\frac{3}{100}}}$.

41. Упрости изразе:

а) $2\sqrt{2} + 3\sqrt{2} - \sqrt{2}$; б) $\sqrt{5} - 4\sqrt{5} + 2\sqrt{5}$; в) $3\sqrt{7} + 3\sqrt{7} - 3\sqrt{7}$; г) $11\sqrt{11} - \sqrt{11} + 111\sqrt{11}$.

42. Растави поткорену величину на просте чиниоце па израчунај корене:

а) $\sqrt{784}$; б) $\sqrt{1024}$; в) $\sqrt{11\,025}$; г) $\sqrt{14\,400}$.

43. Да ли је запис тачан:

а) $\sqrt{2} + \sqrt{3} = \sqrt{3} + \sqrt{2}$; б) $\sqrt{2} - \sqrt{3} = \sqrt{3} - \sqrt{2}$; в) $\sqrt{2} \cdot \sqrt{3} = \sqrt{3} \cdot \sqrt{2}$; г) $\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{2}}$?

44. Упрости изразе:

а) $\sqrt{2} \cdot \left(\sqrt{2} + \sqrt{8}\right)$; б) $\sqrt{3} \cdot \left(\sqrt{12} - \sqrt{27}\right)$;

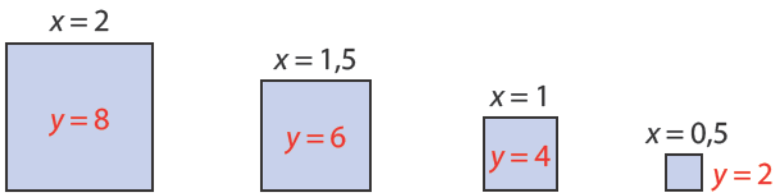
в) $\left(-\sqrt{125} + \sqrt{20}\right) \cdot \sqrt{5}$; г) $\left(-2\sqrt{28} + 2\sqrt{63}\right) \cdot \left(-\sqrt{7}\right)$.

45. Рационалиши имениоце следећих разломака:

а) $\frac{2}{\sqrt{2}}$; б) $\frac{-3}{\sqrt{5}}$; в) $\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}}$; г) $\frac{\sqrt{7}}{-\sqrt{13}}$; д) $\frac{12}{\sqrt{3}}$; ђ) $-\frac{15}{\sqrt{5}}$; е) $\frac{33}{\sqrt{11}}$; ж) $\frac{7\sqrt{21}}{\sqrt{7}}$.

1.8. Функција директне пропорционалности

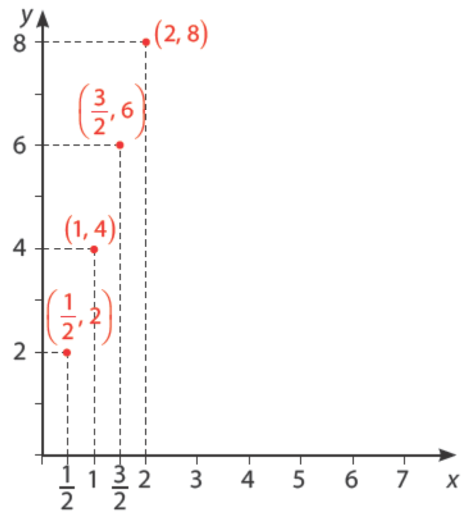
Уочимо како се обим квадрата y мења у зависности од дужине странице x.

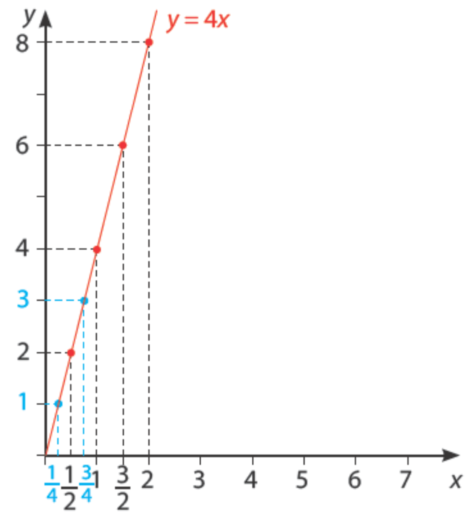


Представимо дужине страница и обиме ових квадрата табелом.

Страница x	0,5	1	1,5	2
Обим y	2	4	6	8

Обим је четири пута дужи од странице, што пишемо $y = 4x$. Прикажимо графички ове вредности у координатном систему. На хоризонталној, x-оси представићемо дужину странице x, а на вертикалној, y-оси обим квадрата y.

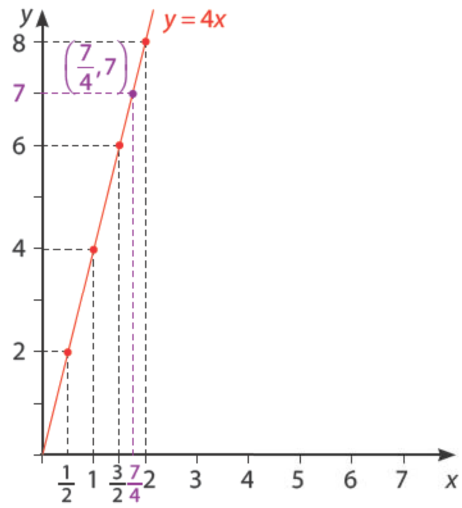




На левој слици је тачкасти дијаграм у који смо унели све тачке из табеле, дакле тачке $\left(\frac{1}{2}, 2\right)$, $(1, 4)$, $\left(\frac{3}{2}, 6\right)$ и $(2, 8)$. На десној слици смо тачке спојили у графикон и приметили да се све тачке налазе на једној правој која пролази кроз координатни почетак. Пошто знамо да је $y = 4x$, на графикону смо ту праву обележили изразом $y = 4x$, а ту праву ћемо краће звати „права $y = 4x$".

Додајмо на десној слици још неке тачке такве да је вредност y-координате четири пута већа од вредности x-координате, нпр. $\left(\frac{1}{4}, 1\right)$ и $\left(\frac{3}{4}, 3\right)$, и приметимо да права $y = 4x$ пролази и кроз ове нове додатне тачке. Дакле, права $y = 4x$ пролази кроз све тачке чија је вредност y-координате четири пута већа од вредности x-координате.

Са праве $y = 4x$ можемо да читамо и друге вредности. Нпр. ако нас занима колика страница одговара обиму 7, уочићемо број 7 на y-оси. Из тачке 7 на y-оси конструисаћемо праву паралелну x-оси до пресека са правом $y = 4x$, те из пресечне тачке спустити нормалу на x-осу. У пресеку, односно подножју нормале, добићемо тражену дужину $x = 1{,}75 = \frac{7}{4}$. Пресечна тачка $\left(\frac{7}{4}, 7\right)$ такође се налази на правој $y = 4x$.



Помоћу праве $y = 4x$, за сваку вредност независне величине x (која представља дужину странице квадрата) можемо једнозначно одредити вредност зависне величине y (која представља обим квадрата).

Праву $y = k \cdot x$ зовемо и **функција директне пропорционалности**, а реални број $k \neq 0$ називамо **коефицијент пропорционалности**.

Приметимо: Ако нам је позната вредност коефицијента пропорционалности k, тада за било коју вредност независне величине x можемо израчунати вредност зависне величине y. Другим речима, функција директне пропорционалности једнозначно је одређена познатим коефицијентом пропорционалности k.

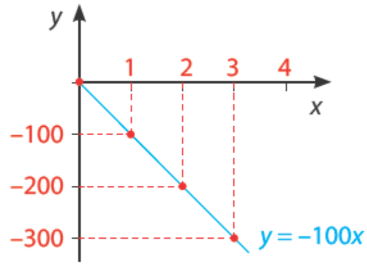
Када би коефицијент директне пропорционалности имао вредност $k = 0$, добили бисмо функцију $y = 0$, која не би имала много смисла јер бисмо за сваку вредност независне величине x добили нулу као вредност зависне величине y. Стога уводимо ограничење $k \neq 0$.

Ограничење $k \neq 0$ значи да коефицијент k може бити и негативан, као у следећем примеру.

пример 1

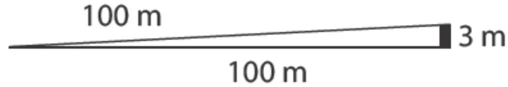
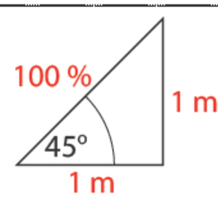
Мама има текући рачун у банци, на коме има 0 динара. Али, мама има платну картицу текућег рачуна и одобрење од банке да се задужује платном картицом када купује намирнице. Том картицом она купује само чоколаде свом сину. Сваки пут кад мама купи сину чоколаду она плати картицом рачун од 100 динара и тако направи дуг од 100 динара на свом текућем рачуну. Прикажати зависност стања на мамином рачуну од броја купљених чоколада.

Решење: Ако мама не купи ниједну чоколаду, стање на рачуну ће бити 0 дин. Ако купи једну чоколаду, стање је –100 дин. итд. Дакле, ако мама купи x чоколада, стање на њеном рачуну ће бити $y = -100x$ динара.



Коефицијент пропорционалности се још зове и **нагиб** јер представља нагиб праве $y = k \cdot x$ у односу на хоризонталну x-осу.

пример 2

Шта означава саобраћајни знак на ком пише 3%? И како би изгледао пут нагиба 100%?	
Нагиб 3% = 0,03 је нагиб пута у односу на хоризонталу. Ознака 3% значи да, кад идемо тим путем и хоризонтално се одмакнемо 100 m, попели смо се 3 m.	$k = \dfrac{3\text{ m}}{100\text{ m}} = 3\%$ 
Нагиб од 100% имао би пут који би са хоризонталом градио угао од 45°.	

пример 3

За сваки од наведених односа између независне величине x и зависне величине y одреди да ли је реч о функцији директне пропорционалности и, ако јесте, одреди нагиб k.

а) $y = x$ **б)** $y = -x$ **в)** $y = 1 + x$

Решење:

а) $y = x$ је функција директне пропорционалности. Нагиб је $k = 1$.

б) $y = -x$ је функција директне пропорционалности. Нагиб је $k = -1$.

в) $y = 1 + x$ није облика $y = k \cdot x$, па ово није функција директне пропорционалности.

46. Допуни табелу ако је $y = 2x$.

x	1	2	3		$\frac{1}{4}$	$2\frac{2}{3}$		4,5
y	2			10			22,2	

47. Величине x и y су директно пропорционалне. Одреди коефицијент пропорционалности k тако да је $y = kx$.

а)

x	3	1	9
y	9	3	27

б)

x	-2	1	$-0,5$
y	-4	2	-1

в)

x	5	2	1
y	0,5	0,2	0,1

г)

x	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{9}$
y	1	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{3}$

48. Ако су x и y директно пропорционалне величине, допуни следеће табеле.

а)

x	8		2	0,4	
y		1,75	0,5		0,25

б)

x	2,1		4	18	
y		1	$\frac{2}{3}$		0,5

49. Ако је $y = 2x$, израчунај y за:

а) $x = 1$; **б)** $x = 0,5$; **в)** $x = \frac{2}{3}$; **г)** $x = 4,25$.

50. Ако је $y = \frac{2}{3}x$, израчунај y за:

а) $x = 1$; **б)** $x = \frac{3}{2}$; **в)** $x = 4,25$; **г)** $x = \frac{21}{8}$.

51. Елена је направила 10 литара сока од зове и притом искористила 40 цветова зове. Марија је добила рецепт од Елене, али жели да направи 25 литара сока. Колико цветова зове је Марији потребно?

52. Напиши функцију директне пропорционалности количине сока y (у литрама) у зависности од броја цветова x за рецепт из претходног задатка.

53. Нацртај графикон функције директне пропорционалности $y = 2x$ и утврди да ли дате тачке припадају графикону:

а) $A(1, 2)$; **б)** $B(5, 12)$; **в)** $C(6, 3)$; **г)** $D\left(\frac{1}{4}, \frac{1}{2}\right)$.

1.9. Продужена пропорција

подсетник

У шестом разреду смо учили размеру и пропорцију. Из функције директне пропорционалности нпр. $y=\frac{2}{3}x$ следи пропорција $\frac{y}{x}=\frac{2}{3}$, коју можемо написати и као количник $y:x=2:3$, што читамо „*y* према *x* се односи као 2 према 3" или кажемо да су *y* и *x* у размери 2 : 3. Приметимо и да је $3\cdot y=2\cdot x$.

Пре него што научимо како се пропорција може продужити на више од два елемента, подсетићемо се кроз примере појмова пропорције и размере и како их примењујемо у свакодневном рачуну.

пример 1

а) У којој размери су бројеви ученика првог и другог одељења ако у првом имамо 20, а у другом 30 ученика?

б) Ученици ова два одељења су заједничком акцијом прикупљања старог папира зарадили 10 000 дин. Како би било фер да поделе тај новац?

Решење:

а) $20:30=\frac{20}{30}=\frac{2}{3}=2:3$.

б) Овде постоје два начина да поделе новац: по ученику или по одељењима. Ако хоћемо да сваки ученик појединачно добије новац, поделићемо 10 000 дин. на укупан број ученика, тј. 50, и сваки ученик ће добити 10 000 : 50 = 200 дин.

Ако хоћемо да поделимо новац по одељењима у размери 2 : 3, поделићемо 10 000 дин. на 2 + 3 = 5 делова. Два дела ће добити прво, а три дела друго одељење. Дакле, $10\,000:5=2000$ дин. Прво одељење ће добити $2\cdot 2000=4000$ дин., а друго $3\cdot 2000=6000$ дин.

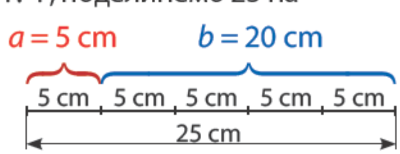
Приметимо да се исти износи добијају и множењем броја ученика у одељењу са износом који би добио сваки ученик појединачно (200 дин.). Прво одељење би добило $20\cdot 200=4000$ дин., а друго $30\cdot 200=6000$ дин.

пример 2

Израчунај дужине страница *a* и *b* правоугаоника обима 50 cm ако се зна да су дужине страница у размери $a:b=1:4$.

Решење: Како је обим $O=2(a+b)=50$ cm, имамо да је $a+b=25$ cm. Из пропорције $a:b=1:4$ имамо $b=4a$, што значи да је $a+4a=25$ cm, тј. $a=5$ cm. Следи да је $b=4a=20$ cm.

Други начин: Како 25 cm треба да поделимо у односу $1:4$, поделићемо 25 на $1+4=5$ делова, тако добијамо пет делова по 5 cm. Један део добија *a*, а *b* добија четири дела, дакле $a=1\cdot 5$ cm $=5$ cm, а $b=4\cdot 5$ cm $=20$ cm.



подсетник

Правило „спољашњи са спољашњим, а унутрашњи са унутрашњим"

спољашњи елементи

$$a : b = c : d \longrightarrow \mathbf{a \cdot d = b \cdot c}$$

унутрашњи елементи

У пропорцији $a : b = c : d$ бројеви a и d се зову спољашњи, а бројеви b и c унутрашњи чланови или унутрашњи елементи пропорције.

Напомена: Овде су сви бројеви (a, b, c и d) позитивни.

Сада ћемо у пример са два одељења додати још једно одељење да бисмо видели како се пропорција може продужити.

пример 3

(Наставак примера 1) Ако у трећем одељењу имамо 25 ученика (у првом смо рекли да имамо 20, а у другом 30), онда можемо да направимо три пропорције бројева ученика по одељењима (означимо их са p, d и t):

$$p : d = 20 : 30 = 4 : 6, \qquad p : t = 20 : 25 = 4 : 5 \quad \text{и} \quad d : t = 30 : 25 = 6 : 5.$$

Записаћемо ове пропорције и помоћу разломака да бисмо их спојили у једну (продужену) пропорцију. Из $p : d = 4 : 6$ имамо да је $6p = 4d$, односно $\frac{p}{4} = \frac{d}{6}$. На исти начин, из друге пропорције добијемо $\frac{p}{4} = \frac{t}{5}$, а из треће $\frac{d}{6} = \frac{t}{5}$, те их можемо спојити у облик

$$\frac{p}{4} = \frac{d}{6} = \frac{t}{5} \qquad \text{или} \qquad p : 4 = d : 6 = t : 5.$$

Осим ових облика, користимо и други запис у ком двотачка (:) **не означава дељење**:

$$p : d : t = 4 : 6 : 5.$$

Приметимо да овај запис није математички прецизан. Ипак, често се користи због своје једноставности, те могућности да радимо одједном са три величине. Илуструјмо сада такав поступак:

$$p : d : t = 20 : 30 : 25 = \frac{20}{5} : \frac{30}{5} : \frac{25}{5} = 4 : 6 : 5.$$

Како у оваквом запису двотачка не означава дељење, на продужену пропорцију у оваквом запису **<u>не можемо</u> примењивати правило „спољашњи са спољашњим, унутрашњи са унутрашњим"**

Наставимо сада са примером. Ако сва три одељења треба да поделе 30 000 динара, прво добија 4, друго 6, а треће 5 делова. Дакле, суму треба поделити на $4 + 6 + 5 = 15$ делова, те сваки део (означимо га са x) износи

$$x = 30000 : 15 = \frac{30000}{15} = 2000 \text{ дин.}$$

Дакле $p = 4x = 4 \cdot 2000 = 8000$ дин.,

$d = 6x = 6 \cdot 2000 = 12000$ дин.,

$t = 5x = 5 \cdot 2000 = 10000$ дин.

Запис $a : b : c = p : q : r$ назива се **продужена пропорција.**

Овде двотачка (:) не означава дељење, те не важи правило „спољашњи са спољашњим, унутрашњи са унутрашњим".

Из овакве продужене пропорције закључујемо да је $a = xp$, затим $b = xq$ и $c = xr$,

па закључујемо да се продужена пропорција може и другачије написати:

$$x = \frac{a}{p} = \frac{b}{q} = \frac{c}{r} \qquad \text{или једноставније} \qquad \frac{a}{p} = \frac{b}{q} = \frac{c}{r}.$$

Напомена: Овде су сви бројеви (a, b, c, p, q, r и x) позитивни.

пример 4

Израчунај углове троугла, који су у (продуженој) пропорцији $\alpha : \beta : \gamma = 1 : 2 : 3$.

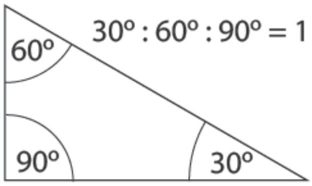
Решење: Како је $\alpha + \beta + \gamma = 180°$, а $1 + 2 + 3 = 6$, то значи да $180°$ треба поделити на 6 делова. Обележимо сваки део словом $x = 180° : 6 = 30°$.

Сада је $\alpha = x = 30°$,

$\beta = 2x = 2 \cdot 30° = 60°$ и

$\gamma = 3x = 90°$.

Проверимо, заиста је $30° : 60° : 90° = 1 : 2 : 3$.



Приметимо да се из продужене пропорције могу сазнати и пропорције (тј. односи) између свака два елемента продужене пропорције. Нпр. из $\alpha : \beta : \gamma = 1 : 2 : 3$ можемо да видимо да је

$$\alpha : \beta = 1 : 2 .$$

Заиста је тако јер смо израчунали да је $\alpha = 30°$ и $\beta = 60°$, а тада је $30° : 60° = 1 : 2$. Још можемо да закључимо да је $\beta : \gamma = 2 : 3$, а и да је $\alpha : \gamma = 1 : 3$.

пример 5

Удео у власништву производње сладоледа имају четири фирме, као што је приказано у табели.

Фирма	Лизић	Сладић	Јагодић	Корнетић
Удео у %	55	20	15	10

Овогодишња зарада на сладоледу је 750 000 динара. Како ће фирме поделити зараду сразмерно својим уделима?

Решење: Формирајмо пропорцију

$$L : S : J : K = 55 : 20 : 15 : 10 = 11 : 4 : 3 : 2.$$

У последњој једнакости смо поделили све бројеве у размери са 5 јер је НЗД(55, 20, 15, 10) = 5.

Сада имамо да је $L = 11x$; $S = 4x$; $J = 3x$; $K = 2x$

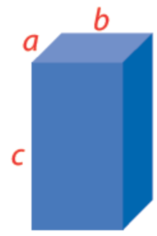
и да је $(11 + 4 + 3 + 2)x = 20x = 750\,000$.

Дакле, $x = 750\,000 : 20 = 37\,500$ дин., па су Лизићи зарадили $L = 11 \cdot 37\,500 = 412\,500$ дин., Сладићи 150 000 дин., Јагодићи 112 500 дин. и Корнетићи 75 000 дин.

Две пропорције понекад можемо спојити у једну продужену пропорцију. Приказаћемо тај поступак следећим примером.

пример 6

Ако су ширина и дужина квадра у размери 2 : 3, а ширина и висина квадра у размери 1 : 4, у којој су размери дужина и висина квадра?



Решење: Означимо ширину, дужину и висину квадра редом словима a, b, c. Имамо да је $a : b = 2 : 3$ и $a : c = 1 : 4$, односно $b = \frac{3a}{2}$ и $c = 4a$.

Сада можемо да формирамо продужену пропорцију

$$a : b : c = a : \frac{3a}{2} : 4a = 1 : \frac{3}{2} : 4 = 2 : 3 : 8.$$

Размеру дужине и висине сад читамо из продужене пропорције, тј. $b : c = 3 : 8$.

Задаци

54. Из дате продужене пропорције израчунај вредности x и y:

а) $x : y : 3 = 8 : 4 : 6$; **б)** $x : 6 : y = 0{,}25 : 2 : \frac{2}{3}$; **в)** $\frac{3}{2} : x : y = 1 : 5 : \frac{2}{3}$; **г)** $5 : x : 10 = 2 : 6 : y$.

55. Из датих пропорција израчунај вредности x, y и z:

а) $x : y = 1 : 2$; $y : z = 4 : 7$; $z : 5 = 28 : 10$; **б)** $x : 4 = 4 : 2$; $y : z = 49 : 21$; $z : x = 9 : 24$.

56. Од датих пропорција направи продужену пропорцију $x : y : z$:

а) $x : y = 5 : 2{,}5$; $y : z = 7{,}5 : 1{,}5$; **б)** $x : y = 2 : 3$; $z : x = 5 : 3$.

57. Одреди углове троугла α, β и γ ако важи:

а) $\alpha : \beta : \gamma = 7 : 7 : 6$; **б)** $\alpha : \beta : \gamma = 20 : 11 : 5$.

58. Дуле, Коле и Мита су кречили стан неколико дана. Дуле је радио осам сати дневно, Коле четири, а Мита шест сати. За посао су добили 120 000 динара. Колико свако од њих траба да добије новца ако новац деле сразмерно уложеном раду, а на материјал потребан за кречење су потрошили 25% добијеног новца?

59. Израчунај површину правоуглог троугла обима 240 cm, чије се странице односе као 5 : 12 : 13.

60. У фабрици флаша постоје три машине. Прва машина направи два пута више флаша од друге, а 40% мање флаша од треће машине. Ако фабрика дневно произведе 9500 флаша, колико дневно произведе која машина?

61. Израчунај запремину квадра површине 88 cm^2 ако су му дужине страница у односу 1 : 2 : 3.

62. На турниру у кошарци четири најбоље екипе деле награду која износи 130 000 евра. Награда првопласираног и другопласираног се односи као 5 : 4, другопласираног и трећепласираног 5 : 3, док се награде освајача трећег и четвртог места односе као 3 : 2. Колику награду ће добити свака екипа?

63. Петар Петровић има сина Николу и двоструко је старији од њега. Никола има два сина, Милана и Горана. Никола је два пута старији од Милана, а Милан је два пута старији од свог брата. Ако најмлађи и најстарији међу њима имају заједно 90 година, колико сваки од ова четири члана породице Петровић има година?

Сажетак: РЕАЛНИ БРОЈЕВИ

Скупови бројева:

Природни бројеви: $N=\{1, 2, 3, \ldots\}$

Цели бројеви: $Z=\{\ldots, -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, \ldots\}$

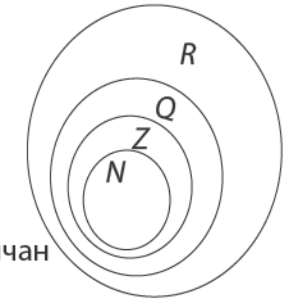
Рационални бројеви: $Q=\left\{\frac{p}{q} \mid p\in Z, \quad 0\neq q\in Z\right\}$

децимални запис: коначан или периодичан

Ирационални бројеви: I (скуп бројева који нису рационални)

децимални запис: бесконачан непериодичан

Реални бројеви: $R=Q\cup I$



Једначина $x^2 = a$:

за $a<0$, нема решења;

за $a=0$, једно решење $x=0$;

за $a>0$, два решења $x_1=-\sqrt{a}$ и $x_2=\sqrt{a}$.

Квадратни корен $\sqrt{}$:

$\sqrt{p^2}=|p|$ Не постоји квадратни корен негативног броја.

$\sqrt{a\cdot b}=\sqrt{a}\cdot\sqrt{b}$ за $a\geq 0$ и $b\geq 0$;

$\sqrt{\frac{a}{b}}=\frac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}}=\frac{\sqrt{a\cdot b}}{b}$ за $a\geq 0$ и $b>0$;

$\sqrt{a^2}=\sqrt{a}^2=a$ за $a\geq 0$.

Квадрат рационалног броја:

$$\left(\frac{p}{q}\right)^2=\frac{p^2}{q^2}\geq 0, \text{ услов: } q\neq 0.$$

За $0<x<y$, имамо $x^2<y^2$.

За $y<x<0$, имамо $|y|>|x|$, тј. $y^2>x^2$.

Потпун квадрат:

Ако **<u>је</u>** n потпун квадрат **онда** → је $\sqrt{n}$ цео број.

Ако n **<u>није</u>** потпун квадрат **онда** → је $\sqrt{n}$ ирационалан број.

Приближна вредност (заокругљивање):

$r\approx a$ Број a је **приближна вредност** (**приближан број**) броја r.

$\Delta=|r-a|$ Број Δ је **апсолутна грешка приближног броја**.

$\Delta_1=|r-a_1|$ Од два кандидата за приближан број a_1 и a_2 бирамо онај који има мању

$\Delta_2=|r-a_2|$ грешку Δ_1 или Δ_2. Ако је $\Delta_1=\Delta_2$, користи **правила заокругљивања**.

Функција директне пропорционалности:

$y=k\cdot x$ Број $k\neq 0$ је **коефицијент пропорционалности** или **нагиб**.

Продужена пропорција (напомена: сви бројеви су позитивни):

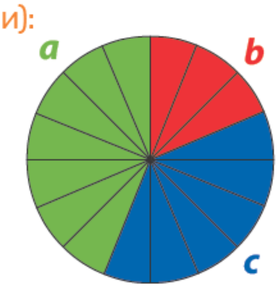
$a:b:c=p:q:r$ продужена пропорција;

$x=\frac{a}{p}=\frac{b}{q}=\frac{c}{r}$ другачији запис;

$$\left.\begin{array}{l} a:b=p:q \\ b:c=q:r \\ a:c=p:r \end{array}\right\}$$ три пропорције које добијамо из једне продужене пропорције.

На слици је цео круг подељен на **$7+3+6=16$** делова.

$a:b:c=7:3:6$



Додатни задаци

64. У кружић ◯ упиши један од знакова неједнакости (<) или (>), или једнакости (=), тако да исказ буде тачан:

а) $\left(\frac{2}{3}\right)^2 \bigcirc \left(\frac{3}{2}\right)^2$;

б) $\left(-\frac{2}{3}\right)^2 \bigcirc \left(-\frac{3}{2}\right)^2$;

в) $\left(-\frac{2}{3}\right)^2 \bigcirc -\left(\frac{3}{2}\right)^2$;

г) $\left(\frac{2}{3}\right)^2 \bigcirc -\left(\frac{3}{2}\right)^2$.

65. Израчунај вредност израза:

а) $0{,}5^2 + 1{,}5^2 - 5^2 : 10$;

б) $0{,}3^2 + 0{,}4^2 - 0{,}5^2$;

в) $0{,}1^2 \cdot 100 + 1^2 \cdot (-3)^2$;

г) $0{,}7^2 - 0{,}3^2 + 0{,}8^2 - 0{,}2^2$;

д) $\left(\frac{2}{3}\right)^2 + \left(\frac{1}{3}\right)^2 - \left(1\frac{1}{3}\right)^2$;

ђ) $\left(2\frac{1}{2}\right)^2 - \left(1\frac{1}{2}\right)^2 - 0{,}5^2$;

е) $\left(-\frac{3}{4}\right)^2 \cdot 0{,}4^2 - \left(\frac{1}{3}\right)^2 \cdot 0{,}09$;

ж) $\left(\frac{2}{5}\right)^2 + \left(\frac{3}{10}\right)^2 + \left(1\frac{1}{5}\right)^2 - \left(\frac{7}{10}\right)^2$.

66. Ако је $x = \left((-7)^2 - 8^2\right) : 5$ и

$y = -\frac{4^2 : (2^2)}{2}$, израчунај:

а) $x^2 + y^2$; **б)** $x^2 - y^2$; **в)** $xy^2 - yx^2$;

г) $2y^2 - 3x^2$; **д)** $-x^2 + (-y)^2$;

ђ) $\frac{-x^2}{3} - \frac{(-y)^2}{4}$.

67. Поређај следеће бројеве у растућем поретку:
$(-3)^2;\ -2^2;\ -(-1)^2;\ 0^2;\ 1{,}5^2;\ -(2{,}5)^2$.

68. Израчунај збир квадрата четири најмања непарна природна броја.

69. Израчунај квадрат производа три највећа негативна цела броја.

70. Који је најмањи природан број којим треба помножити x да се добије квадрат неког природног броја ако је

а) $x = 75$; **б)** $x = 196$;

в) $x = 72$; **г)** $x = 180$?

71. Провери тачност записа за реалне бројеве x и y различите од нуле:

а) $x^2 = (-x)^2$; **б)** $-x^2 = (-x)^2$;

в) $(2x)^2 = 2x^2$; **г)** $(-3x)^2 = -3x \cdot (-3x)$;

д) $(xy)^2 = x^2y^2$; **ђ)** $(xy)^2 = (-x)^2(-y)^2$;

е) $\left(\frac{x}{y}\right)^2 = \frac{x^2}{y^2}$; **ж)** $-\left(\frac{1}{x}\right)^2 = \frac{-1}{x^2}$;

з) $\left(-\frac{x}{y}\right)^2 = \frac{(-x)^2}{y^2}$; **и)** $\left(\frac{x}{3}\right)^2 = \frac{(-x)^2}{9}$.

72. Који записи су тачни:

а) $(-3)^2 = -3^2$; **б)** $\sqrt{16} = -4$;

в) $(-4)^2 = 16$; **г)** $(-0)^2 = 0$;

д) $\left(-\sqrt{3}\right)^2 = \sqrt{9}$; **ђ)** $\left(\sqrt{5}\right)^2 = -\sqrt{25}$?

73. Израчунај дужину катете једнакокраког правоуглог троугла површине:

а) 8 m^2; **б)** 32 km^2; **в)** 50 cm^2.

74. Израчунај дужину дијагонале квадрата површине:

а) 18 m^2; **б)** 72 km^2; **в)** 0,98 cm^2.

***75.** Квадрат разлике непознатог броја и броја 3 једнак је корену броја 81. Одреди непознати број. Колико има решења?

76. Корен двоструког непознатог броја једнак је 6. Који је то број?

77. Количник квадрата непознатог броја и квадрата броја 5 једнак је квадрату разлике бројева 6 и 4. Одреди непознати број.

78. Поређај бројеве у растућем поретку:

а) $0; \sqrt{0{,}5}; \sqrt{0{,}7}; -\sqrt{0{,}5}; -\sqrt{0{,}3}; \sqrt{0{,}3}; -\sqrt{0{,}7};$

б) $\sqrt{3}; -\sqrt{3}; 1{,}73; -1{,}73; 1{,}74; -1{,}74; 0.$

79. У кружић ◯ упиши један од знакова неједнакости (<) или (>), или једнакости (=), тако да запис буде тачан:

а) $0 \bigcirc \sqrt{0}$; б) $1 \bigcirc \sqrt{1}$;

в) $0{,}25 \bigcirc \sqrt{0{,}25}$; г) $\frac{1}{9} \bigcirc \sqrt{\frac{1}{9}}$;

д) $\frac{1}{2} \bigcirc \sqrt{\frac{1}{2}}$; ђ) $9 \bigcirc \sqrt{9}$;

е) $64 \bigcirc \sqrt{64}$; ж) $22 \bigcirc \sqrt{22}$.

80. У кружић ◯ упиши један од знакова неједнакости (<) или (>), или знак једнакости (=), тако да исказ буде тачан:

а) $x \bigcirc \sqrt{x}$, ако је $x > 0$ и $x < 1$;

б) $x \bigcirc \sqrt{x}$, ако је $x > 1$;

в) $x \bigcirc \sqrt{x}$, ако је $x = 0$ или $x = 1$.

81. Ако су x и y природни бројеви и корен броја x је већи од корена броја y, који од ова два броја је већи?

82. Реши једначине:

а) $\frac{1}{3}(2-x)^2 = 1{,}08$; б) $\left(\frac{5-2x}{2}\right)^2 = 1.$

83. Упрости изразе:

а) $\sqrt{4x^2}$; б) $\sqrt{9x^2y^2}$;

в) $\sqrt{(-x)^2}$; г) $\sqrt{2\frac{1}{4}(-x)^2}$.

84. Ослободи се спољашњег (првог) корена:

а) $\sqrt{\left(\sqrt{5}-\sqrt{7}\right)^2}$; б) $\sqrt{\left(3-\sqrt{5}\right)^2}$;

в) $\sqrt{\left(\sqrt{2}-2\right)^2}$; г) $\sqrt{\left(\sqrt{10}-4\right)^2}$;

д) $\sqrt{\left(\sqrt{2}-\sqrt{3}\right)^2}$; ђ) $\sqrt{\left(\sqrt{3}-\sqrt{2}\right)^2}$.

***85.** Реши једначине:

а) $\sqrt{x^2} = 3$; б) $\sqrt{(-x)^2} = 5$;

в) $\sqrt{(x+1)^2} = 0$; г) $\sqrt{(1-x)^2} = 2$;

д) $\sqrt{(3x+1)^2} = -1$; ђ) $\sqrt{\frac{(5-x)^2}{9}} = \frac{1}{3}$;

е) $\sqrt{(-4x)^2} = 2|x| + 6$;

ж) $\sqrt{(x-0{,}5)^2} = 3\frac{1}{2}$.

---

86. Израчунај вредност израза:

а) $\sqrt{\left(\frac{4}{3}\right)^2} - \sqrt{\left(-\frac{4}{3}\right)^2} + \sqrt{\left(-\frac{3}{4}\right)^2} - \sqrt{\left(\frac{3}{4}\right)^2}$; б) $\left(\sqrt{0{,}25}\cdot\sqrt{(-4)^2} - \sqrt{\left(-\frac{5}{4}\right)^2}\right)\cdot\left(\sqrt{\frac{1}{9}} + 2\sqrt{(-0{,}5)^2}\right)$;

в) $\dfrac{\left(\sqrt{(1-\sqrt{2})^2} - \sqrt{(1+\sqrt{2})^2}\right)\cdot\left(-\sqrt{0{,}64}\right)}{\left(\sqrt{(-4)^2} + \sqrt{4}\right)\cdot\left(-\sqrt{(-4)^2} - \sqrt{4^2}\right)}$; г) $\sqrt{(-0{,}6)^2}\cdot\dfrac{\sqrt{25}}{\sqrt{(-3)^2}} + \sqrt{10^2 - 8^2}\cdot\sqrt{(-0{,}1)^2} : \sqrt{0{,}36}$.

***87.** Реши једначине:

а) $\sqrt{x^2}=x$; б) $\sqrt{x^2}=-x$.

***88.** Реши неједначине:

а) $\sqrt{x^2}>1$; б) $\sqrt{x^2}\le 1$;

в) $\sqrt{(-x)^2}<-1$; г) $\sqrt{(1-x)^2}\ge 3$;

д) $\sqrt{(x+1)^2}<4$; ђ) $\sqrt{\left(\frac{1}{2}-x\right)^2}\ge -2\frac{1}{2}$.

89. За које вредности реалног броја a једначина $\sqrt{x^2}=a$ има:

а) два решења; б) једно решење;

в) ниједно решење.

90. Поређај следеће бројеве у растућем поретку: $\sqrt{\left(\sqrt{2}-1\right)^2}$; $-\sqrt{\left(1-\sqrt{2}\right)^2}$; $\sqrt{\left(\sqrt{2}+1\right)^2}$; $-\sqrt{\left(\sqrt{2}+1\right)^2}$.

***91.** Докажи да је сваки од следећих бројева ирационалан:

а) $\sqrt{3}$; б) $\sqrt{5}$; в) $\sqrt{3}+2$; г) $\sqrt{3}-\sqrt{2}$.

***92.** Ако је корен природног броја n рационалан број, докажи да је n потпун квадрат.

***93.** Ако је n природан број који није потпун квадрат, тада је корен броја n ирационалан. Докажи.

***94.** Заокругли број x на 3 децимале:

а) $x=0{,}9999$; б) $x=\sqrt{0{,}9999}$.

95. Упрости изразе:

а) $\sqrt{18}-\sqrt{8}$; б) $\sqrt{8}-\sqrt{2}$;

в) $\sqrt{75}-\sqrt{147}$; г) $-\sqrt{20}-\sqrt{45}$;

д) $-\sqrt{175}+\sqrt{63}+\sqrt{28}$;

ђ) $\sqrt{48}+\sqrt{27}+\sqrt{75}$;

е) $\sqrt{44}-\sqrt{99}-\sqrt{176}$;

ж) $\sqrt{162}-\sqrt{18}-\sqrt{72}$.

96. У кружић ◯ упиши један од знакова неједнакости(<) или (>), или знак једнакости (=), тако да запис буде тачан:

а) $\sqrt{32}+\sqrt{18}$ ◯ $\sqrt{50}+\sqrt{8}$;

б) $\sqrt{11}-\sqrt{44}$ ◯ $-\sqrt{176}+\sqrt{99}$;

в) $-\sqrt{75}+\sqrt{12}$ ◯ $\sqrt{48}-\sqrt{192}$.

97. Упореди бројеве:

а) $3\sqrt{5}$ и $2\sqrt{11}$; б) $4\sqrt{3}$ и $2\sqrt{10}$;

в) $3\sqrt{15}$ и $\sqrt{2}\cdot 2\cdot\sqrt{17}$; г) $7\sqrt{13}$ и $13\sqrt{7}$.

***98.** У кружић ◯ упиши један од знакова неједнакости (<) или (>), или знак једнакости (=), тако да запис буде тачан:

а) $6+3\sqrt{5}$ ◯ $5\sqrt{2}+2\sqrt{10}$;

б) $3\sqrt{3}-3$ ◯ $2\sqrt{7}-2\sqrt{2}$;

в) $-3\sqrt{7}-\sqrt{3}\cdot\sqrt{5}$ ◯ $-2\sqrt{17}-3\sqrt{2}$;

г) $2\sqrt{6}-2\sqrt{11}$ ◯ $4\sqrt{2}-6$.

99. Који од записа су тачни:

а) $\sqrt{1+\sqrt{5}}=\frac{7}{4}$; б) $\sqrt{3+\sqrt{35}}<3$;

в) $\sqrt{5-\sqrt{5}}>1\frac{2}{3}$; г) $\sqrt{12-\sqrt{7}}=3$.

100. Израчунај:

а) $\dfrac{\left(-2\sqrt{2}\right)\cdot\left(\sqrt{75}-2\sqrt{12}\right)}{2\sqrt{54}+\sqrt{24}}$;

б) $\dfrac{\frac{3\sqrt{7}}{0{,}5}-\left(\sqrt{20}+\sqrt{80}\right)}{\frac{1}{2}\left(\sqrt{252}-\sqrt{180}\right)}$.

101. Упрости израз:

а) $\sqrt{\frac{2}{3}}\cdot\left(\sqrt{\frac{75}{8}}+\sqrt{\frac{27}{50}}\right)$;

б) $\left(\sqrt{1\frac{17}{28}}-\sqrt{1\frac{13}{112}}\right):\sqrt{\frac{5}{7}}$;

в) $-\sqrt{0{,}3}\cdot\left(\sqrt{1{,}2}-\sqrt{2{,}7}\right)$;

г) $\left(-\sqrt{\frac{96}{125}}-\sqrt{4{,}8}\right):\sqrt{1{,}2}$.

Питалице

1.	Једначина $x^2 = 3$ има само једно решење у скупу ирационалних бројева.	Тачно	Нетачно
2.	Једначина $x^2 = -1$ нема решења у скупу ирационалних бројева.	Тачно	Нетачно
3.	За сваки рационалан број x важи једнакост $\sqrt{x^2} = \lvert x \rvert$.	Тачно	Нетачно
4.	Број $\sqrt{5}$ се може представити у облику $\frac{p}{q}$, где су p и q природни бројеви.	Тачно	Нетачно
5.	Ако су x и y позитивни реални бројеви, тада увек важи: $\sqrt{x+y} = \sqrt{x} + \sqrt{y}$.	Тачно	Нетачно
6.	Збир два ирационална броја је увек ирационалан број.	Тачно	Нетачно
7.	Производ два ирационална броја је увек ирационалан број.	Тачно	Нетачно
8.	Ако су x и y позитивни реални бројеви, тада увек важи: $\sqrt{xy} = \sqrt{x} \cdot \sqrt{y}$.	Тачно	Нетачно
9.	Обим и страница ромба су директно пропорционалне величине.	Тачно	Нетачно
10.	Површина и страница квадрата су директно пропорционалне величине.	Тачно	Нетачно

Предлог теста знања

1. Ако је $x = -\frac{2}{3}$, колика је вредност израза $-\frac{1}{x^2}$:

а) $\frac{9}{4}$; **б)** $\frac{2}{3}$; **в)** $-\frac{9}{4}$; **г)** $\frac{4}{9}$; **д)** $-\frac{4}{9}$?

2. Дата је једначина $x^2 = 5$. Скуп решења једначине је:

а) скуп само позитивних бројева; **б)** скуп само негативних бројева;

в) скуп два броја различитог знака; **г)** скуп који чини тачно један број;

д) празан скуп.

3. Вредност израза $\sqrt{\left(\sqrt{10}-3\right)^2} + \sqrt{\left(4-\sqrt{10}\right)^2}$ је:

а) $2\sqrt{10}-7$; **б)** -1; **в)** $7-2\sqrt{10}$; **г)** 1; **д)** 7.

4. У скупу четири броја $\left\{\sqrt{5};\ 0{,}123123123\ldots;\ -\sqrt{2};\ 0{,}1121231234\ldots\right\}$ колико је ирационалних бројева:

а) 0; **б)** 1; **в)** 2; **г)** 3; **д)** 4?

5. Ако је $x = \sqrt{675} - 2\sqrt{147}$, тада је:

а) $-2 \le x < -1$; **б)** $-1 \le x < 0$; **в)** $0 \le x < 1$; **г)** $1 \le x < 2$; **д)** $2 \le x < 3$.

6. Ако важи $\sqrt{\frac{102}{325}} \cdot \frac{5}{\bigcirc} = \frac{\sqrt{6}}{\sqrt{13}}$, тада у кружићу $\bigcirc$ треба да пише:

а) 17; **б)** $\sqrt{34}$; **в)** 289; **г)** 34; **д)** $\sqrt{17}$.

7. Колико наведених величина нису директно пропорционалне страници квадрата: обим квадрата, дијагонала квадрата, површина квадрата, полуобим квадрата:

а) 0; **б)** 1; **в)** 2; **г)** 3; **д)** 4?

8. Ако се углови у троуглу односе као 32 : 42 : 52, тада је тај троугао:

а) једнакокрак; **б)** правоугли; **в)** тупоугли;

г) оштроугли; **д)** више одговора је тачно.

Кључни појмови (обнови пре решавања контролне вежбе)

- Квадрат броја
- Квадратни корен броја
- Потпун квадрат
- Апсолутна вредност
- Ирационални бројеви
- Реални бројеви
- Коначан децимални запис
- Периодичан децимални запис
- Непериодичан бесконачан децимални запис
- Приближна вредност
- Заокругљивање
- Апсолутна грешка приближног броја
- Функција директне пропорционалности
- Продужена пропорција

Предлог контролне вежбе

1.1.	Израчунај $\sqrt{2\frac{1}{4}}-\sqrt{3\frac{1}{16}}$.	15
1.2.	Израчунај $\sqrt{0{,}4\cdot 0{,}6+0{,}1^2}+\sqrt{\left(\frac{1}{2}-\sqrt{2}\right)^2}-\sqrt{6^2-3^2-(-5)^2}$.	20
1.3.	Израчунај $\dfrac{5\sqrt{\left(-2\frac{2}{5}\right)^2}-2\sqrt{(-5)^2}}{5^2\cdot(-2)^2\cdot 0{,}2^2}$.	25
2.1.	Реши једначину $25-x^2=0$.	15
2.2.	Реши једначину $\sqrt{\dfrac{x+5}{12}}=\dfrac{1}{2}$.	20
2.3.	Реши једначину $\left(3\frac{1}{2}+x\right)^2-1=0{,}44$.	25
3.1.	Упрости израз $\dfrac{\sqrt{20}-\sqrt{5}}{\sqrt{45}}$.	15
3.2.	Упрости израз $\sqrt{147}+2\sqrt{12}-\sqrt{108}$.	20
3.3.	Упореди бројеве $a=2\sqrt{7}+3\sqrt{3}$ и $b=5+2\sqrt{6}$.	25
4.1.	Са извора извире 90 литара воде на час. Колико воде извире са извора за 150 минута?	15
4.2.	За извор из задатка 4.1, колико времена је потребно да истекне 420 литара воде?	20
4.3.	Извор воде је исти као у задатку 4.1. Рецепт за сок захтева мешање 5 *l* воде са извора, 2 kg јабука, 3 kg поморанџи, 2,5 kg манга и 2,5 kg шећера. Шећера имамо довољно, а од укупно 180 kg воћа (у пропорцијама према рецепту) треба да направимо сок. Колико времена треба да прође да би из извора истекло довољно воде потребне да се све воће умеша у сок?	25

2 ПИТАГОРИНА ТЕОРЕМА

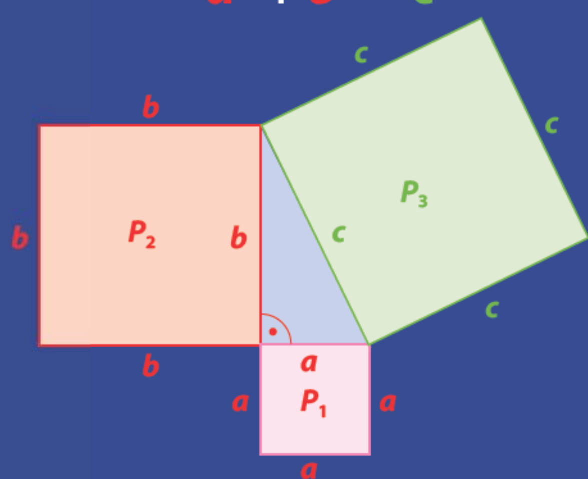
ЗАНИМЉИВОСТ

Бранислав Нушић, наш познати комедиограф, у свом делу *Аутобиографија* (1924), навео је формулацију Питагорине теореме која се вероватно најлакше памти.

Квадрат над хипотенузом,
то зна свако дете,
једнак је збиру квадрата
над обе катете.

$$P_1 + P_2 = P_3$$

$$a^2 + b^2 = c^2$$



Бранислав Нушић

У овом поглављу ћемо се упознати са Питагорином теоремом и њеним применама. Реч је о најпознатијој и вероватно најважнијој теореми у геометрији, а даје нам везу између дужина страница у правоуглом троуглу. Помоћу Питагорине теореме можемо израчунати дужину странице правоуглог троугла ако су нам познате дужине преостале две странице.

подсетник

Наспрам правог угла налази се најдужа страница правоуглог троугла, коју називамо **хипотенуза**. Странице наспрам оштрих углова у правоуглом троуглу су **катете**.

2.1. Питагорина теорема

Легенда каже да је Питагора до своје најпознатије теореме дошао посматрајући плочице на поду палате док је чекао на пријем код владара Самоса.

Ако пребројимо троугаоне плочице од којих се састоје површине означених квадрата, на првој слици је:

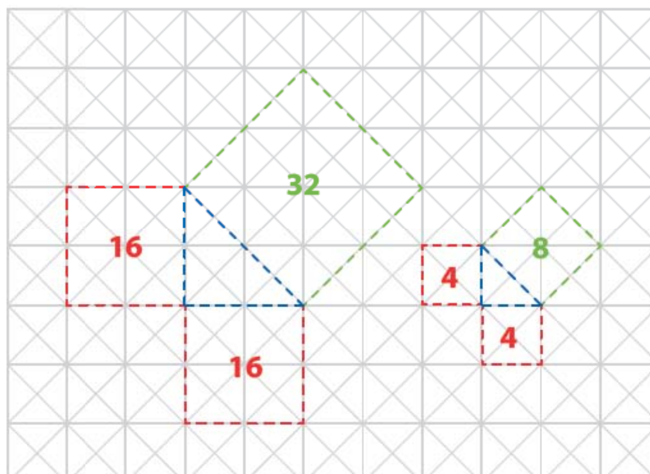
$$P_1 = P_2 = 16, \quad P_3 = 32.$$

На другој слици је:

$$P_1' = P_2' = 4, \quad P_3' = 8.$$

Примети да важи:

$$P_1 + P_2 = P_3 \text{ и } P_1' + P_2' = P_3'.$$



Питагора је закључио да ова једнакост важи за замишљене плаве правоугле троуглове произвољне величине – збир површина црвених квадрата једнак је површини зеленог квадрата. Сви троуглови које на овај начин формирају плочице су једнакокрако правоугли. Ипак, ово је навело Питагору да се запита да ли исто правило важи и за било који правоугли троугао. Тако је дошао до следећег тврђења.

тврђење

ПИТАГОРИНА ТЕОРЕМА: Површина квадрата конструисаног над хипотенузом правоуглог троугла једнака је збиру површина квадрата конструисаних над његовим катетама.

$$P_1 + P_2 = P_3$$

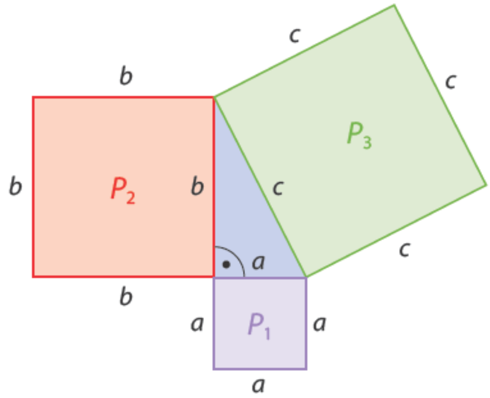
Ако са a и b обележимо дужине катета, а са c дужину хипотенузе правоуглог троугла, онда је:

$$P_1 = a^2; \quad P_2 = b^2; \quad P_3 = c^2.$$

Једнакост $P_1 + P_2 = P_3$ сада можемо записати и на други начин као

$$a^2 + b^2 = c^2,$$

а Питагорину теорему можемо формулисати и на други начин.

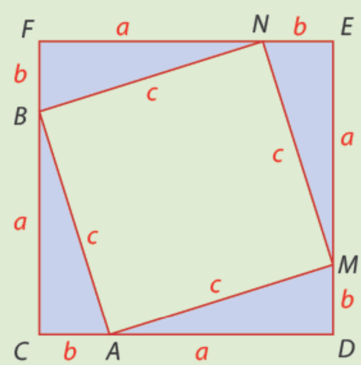


ПИТАГОРИНА ТЕОРЕМА: Ако су a и b дужине катета, а c дужина хипотенузе правоуглог троугла, онда је

$$a^2 + b^2 = c^2.$$

тврђење

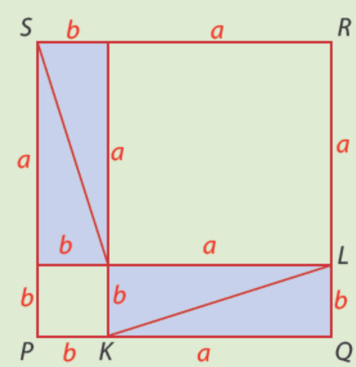
Доказ: Посматрајмо произвољан правоугли троугао ABC ($\measuredangle C = 90°$), чије су катете $BC = a$ и $AC = b$, а хипотенуза $AB = c$. Катету CA продужимо преко тачке A до тачке D тако да је $AD = a$, а катету CB продужимо преко тачке B до тачке F тако да је $BF = b$.



Сада је $CD = CF = a + b$ и $\measuredangle FCD = 90°$, па можемо конструисати квадрат $CDEF$ странице $a + b$. Нека је M тачка на страници DE таква да је $DM = b$ и N тачка на страници EF таква да је $EN = b$.

Троуглови ABC, MAD, NME и BNF су правоугли са катетама $CA = DM = EN = FB = b$ и $BC = AD = ME = NF = a$, па су међусобно подударни (према ставу СУС). Одатле закључујемо да су и њихове хипотенузе једнаке дужине, тј. $AB = MA = NM = BN = c$. У четвороуглу $AMNB$ све четири странице су једнаке c и $\measuredangle BAM = 180° - (\measuredangle CAB + \measuredangle MAD) = 180° - 90° = 90°$, па закључујемо да је $AMNB$ квадрат странице c.

Конструишимо сада квадрат $PQRS$, подударан квадрату $CDEF$. На страници PQ изаберимо тачку K тако да је $PK = b$, а на страници QR тачку L тако да је $QL = b$. Кроз тачку K конструишимо праву паралелну страници QR, а кроз тачку L праву паралелну страници PQ. Ове две праве деле квадрат $PQRS$ на четири дела – квадрат странице a, квадрат странице b и два подударна правоугаоника страница a и b. Ако сваки од ових правоугаоника поделимо дијагоналом на два троугла, добијамо четири правоугла троугла катета a и b.



Квадрати $CDEF$ и $PQRS$ су подударни, па су њихове површине једнаке $P_{CDEF} = P_{PQRS}$.

Како је $P_{CDEF} = 4 \cdot \dfrac{ab}{2} + c^2$, а $P_{PQRS} = a^2 + b^2 + 4 \cdot \dfrac{ab}{2}$, закључујемо да је $c^2 = a^2 + b^2$.

Домаћи задатак: Исеци од картона четири подударна правоугла троугла, чије катете ћеш обележити са a и b, а хипотенузу са c. Затим конструиши и исеци три квадрата – један странице a, један странице b и један странице c. Конструиши на папиру квадрат странице $a + b$. Увери се у тачност Питагорине теореме тако што ћеш фигурама од картона прекрити тај квадрат на два начина, као што је описано у доказу Питагорине теореме.

занимљивост

Леонардо да Винчи

Џејмс Гарфилд

Постоји скоро 400 различитих доказа Питагорине теореме. Осим бројних математичара, као што су Еуклид, Птоломеј, Лежандр, Лајбниц и други, своје доказе Питагорине теореме дали су и неки заљубљеници у геометрију који су се бавили сасвим другим занимањима, као што су Леонардо да Винчи или некадашњи председник САД Џејмс Гарфилд. Неки од ових доказа су врло једноставни и користе идеју сечења и премештања фигура, као у доказу који смо навели. Уколико те занима, потражи на интернету доказе Кавамуре, Ибн Коре, Ејверија, Вернера или Да Винчија.

пример 1

Израчунај дужину хипотенузе c ако су дужине катета правоуглог троугла:

а) $a = 3$ cm и $b = 4$ cm; **б)** $a = 3$ cm и $b = 5$ cm.

Решење: а) $c^2 = a^2 + b^2 = 3^2 + 4^2 = 9 + 16 = 25 = 5^2$, па је $c = 5$ cm.

б) $c^2 = a^2 + b^2 = 3^2 + 5^2 = 9 + 25 = 34 = \sqrt{34}^{\,2}$, па је $c = \sqrt{34}$ cm.

пример 2

Дужина једне катете правоуглог троугла је $a = 8$ cm, а дужина хипотенузе тог троугла је $c = 10$ cm. Израчунај дужину друге катете.

Решење: $c^2 = a^2 + b^2$, па је $b^2 = c^2 - a^2 = 10^2 - 8^2 = 36 = 6^2$. Следи: $b = 6$ cm.

пример 3

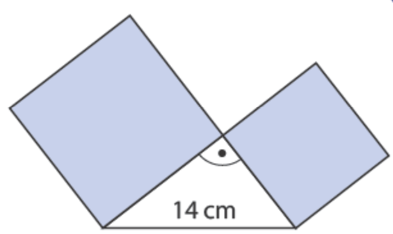
Дужина једне катете правоуглог троугла је $b = 5$ cm, а дужина хипотенузе тог троугла је $c = 13$ cm. Израчунај обим и површину тог троугла.

Решење: $a^2 = c^2 - b^2 = 13^2 - 5^2 = 169 - 25 = 144$, па је $a = 12$ cm.

$O = a + b + c = 12\text{ cm} + 5\text{ cm} + 13\text{ cm} = 30\text{ cm}$. $P = \dfrac{ab}{2} = \dfrac{5 \cdot 12}{2}\text{ cm}^2 = 30\text{ cm}^2$.

пример 4

Фигура на слици састављена је од правоуглог троугла и два квадрата. Израчунај површину осенченог дела ако је дужина хипотенузе троугла 14 cm.



Решење: Према Питагориној теореми, збир површина осенчених квадрата једнак је површини квадрата који бисмо конструисали над хипотенузом датог троугла. Дужина странице тог квадрата је 14 cm, па је површина осенченог дела $14 \cdot 14 = 196\text{ cm}^2$.

пример 5

Дужине катета правоуглог троугла су $a = 12$ cm и $b = 9$ cm. Израчунај дужину висине h_c која одговара хипотенузи тог троугла.

Решење: Површину правоуглог троугла можемо израчунати на два начина: $P = \frac{a \cdot b}{2}$ и $P = \frac{c \cdot h_c}{2}$. Познате су нам дужине катета, па можемо израчунати површину. Применом Питагорине теореме можемо да израчунамо дужину хипотенузе c. Када одредимо P и c, моћи ћемо да израчунамо и h_c.

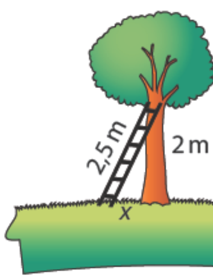
$$P = \frac{a \cdot b}{2} = \frac{12 \cdot 9}{2}\text{ cm}^2 = 54\text{ cm}^2$$

$$c^2 = a^2 + b^2 = 144 + 81 = 225 = 15^2, \text{ па је } c = 15\text{ cm}$$

$$P = \frac{c \cdot h_c}{2}, \text{ па је } h_c = \frac{2 \cdot 54}{15}\text{ cm} = 7{,}2\text{ cm}$$

пример 6

Имаш на располагању мердевине дужине 2,5 m, а желиш да се попнеш на дрво чије је стабло високо 2 m. На којој удаљености од дрвета треба да поставиш мердевине да би њихов други крај био наслоњен на врх стабла као на слици?



Решење: Тражено растојање x представља дужину хоризонталне катете правоуглог троугла, чију хипотенузу чине мердевине, а вертикалну катету стабло. Тада је $x^2 = 2{,}5^2 - 2^2 = 6{,}25 - 4 = 2{,}25 = 1{,}5^2$. Дакле, $x = 1{,}5$ m.

Задаци

1. Израчунај дужину хипотенузе ако су дате дужине катета:

а) 3 и 4; **б)** 5 и 12; **в)** 8 и 15; **г)** 7 и 24; **д)** 1 и 1; **ђ)** 1 и 2; **е)** 3 и $3\sqrt{3}$; **ж)** $\sqrt{6}$ и $\sqrt{10}$.

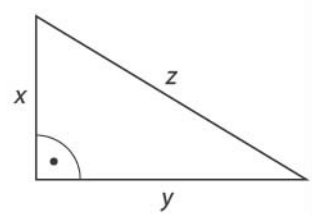
2. Израчунај дужину непознате катете ако су дате хипотенуза и друга катета:

а) 41 и 40; **б)** 29 и 21; **в)** 8 и 10; **г)** 35 и 37; **д)** $\sqrt{3}$ и $\sqrt{2}$; **ђ)** 11 и 5; **е)** 7 и 9; **ж)** $\sqrt{10}$ и 3.

3. Одреди непознат елемент x, y или z са слике, као и обим и површину троугла, ако је дато:

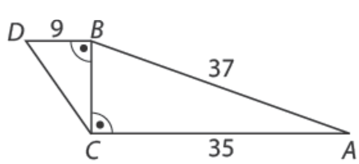
а) $x = 39$; $y = 80$; **б)** $x = 0{,}8$; $z = 1{,}7$; **в)** $y = 0{,}5$; $z = 1{,}3$;

г) $x = \frac{7}{4}$; $y = 6$; **д)** $x = 2\frac{2}{5}$; $z = 7\frac{2}{5}$; **ђ)** $y = 2\frac{1}{10}$; $z = 2\frac{9}{10}$.

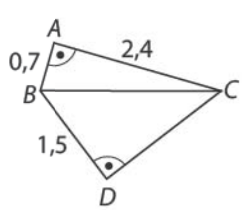


4. Израчунај дужину дужи CD са слике.

а)



б)

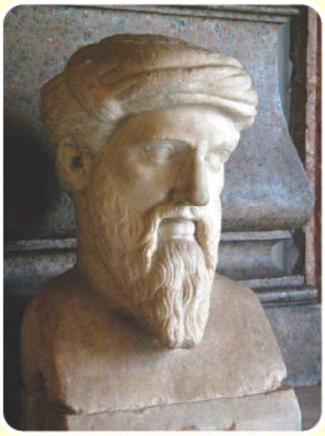


5. Израчунај висину која одговара хипотенузи и обим троугла чије су катете 15 cm и 20 cm.

ЗАНИМЉИВОСТ

Питагора и питагорејци

Питагора (око 570. године пре н. е. – око 490. године пре н. е.) био је старогрчки математичар и филозоф. Рођен је и одрастао на острву Самосу, али је у младости доста путовао, па је имао прилику да своје образовање, пре свега математичко, усавршава на подручју Италије, Египта и Вавилона.



Питагорина биста у Риму

Оснивач је чувене питагорејске школе, у којој су се проучавале математика, филозофија и музика. Чланови питагорејске школе називани су питагорејцима. Централни појам њихове филозофије је број. Бројевима су придавали мистично значење и веровали су да се све у природи може описати бројевима и њиховим међусобним односима. Питагорејци су били изузетно тајновити, своја открића су делили искључиво међу собом и нису оставили писане трагове о свом раду. Жене и мушкарци били су равноправни чланови питагорејског друштва. Међу питагорејцима су се истицали они који су прошли строгу Питагорину селекцију и постали чланови унутрашњег круга, познати под именом *Mathematikoi*. Они су се придржавали строгих правила која је наметнуо сам Питагора – живели су унутар друштва, нису имали своју имовину, било им је забрањено да једу животињско месо, грашак и боб (махунасти плод сличан пасуљу) и нису смели да носе на себи одећу од животињске коже или крзна.

Сва открића питагорејске школе приписана су Питагори. Међу њима је и чувена Питагорина теорема, вероватно најпознатије математичко тврђење. Питагорејци су доказали и да збир углова у троуглу износи 180°, заслужни су за откриће ирационалних бројева, али и за многе друге значајне резултате из области геометрије, аритметике, астрономије и филозофије. Приписује им се и први доказ у историји математике – доказ ирационалности броја $\sqrt{2}$. Како сами нису оставили записе својих открића, овај доказ, као и доказ Питагорине теореме, познати су нам захваљујући Еуклиду, који их је 200 година после Питагорине смрти записао у свом делу *Елементи*, које се сматра најзначајнијим делом античке математике.

Питагорина теорема нам даје везу између страница правоуглог троугла. Имајући на уму практичну примену и важност правих углова у архитектури и грађевинарству, не изненађује откриће да је ова веза била позната и 1000 година пре Питагоре, барем за неке специјалне случајеве троуглова, у Кини, Вавилону и Египту. Ипак, теорема носи Питагорино име јер се сматра да је он први доказао ово тврђење.

Легенда каже да је Питагора био толико задовољан када је доказао ову теорему да је одлучио да изведе хекатомбу, односно да боговима у знак захвалности жртвује сто волова.

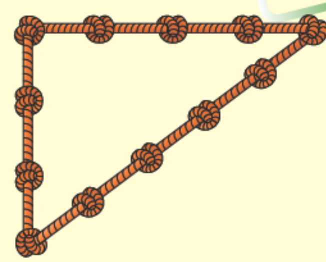
Обрнута Питагорина теорема 2.2.

У претходној лекцији упознали смо се са Питагорином теоремом, односно научили смо да за дужине катета a и b и дужину хипотенузе c правоуглог троугла важи $a^2 + b^2 = c^2$. Поставља се питање да ли сваки троугао за чије дужине страница a, b и c важи ова једнакост мора да буде правоугли.

Домаћи задатак: Конструиши у свесци троугао страница 3 cm, 4 cm и 5 cm. Угломером измери угао наспрам најдуже странице. Шта закључујеш? Примети да је $3^2 + 4^2 = 9 + 16 = 25 = 5^2$. Мерењем највећег угла у троуглу закључићеш да је он прав.

занимљивост

Троугао који смо посматрали у претходном домаћем задатку познат је као **египатски троугао**. Иако не знамо поуздано да ли су Стари Египћани знали за једнакост $a^2 + b^2 = c^2$ у правоуглом троуглу, утврђено је да су знали да је троугао са страницама 3, 4 и 5 правоугли. Египатски грађевинари су овај троугао користили за конструкцију правог угла. Користили су канап који је чворовима подељен на 12 једнаких делова. Савијањем канапа у троугао чије су странице износиле 3, 4 и 5 делова добијали су прав угао.



Ако бисмо конструисали троугао страница 5 cm, 12 cm и 13 cm или троугао чије су странице 6 cm, 8 cm и 10 cm, дошли бисмо до истог закључка. Важи да је $5^2 + 12^2 = 13^2$, односно $6^2 + 8^2 = 10^2$, а мерењем помоћу угломера закључујемо да су троуглови правоугли. Ова особина важи у општем случају, о чему говори тзв. обрнута Питагорина теорема.

тврђење

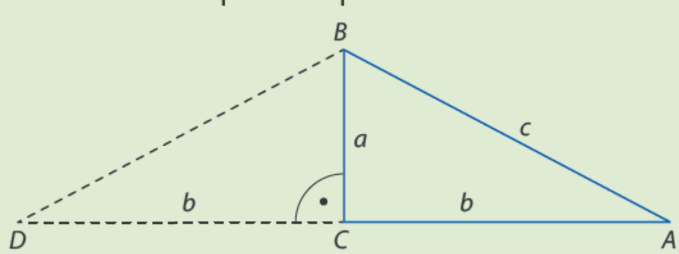
ОБРНУТА ПИТАГОРИНА ТЕОРЕМА: Ако за дужине страница a, b и c троугла важи $a^2 + b^2 = c^2$, онда је тај троугао правоугли, а хипотенуза има дужину c.

Доказ: Нека је ABC троугао за чије странице a, b и c важи $a^2 + b^2 = c^2$. Конструишимо тачку D тако да је $\measuredangle BCD = 90^\circ$ и $CD = b$ (види слику).

ΔDCB је правоугли, па за њега важи Питагорина теорема

$$(BC)^2 + (CD)^2 = (BD)^2,$$

тј. $$a^2 + b^2 = (BD)^2.$$



То значи да је $(BD)^2 = c^2$, па је $BD = c = AB$.

ΔABC и ΔDBC су подударни (ССС), па су и одговарајући углови једнаки, $\measuredangle BCA = \measuredangle BCD = 90^\circ$. Дакле, ΔABC је правоугли, а хипотенуза је c.

пример 1

Да ли је троугао ABC правоугли ако су дужине његових страница:

а) 4 cm, 7 cm и 8 cm; **б)** $2\sqrt{5}$ dm, 4 dm и 6 dm?

Решење: Проверићемо да ли за најдужу страницу троугла важи да је њен квадрат једнак збиру квадрата друге две странице.

а) $4^2+7^2=16+49=65 \neq 8^2=64$, што значи да овај троугао није правоугли.

б) $\left(2\sqrt{5}\right)^2+4^2=20+16=36 = 6^2=36$, па овај троугао јесте правоугли.

занимљивост

Питагорине тројке бројева: Ако су дужине страница правоуглог троугла представљене целим бројевима, онда за те бројеве кажемо да чине Питагорину тројку бројева. У претходним примерима смо већ имали неколико таквих Питагориних тројки: $(3, 4, 5)$, $(6, 8, 10)$, $(5, 12, 13)$ и $(8, 15, 17)$.

Постоји бесконачно много Питагориних тројки бројева. Ако сва три члана било које Питагорине тројке помножимо истим целим бројем, поново добијамо Питагорину тројку. (Зашто?) Тако од Питагорине тројке $(3, 4, 5)$ добијамо $(6, 8, 10)$, $(9, 12, 15)$, $(12, 16, 20)$ итд.

Много је интересантније питање колико има тзв. примитивних Питагориних тројки. Питагорина тројка је примитивна ако су њени чланови узајамно прости бројеви, као што су $(3, 4, 5)$, $(8, 15, 17)$ или $(5, 12, 13)$. Може да се докаже да и примитивних Питагориних тројки има бесконачно много. Покушај и ти да пронађеш неку примитивну Питагорину тројку.

Према обрнутој Питагориној теореми, ако за дужине страница троугла важи $a^2+b^2=c^2$, троугао је правоугли. А можемо ли да закључимо нешто о угловима троугла када ова једнакост не важи? Ако је $c=\sqrt{a^2+b^2}$, угао између страница a и b је прав. Ако смањимо тај угао, односно приближимо странице a и b, добијамо да је $c<\sqrt{a^2+b^2}$, а ако га повећамо, добијамо $c>\sqrt{a^2+b^2}$.

тврђење

Нека су a, b и c дужине страница троугла ABC и нека је $c>a$ и $c>b$.

Ако је $a^2+b^2>c^2$, онда је троугао ABC оштроугли.

Ако је $a^2+b^2<c^2$, онда је троугао ABC тупоугли.

пример 2

Испитај да ли је троугао оштроугли, правоугли или тупоугли ако су дате дужине страница:

а) 2 cm, 3 cm, 4 cm; **б)** 7 cm, 15 cm, 16 cm; **в)** 7 cm, 24 cm, 25 cm.

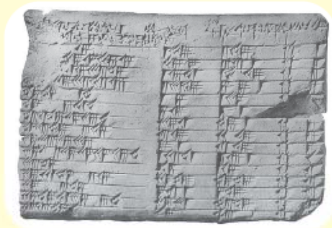
Решење: **а)** $2^2+3^2=4+9=13 < 4^2$, троугао је тупоугли;

б) $7^2+15^2=49+225=274 > 16^2$, троугао је оштроугли;

в) $7^2+24^2=49+576=625 = 25^2$, троугао је правоугли.

ЗАНИМЉИВОСТ

Питагорина теорема пре Питагоре? Поменули смо да су Стари Египћани знали да је троугао са страницама 3, 4 и 5 правоугли, а знали су и за још неке овакве тројке бројева, које су касније назване Питагориним тројкама. Осим у Египту, много пре Питагоре, неке Питагорине тројке су биле познате и у Месопотамији, Кини, Индији, али и у Европи. Глинена плочица са текстом исписаним клинастим писмом (на слици горе десно), за коју се сматра да датира из 17. века пре н. е., најстарији је документ који показује да су Вавилонци знали за неке Питагорине тројке бројева, чак су познавали и метод за одређивање великог броја Питагориних тројки. Део текста на овој таблици заправо представља листу Питагориних тројки бројева. Једна од пронађених глинених плочица из истог периода са сличном листом (на слици доле десно) представља катастарски план коришћен за мерење и поделу парцела земљишта. Ипак, нема поузданих доказа да је било којој од поменутих цивилизација пре Питагоре било познато да тврђење Питагорине теореме важи у општем случају.



Задаци

6. Одреди дужину треће странице троугла тако да троугао буде правоугли ако остале две странице имају дужине: **а)** 3 и 4; **б)** 5 и 7.

7. Утврди да ли је троугао правоугли ако су познате дужине његових страница:

а) 6, 8 и 10; **б)** $\frac{1}{2}, \frac{1}{3}$ и $\frac{1}{4}$; **в)** $2\frac{1}{2}$, 6 и $6\frac{1}{2}$;

г) $\sqrt{2}, \sqrt{3}$ и $\sqrt{4}$; **д)** $\sqrt{100}, \sqrt{200}$ и $\sqrt{300}$; **ђ)** 4,8, 5,5 и 7,3.

8. Утврди да ли је троугао оштроугли, правоугли или тупоугли ако су дужине његових страница:

а) $2\sqrt{2}, \sqrt{8}$ и $2\sqrt{4}$; **б)** $5\sqrt{2}$, 7 и 10; **в)** 13, 17 и 21;

г) $\frac{7}{2}, \frac{5}{4}$ и $\frac{15}{4}$; **д)** 1,6, 6,3 и 6,5; **ђ)** $2\sqrt{6}, 3\sqrt{11}$ и 11.

9. Да ли постоји троугао чије су висине у односу 1 : 2 : 3? Ако постоји, да ли је троугао оштроугли, правоугли или тупоугли?

10. Да ли постоји троугао чије су висине у односу 2 : 3 : 4? Ако постоји, да ли је троугао оштроугли, правоугли или тупоугли?

***11.** Да ли постоји правоугли троугао чије су дужине страница корени три узастопна природна броја?

2.3. Примена Питагорине теореме на правоугаоник и квадрат

Питагорина теорема се односи на правоугли троугао и можемо је применити приликом решавања различитих проблема у којима се појављују неке друге геометријске фигуре тако што ћемо уочавати правоугле троуглове који представљају делове тих фигура. Правоугле троуглове најлакше уочавамо код правоугаоника и квадрата јер су њихови унутрашњи углови прави.

подсетник

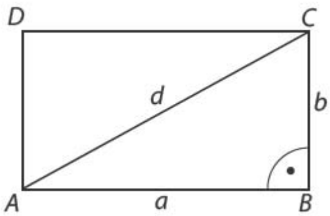
Наспрамне странице правоугаоника су међусобно паралелне и једнаких дужина, а сви унутрашњи углови су прави. Дијагонале правоугаоника су једнаких дужина и полове једна другу.

Посматрајмо правоугаоник $ABCD$. Дијагонала AC дели тај правоугаоник на два правоугла троугла ΔABC и ΔCDA. Применом Питагорине теореме на ΔABC добијамо:

$$(AC)^2 = (AB)^2 + (BC)^2.$$

Дакле, ако су дужине страница **правоугаоника** a и b, а дужина његове дијагонале d, онда је:

$$\boldsymbol{d^2 = a^2 + b^2}.$$



пример 1

Дужина дијагонале правоугаоника је $d = 17$ dm, а дужина једне његове странице је $b = 8$ dm. Израчунај обим и површину тог правоугаоника.

Решење: Обим правоугаоника је $O = 2 \cdot (a+b)$, а површина $P = a \cdot b$. Да бисмо израчунали обим и површину, неопходно је да израчунамо дужину странице a.
$d^2 = a^2 + b^2$, па је $a^2 = d^2 - b^2 = 17^2 - 8^2 = 289 - 64 = 225 = 15^2$, дакле, $a = 15$ dm.

Обим је $O = 2 \cdot (15\text{ dm} + 8\text{ dm}) = 2 \cdot 23\text{ dm} = 46\text{ dm}$,
а површина је $P = 15\text{ dm} \cdot 8\text{ dm} = 120\text{ dm}^2$.

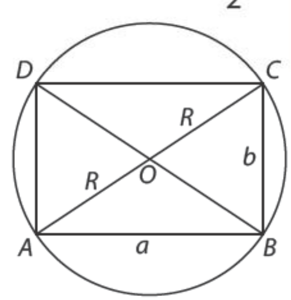
пример 2

Дужине страница правоугаоника су $a = 6$ cm и $b = 6\sqrt{3}$ cm. Израчунај дужину полупречника кружнице описане око тог правоугаоника.

Подсетник: Полупречник описаног круга једнак је половини дијагонале $R = \dfrac{d}{2}$.

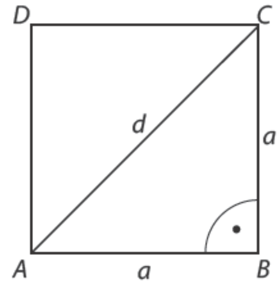
Решење:
$$d^2 = a^2 + b^2 = 6^2 + \left(6\sqrt{3}\right)^2$$
$$= 36 + 36 \cdot 3 = 36 \cdot 4 = 144.$$

Добијамо $d = \sqrt{144} = 12$ cm, па је $R = d : 2 = 6$ cm.



подсетник

Квадрат је правоугаоник код кога су све странице једнаке дужине. Дијагонале квадрата су међусобно нормалне.



Питагорина теорема нам даје важну везу између дужине странице и дијагонале **квадрата**. Применом Питагорине теореме на правоугли ΔABC добијамо:

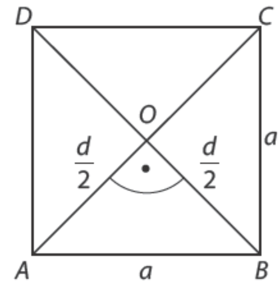
$$(AC)^2=(AB)^2+(BC)^2.$$

Ако је a дужина странице, а d дужина дијагонале квадрата, онда је $d^2=a^2+a^2=2a^2$, па је

$$\boldsymbol{d=a\sqrt{2}}.$$

Из једнакости $d=a\sqrt{2}$ добијамо $a=\dfrac{d}{\sqrt{2}}=\dfrac{d}{\sqrt{2}}\cdot\dfrac{\sqrt{2}}{\sqrt{2}}$, тј.

$$\boldsymbol{a=\frac{d\sqrt{2}}{2}}.$$



Напомена: ΔABO, ΔBCO, ΔCDO и ΔDAO су једнакокрако правоугли троуглови, код којих су дужине катета $\dfrac{d}{2}$, а дужина хипотенузе a. Применом Питагорине теореме на неки од ових троуглова добијамо исти резултат: $a^2=\left(\dfrac{d}{2}\right)^2+\left(\dfrac{d}{2}\right)^2=\dfrac{d^2}{4}+\dfrac{d^2}{4}=\dfrac{2d^2}{4}$, тј. $a=\dfrac{d\sqrt{2}}{2}$.

пример 3

Дужина странице квадрата је $a=4$ cm. Израчунај дужину дијагонале тог квадрата.

Решење: $d=a\sqrt{2}=4\sqrt{2}$ cm.

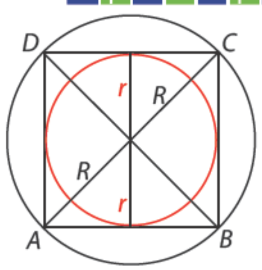
пример 4

Дужина дијагонале квадрата је $d=4$ cm. Израчунај обим и површину тог квадрата.

Решење: Обим квадрата је $O=4a$. Површину можемо израчунати на два начина, преко дужине странице или дужине дијагонале: $P=a^2$ или $P=\dfrac{d^2}{2}$.

Имамо $a=\dfrac{d\sqrt{2}}{2}=2\sqrt{2}$ cm, те следи $O=4a=8\sqrt{2}$ cm и $P=\dfrac{d^2}{2}=8$ cm².

пример 5



Дат је квадрат $ABCD$ чија је страница $AB=3\sqrt{2}$ dm. За колико се разликују дужине полупречника описане кружнице око квадрата $ABCD$ и полупречника уписане кружнице у тај квадрат? (Вредност броја $\sqrt{2}$ рачунати приближно на две децимале.)

Решење: $a=3\sqrt{2}$ dm, па је дијагонала квадрата

$$d=a\sqrt{2}=3\sqrt{2}\cdot\sqrt{2}\text{ dm}=6\text{ dm}.$$

Полупречник уписане кружнице је $r=\dfrac{a}{2}=\dfrac{3\sqrt{2}}{2}\text{ dm}\approx\dfrac{3\cdot 1{,}41}{2}\text{ dm}=2{,}115\text{ dm}.$

Полупречник описане кружнице је $R=\dfrac{d}{2}=3$ dm.

Разлика дужина полупречника је $R-r\approx 0{,}885$ dm.

пример 6

У воћњаку квадратног облика измерено је растојање између две најудаљеније тачке и оно износи 80 m. Може ли се овај воћњак оградити жицом дужине 250 m?

Решење: Највеће растојање између две тачке у квадрату је растојање између његова два несуседна темена, дакле, дато растојање представља дужину дијагонале воћњака. То значи да је дужина странице воћњака $a=\frac{d\sqrt{2}}{2}=\frac{80\sqrt{2}}{2}\ \text{m}=40\sqrt{2}\ \text{m}$.
За ограду је потребно онолико жице колико износи обим воћњака, тј.

$$O=4a=4\cdot 40\sqrt{2}\ \text{m}=160\sqrt{2}\ \text{m}.$$

Да бисмо упоредили бројеве 250 и $160\sqrt{2}$, можемо упоредити њихове квадрате.

$$\left(160\sqrt{2}\right)^2=25\,600\cdot 2=51\,200<62\,500=250^2$$

Како је $\left(160\sqrt{2}\right)^2<250^2$, закључујемо да је $160\sqrt{2}<250$, односно $O<250$ m. То значи да воћњак можемо оградити жицом дужине 250 m.
Напомена: У овом случају смо и без квадрирања могли закључити да је обим мањи од 250 m јер је $\sqrt{2}<1{,}5$, па следи: $160\sqrt{2}<160\cdot 1{,}5=240<250$.

Задаци

12. Израчунај дужину дијагонале квадрата ако је страница квадрата дужине:

а) $a=3$ cm; **б)** $a=\sqrt{8}$ cm; **в)** $a=\sqrt{18}$ cm; **г)** $a=7$ cm.

13. Израчунај дужину странице квадрата ако је дијагонала квадрата дужине:

а) $d=4$ cm; **б)** $d=\sqrt{8}$ cm; **в)** $d=\sqrt{18}$ cm; **г)** $d=\frac{1}{2}$ cm.

14. У правоугаонику странице су a и b, а дијагонала d. Попуни табелу.

a	3	10			0,5	1,4
b	4	10,5	$\sqrt{2}$	5		
d			$\sqrt{3}$	$\sqrt{41}$	1,5	5

15. Израчунај дужину дијагонале, дужине полупречника описаног и уписаног круга, површину и обим квадрата странице $\sqrt{2}$ cm.

16. Површина правоугаоника је 120 cm², а дужина једне странице 8 cm. Одреди дужину друге странице, дијагонале и полупречника описане кружнице.

17. Растојање центра описаног круга правоугаоника од страница правоугаоника је 3 cm, односно 4 cm. Одреди дужину дијагонале, обим и површину правоугаоника.

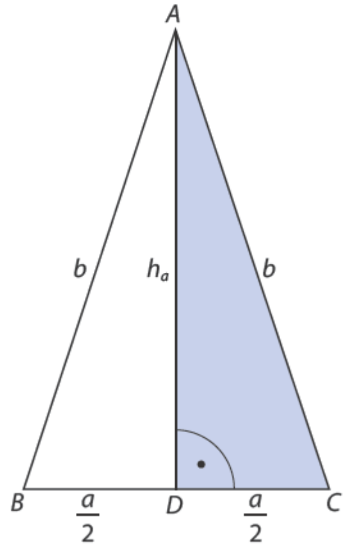
18. Дијагонале правоугаоника секу се под углом од 120°. Ако је краћа страница дужине 4 cm, одреди површину правоугаоника.

19. Израчунај растојање темена A правоугаоника $ABCD$ од дијагонале BD ако је познато да су мерни бројеви дужина страница природни бројеви који се разликују за 2, а површина је 48.

Примена Питагорине теореме на једнакокраки и једнакостранични троугао 2.4.

Применом Питагорине теореме добијамо везу између дужина основице a, крака b и висине h_a једнакокраког троугла.

Посматрајмо једнакокраки троугао ABC основице $BC = a$ и крака $AB = AC = b$. Нека је $AD = h_a$ висина тог троугла из темена A на основицу BC. Висина полови основицу једнакокраког троугла, па је $DB = DC = \frac{a}{2}$.



Троугао ADC је правоугли са катетама $AD = h_a$ и $DC = \frac{a}{2}$. Хипотенуза је $CA = b$. Применом Питагорине теореме на овај троугао добијамо:

$$\boldsymbol{h_a^2 + \left(\frac{a}{2}\right)^2 = b^2},$$

тј. $h_a^2 = b^2 - \left(\frac{a}{2}\right)^2$ или $\left(\frac{a}{2}\right)^2 = b^2 - h_a^2$.

пример 1

Дужина основице једнакокраког троугла једнака је a = 10 cm, а дужина крака је b = 13 cm. Израчунај површину тог троугла.

Решење: Да бисмо израчунали површину, неопходно је да одредимо h_a.

$$h_a^2 = b^2 - \left(\frac{a}{2}\right)^2 = 13^2 - \left(\frac{10}{2}\right)^2 = 169 - 5^2 = 144 = 12^2, \quad \text{дакле,} \ h_a = 12 \ \text{cm}.$$

Следи $P = \frac{a \cdot h_a}{2} = \frac{10 \cdot 12}{2}$ cm² = 60 cm².

пример 2

Дужина основице једнакокраког троугла је 24 dm, а његова површина износи 108 dm². Израчунај обим тог троугла.

Решење: Да бисмо израчунали обим, потребно је да знамо дужине страница троугла. У овом случају дужина основице је позната, па остаје да израчунамо дужину крака. Површину израчунавамо као $P = \frac{a \cdot h_a}{2}$, па на основу дате површине и дужине основице можемо да израчунамо h_a.

$$\frac{(24\,\text{dm}) \cdot h_a}{2} = 108 \ \text{dm}^2, \quad \text{па је } h_a = (108\ \text{dm}^2) : (12\ \text{dm}) = 9\ \text{dm}.$$

Сада је $b^2 = h_a^2 + \left(\frac{a}{2}\right)^2 = 9^2 + 12^2 = 81 + 144 = 225 = 15^2$. Дакле, $b = 15$ dm.

Обим датог троугла износи $O = a + 2b =$ 24 dm + 2 · 15 dm = 24 dm + 30 dm = 54 dm.

Специјалан случај једнакокраког троугла је једнакокрако правоугли троугао.

Посматрајмо **једнакокрако правоугли троугао** ABC чија је основица $AB = c$ истовремено и хипотенуза, док су краци $BC = CA = a$ катете тог троугла. Ако ΔABC пресликамо симетрично у односу на хипотенузу AB, добијамо четвороугао $ADBC$. Све четири странице овог четвороугла су једнаке a, а сви углови прави $(\measuredangle CAD = \measuredangle CAB + \measuredangle BAD = 45^\circ + 45^\circ = 90^\circ)$, па је четвороугао $ADBC$ квадрат. Висина h_c, која одговара хипотенузи (основици) троугла ABC, једнака је половини дијагонале квадрата $ADBC$, док хипотенуза AB представља дијагоналу тог квадрата. То значи да је:

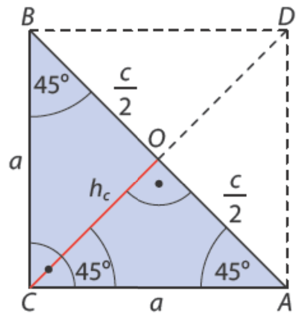
$$\boldsymbol{c = a\sqrt{2}};$$

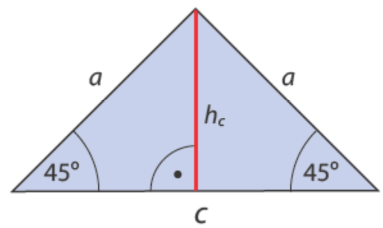
$$\boldsymbol{h_c = \frac{c}{2} = \frac{a\sqrt{2}}{2}}.$$

Површина ΔABC је

$$\boldsymbol{P = \frac{a^2}{2} = \frac{c^2}{4}}$$

јер је $P = \dfrac{c \cdot h_c}{2} = \dfrac{c \cdot \frac{c}{2}}{2} = \dfrac{c^2}{4}$.





пример 3

Израчунај обим и површину једнакокрако правоуглог троугла ако је дужина његове хипотенузе 10 cm.

Решење: Како је $c = a\sqrt{2}$, то значи да је дужина катете

$$a = \frac{c}{\sqrt{2}} = \frac{10}{\sqrt{2}}\ \text{cm} = \frac{10\sqrt{2}}{2}\ \text{cm} = 5\sqrt{2}\ \text{cm}.$$

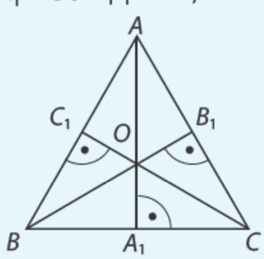
Обим је $O = a + a + c = \left(5\sqrt{2} + 5\sqrt{2} + 10\right)\ \text{cm} = \left(10\sqrt{2} + 10\right)\ \text{cm}$. Површину можемо израчунати као $P = \dfrac{a^2}{2}$ или $P = \dfrac{c^2}{4}$. У оба случаја добијамо резултат $P = 25\ \text{cm}^2$.

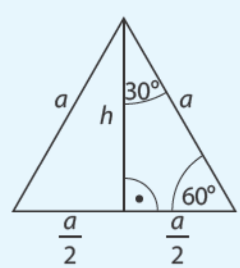
подсетник

Све странице једнакостраничног троугла су међусобно једнаке. Такође, сви унутрашњи углови су 60°. Посматрајмо једнакостранични троугао ABC странице $AB = BC = CA = a$. Нека је AA_1 висина из темена A. Троуглови A_1BA и A_1CA су подударни према ставу ССУ (јер је $AC = AB = a$, затим $AA_1 = AA_1$ и $\measuredangle BA_1A = \measuredangle CA_1A = 90^\circ$).

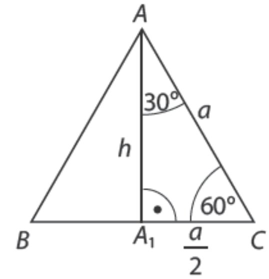
Због тога је $BA_1 = CA_1 = \dfrac{a}{2}$ и $\measuredangle BAA_1 = \measuredangle CAA_1 = 30^\circ$. Дакле, висина AA_1 полови страницу BC, али и $\measuredangle BAC$.

Висине BB_1 и CC_1 такође полове одговарајуће странице и углове троугла ABC. Због тога је тачка O у којој се секу висине AA_1, BB_1 и CC_1 истовремено и центар описаног и центар уписаног круга троугла ABC.





Применом Питагорине теореме на правоугли троугао AA_1C добијамо:



$$h^2+\left(\frac{a}{2}\right)^2=a^2$$

или $h^2=a^2-\left(\frac{a}{2}\right)^2=a^2-\frac{a^2}{4}=\frac{4a^2}{4}-\frac{a^2}{4}=\frac{3a^2}{4}$, тј.

$$\boldsymbol{h=\frac{a\sqrt{3}}{2}}.$$

Површина једнакостраничног троугла ABC је $P=\frac{a\cdot h}{2}=\frac{a\cdot\frac{a\sqrt{3}}{2}}{2}$, дакле:

$$\boldsymbol{P=\frac{a^2\sqrt{3}}{4}}.$$

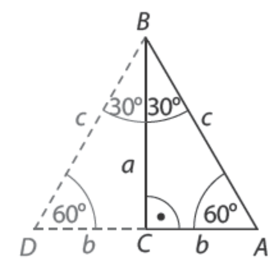
пример 4

Израчунај површину једнакостраничног троугла ако је дужина његове странице: **а)** $a=8$ dm; **б)** $a=5\sqrt{2}$ cm.

Решење: а) $P=\frac{a^2\sqrt{3}}{4}=\frac{64\sqrt{3}}{4}$ dm² $=16\sqrt{3}$ dm²;

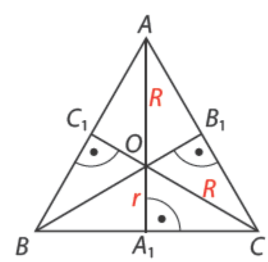
б) $P=\frac{\left(5\sqrt{2}\right)^2\cdot\sqrt{3}}{4}$ cm² $=\frac{50\sqrt{3}}{4}$ cm² $=\frac{25\sqrt{3}}{2}$ cm².

Напомена: Правоугли троугао са угловима 30°, 60° и 90° представља половину једнакостраничног троугла. Ако такав троугао ABC пресликамо симетрично у односу на катету BC, која је наспрам угла од 60°, добијамо једнакостранични троугао DAB. То значи да је дужина катете наспрам угла од 30° једнака половини дужине хипотенузе. Катета наспрам угла од 60° је истовремено висина добијеног једнакостраничног троугла, па је њена дужина $\frac{c\sqrt{3}}{2}$. Дакле ,

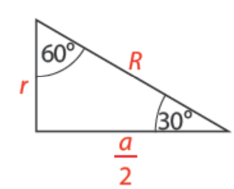


$$\boldsymbol{a=\frac{c\sqrt{3}}{2}} \quad \text{и} \quad \boldsymbol{b=\frac{c}{2}}.$$

Закључили смо да је пресечна тачка свих висина једнакостраничног троугла истовремено и центар описаног и центар уписаног круга тог троугла. Нека је ABC **једнакостранични троугао** странице a и нека је O пресечна тачка висина AA_1, BB_1 и CC_1. Полупречник описаног круга је $R=AO=BO=CO$, а полупречник уписаног је $r=A_1O=B_1O=C_1O$.



Троугао OA_1C је правоугли троугао са угловима 30°, 60° и 90°. Хипотенуза CO је два пута дужа од катете OA_1, па је $R=2r$.

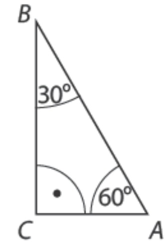


Како је $R+r=AO+A_1O=h$, добијамо да је $2r+r=3r=h$, одакле следи $r=\frac{h}{3}$ и $R=\frac{2h}{3}$. Како је $h=\frac{a\sqrt{3}}{2}$, онда је:

$$\boldsymbol{r=\frac{a\sqrt{3}}{6}} \quad \text{и} \quad \boldsymbol{R=2r=\frac{a\sqrt{3}}{3}}.$$

пример 5

У правоуглом троуглу ABC угао код темена B је 30°, а дужина хипотенузе AB износи $c = 4\sqrt{3}$ cm. Израчунај обим и површину троугла ABC.



Решење: Дужина катете AC наспрам темена B једнака је половини дужине хипотенузе, а дужина друге катете је $\frac{c\sqrt{3}}{2}$. Следи:

$$AC = \frac{4\sqrt{3}}{2}\text{ cm} = 2\sqrt{3}\text{ cm};\qquad BC = \frac{4\sqrt{3}\cdot\sqrt{3}}{2}\text{ cm} = \frac{4\cdot 3}{2}\text{ cm} = 6\text{ cm};$$

$$O = \left(4\sqrt{3} + 2\sqrt{3} + 6\right)\text{cm} = \left(6\sqrt{3} + 6\right)\text{cm};\qquad P = \frac{2\sqrt{3}\cdot 6}{2}\text{ cm}^2 = 6\sqrt{3}\text{ cm}^2.$$

пример 6

Израчунај полупречник описаног и полупречник уписаног круга једнакостраничног троугла ABC ако је дужина странице тог троугла $10\sqrt{2}$ cm.

Решење: Како је $a = 10\sqrt{2}$ cm, онда је полупречник круга описаног око троугла ABC $R = \frac{a\sqrt{3}}{3} = \frac{10\sqrt{2}\cdot\sqrt{3}}{3}\text{ cm} = \frac{10\sqrt{6}}{3}$ cm. Полупречник круга уписаног у троугао ABC је два пута краћи од полупречника описаног круга, па је $r = \frac{5\sqrt{6}}{3}$ cm.

Задаци

20. Ако је a основица, а b крак једнакокраког троугла, израчунај површину и дужине висина у том троуглу ако је познато:

а) $a = 12$ cm, $b = 10$ cm; **б)** $a = 10$ cm, $b = 13$ cm; **в)** $a = 2$ cm, $b = \sqrt{3}$ cm.

21. Ако је a основица, b крак, а O обим једнакокраког троугла, израчунај површину и дужине висина у том троуглу ако је познато:

а) $O = \left(2 + 2\sqrt{2}\right)$ cm, $a = 2$ cm; **б)** $O = \left(2 + \sqrt{2}\right)$ cm, $b = 1$ cm; **в)** $O = 32$ cm, $a = 7$ cm.

22. У једнакостраничном троуглу израчунај висину ако је дужина странице a:

а) 1 cm; **б)** $\frac{2\sqrt{3}}{3}$ cm; **в)** $\frac{5}{6}$ cm; **г)** $2\sqrt{6}$ cm.

23. У једнакостраничном троуглу израчунај страницу ако је дужина висине h:

а) $\sqrt{3}$ cm; **б)** $\sqrt{15}$ cm; **в)** 1 cm; **г)** $\frac{1}{2}$ cm.

24. У једнакостраничном троуглу a је страница, h је висина, r је полупречник уписане, а R полупречник описане кружнице, док су P и O површина и обим. Одреди a, h, r, R, P и O ако је познато:

а) $a = \sqrt{3}$ cm; **б)** $h = \sqrt{3}$ cm; **в)** $r = \sqrt{3}$ cm; **г)** $R = \sqrt{3}$ cm; **д)** $P = \sqrt{3}$ cm²; **ђ)** $O = \sqrt{3}$ cm.

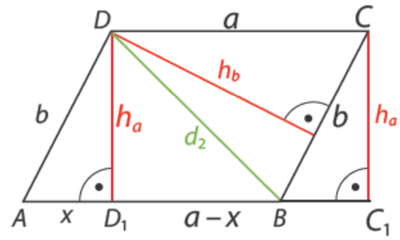
25. У једнакокрако правоуглом троуглу a је катета, b је хипотенуза, R је полупречник описане кружнице, док су P и O површина и обим. Одреди a, b, R, P и O ако је познато:

а) $a = 2$ cm; **б)** $b = 2$ cm; **в)** $R = \sqrt{3}$ cm; **г)** $P = 2$ cm²; **д)** $O = \left(2 + \sqrt{2}\right)$ cm.

Примена Питагорине теореме на паралелограм, ромб и делтоид 2.5.

подсетник

Паралелограм је четвороугао који има два пара паралелних и међусобно подударних страница. У паралелограму $ABCD$ имамо $AB \parallel CD$ и $BC \parallel AD$. Због паралелности важи да је $\measuredangle DAB = \measuredangle BCD = \alpha$ и $\measuredangle ABC = \measuredangle CDA = 180^\circ - \alpha$. Површина паралелограма је $P = a \cdot h_a = b \cdot h_b$, где је h_a висина која одговара страници a, а h_b висина која одговара страници b. Дијагонале паралелограма се међусобно полове.

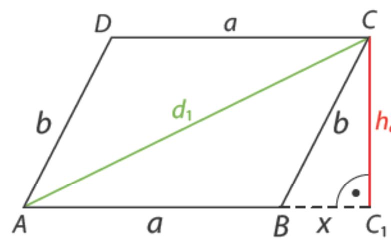


Посматрајмо **паралелограм** $ABCD$ на слици.

Нека су DD_1 и CC_1 висине из темена D, односно C, на праву која садржи страницу AB. Ако знамо дужину x одсечка AD_1, онда нам Питагорина теорема даје везу између дужине x, висине h_a и странице b. У правоуглом троуглу DAD_1 важи

$$\mathbf{x^2 + h_a^2 = b^2}.$$

Троуглови DAD_1 и CBC_1 су подударни, па је $AD_1 = BC_1 = x$.



Питагорину теорему можемо применити и на правоугле троуглове DD_1B и AC_1C. Хипотенузе ових троуглова су дијагонале паралелограма $ABCD$.

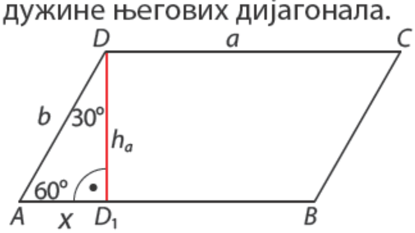
У троуглу AC_1C: $\mathbf{d_1^2 = (a + x)^2 + h_a^2}$.

У троуглу DD_1B: $\mathbf{d_2^2 = (a - x)^2 + h_a^2}$.

Следећи пример показује како добијене једнакости користимо за израчунавање непознатих дужина у паралелограму.

пример 1

Оштар угао паралелограма износи 60°, а дужине његових страница су $a = 10$ cm и $b = 6$ cm. Израчунај површину тог паралелограма и дужине његових дијагонала.



Решење: Нека је $ABCD$ дати паралелограм и $DD_1 = h_a$ висина из темена D на страницу AB. Троугао DAD_1 је правоугли троугао са угловима 30°, 60° и 90°. Дужина катете AD_1 наспрам угла од 30° једнака је половини дужине хипотенузе, па је $x = \frac{b}{2} = 3$ cm.

Дужину катете $DD_1 = h_a$ израчунавамо применом Питагорине теореме на овај троугао $h_a^2 = b^2 - x^2 = 6^2 - 3^2 = 27$, тј. $h_a = \sqrt{27}$ cm $= 3\sqrt{3}$ cm.

Сада можемо да израчунамо површину паралелограма:

$$P = a \cdot h_a = 10 \cdot 3\sqrt{3}\ \text{cm}^2 = 30\sqrt{3}\ \text{cm}^2.$$

За израчунавање дужина дијагонала користићемо једнакости које смо извели за паралелограм.

$$d_1^2 = (a + x)^2 + h_a^2 = (10 + 3)^2 + \left(3\sqrt{3}\right)^2 = 13^2 + 27 = 169 + 27 = 196$$

Дакле, $d_1 = \sqrt{196}$ cm $= 14$ cm.

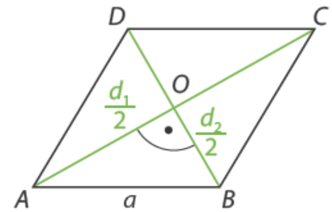
$$d_2^2 = (a - x)^2 + h_a^2 = (10 - 3)^2 + \left(3\sqrt{3}\right)^2 = 7^2 + 27 = 49 + 27 = 76$$

Дакле, $d_2 = \sqrt{76}$ cm $= 2\sqrt{19}$ cm.

подсетник

Ромб је специјалан случај паралелограма. Све странице ромба су једнаке дужине. Дијагонале ромба су нормалне једна на другу и међусобно се полове. Површина ромба може се израчунати као и површина било ког паралелограма $P = a \cdot h_a$, али је можемо израчунати и као $P = \dfrac{d_1 \cdot d_2}{2}$.

Како је **ромб** врста паралелограма, све једнакости које смо извели за паралелограм важе и код ромба. Како је угао између његових дијагонала прав, код ромба имамо још један правоугли троугао на који можемо применити Питагорину теорему.



Нека је $ABCD$ ромб чија је дужина странице једнака a и нека су дужине дијагонала $AC = d_1$ и $BD = d_2$. Троугао ABO је правоугли $(\measuredangle AOB = 90°)$, са катетама $AO = \dfrac{d_1}{2}$ и $BO = \dfrac{d_2}{2}$ и хипотенузом $AB = a$, па применом Питагорине теореме добијамо:

$$\left(\frac{d_1}{2}\right)^2 + \left(\frac{d_2}{2}\right)^2 = a^2.$$

пример 2

Израчунај обим и површину ромба ако су познате дужине његових дијагонала $d_1 = 20$ mm и $d_2 = 48$ mm.

Решење: $P = \dfrac{d_1 \cdot d_2}{2} = \dfrac{20 \cdot 48}{2}$ mm^2 $= 480$ mm^2.

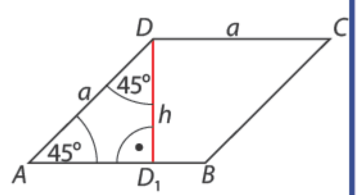
Обим ромба износи $O = 4a$, па је потребно да одредимо дужину странице a.

Како је $a^2 = \left(\dfrac{d_1}{2}\right)^2 + \left(\dfrac{d_2}{2}\right)^2 = \left(\dfrac{20}{2}\right)^2 + \left(\dfrac{48}{2}\right)^2 = 10^2 + 24^2 = 100 + 576 = 676 = 26^2$,

значи да је $a = \sqrt{26^2} = 26$ mm и $O = 4a = 4 \cdot 26$ mm $= 104$ mm.

пример 3

Израчунај површину ромба ако је његова висина $h = 5\sqrt{2}$ cm, а један угао тог ромба је 45°.

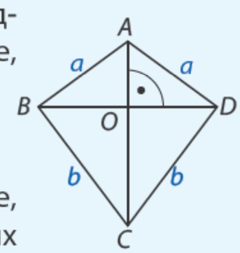


Решење: Нека је угао код темена A 45° и нека је DD_1 висина ромба из темена D на страницу AB. Троугао AD_1D је једнакокрако правоугли, па је

$$a = h\sqrt{2} = 5\sqrt{2} \cdot \sqrt{2} \text{ cm} = 5 \cdot 2 \text{ cm} = 10 \text{ cm}.$$

Тражена површина износи $P = a \cdot h = 10 \cdot 5\sqrt{2}$ cm^2 $= 50\sqrt{2}$ cm^2.

подсетник



Делтоид је четвороугао који има два пара суседних страница једнаке дужине. Дијагонале делтоида d_1 и d_2 су међусобно нормалне, па је његова површина

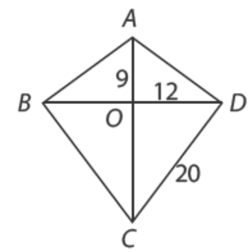
$$P = \frac{d_1 \cdot d_2}{2}.$$

Ако су суседне странице делтоида $ABCD$ код темена A једнаке, дакле, $AB = AD = a$ (тј. $BC = DC = b$), онда пресечна тачка O његових дијагонала полови дијагоналу BD, дакле, важи да је $BO = OD$.

Како су дијагонале делтоида међусобно нормалне, оне деле делтоид на четири правоугла троугла, на које можемо применити Питагорину теорему. Погледајмо следећи пример.

пример 4

Израчунај обим и површину делтоида *ABCD* са слике.



Решење: Троугао *AOD* је правоугли, па применом Питагорине теореме можемо израчунати дужину *a* странице *AD*:

$a^2 = 9^2 + 12^2 = 81 + 144 = 225 = 15^2$, одакле следи $a = \sqrt{15^2} = 15$.

Како је $BA = AD = 15$ и $BC = CD = 20$, можемо израчунати обим делтоида, $O = 2(a+b) = 2(15+20) = 2 \cdot 35 = 70$.

Да бисмо израчунали површину, потребно је да знамо дужине дијагонала. Тачка *O* полови дијагоналу *BD*, па је $BD = 2 \cdot 12 = 24$. Дужину дужи *OC* можемо израчунати применом Питагорине теореме на троугао *OCD*:

$(OC)^2 = 20^2 - 12^2 = 400 - 144 = 256 = 16^2$, одакле следи $OC = \sqrt{16^2} = 16$.

Онда је $AC = AO + OC = 9 + 16 = 25$, па је $P = \dfrac{d_1 \cdot d_2}{2} = \dfrac{25 \cdot 24}{2} = 25 \cdot 12 = 300$.

Задаци

26. Израчунај страницу ромба ако су дужине дијагонала (у cm):

а) 20 и 21; **б)** $2\sqrt{10}$ и $2\sqrt{6}$; **в)** 1,6 и 3; **г)** 1 и 2.

27. Израчунај површину ромба ако су познате дужине странице a и једне дијагонале d_1 (у cm):

а) $a = 5$, $d_1 = 6$; **б)** $a = 5$, $d_1 = 2\frac{4}{5}$; **в)** $a = \sqrt{3}$, $d_1 = 2$; **г)** $a = \sqrt{10}$, $d_1 = 2\sqrt{3}$.

28. Израчунај дужину полупречника уписаног круга ромба ако је познато:

а) $a = 3$ m, $d_1 = 3$ m; **б)** $O = 3\sqrt{48}$ m, $d_1 = 6$ m;

в) $P = 25$ m², $d_1 = 5$ m; **г)** $d_1 = 7$ m, $d_2 = 9$ m.

29. Израчунај висину ромба ако је његова површина $2\sqrt{3}$ cm², а један угао 120°.

30. Израчунај обим паралелограма *ABCD* ако је страница $BC = \sqrt{13}$ cm, дијагонала $AC = \sqrt{53}$ cm и ако висина која одговара страници *AB* има дужину 2 cm.

31. Израчунај обим паралелограма *ABCD* ако је страница *BC* = 10 cm, дијагонала $BD = \frac{13}{2}$ cm и ако висина која одговара страници *AB* има дужину 6 cm.

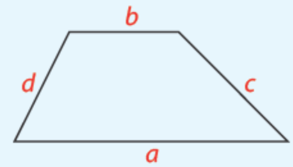
32. Израчунај дужине страница паралелограма чије су висине 3 cm и 2 cm, а обим 20 cm.

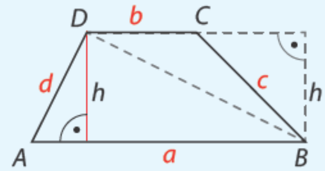
33. У делтоиду дијагонала дужине 6 cm дели другу дијагоналу на одсечке дужина 4 cm и 1,25 cm. Колики је обим делтоида?

2.6. Примена Питагорине теореме на трапез

подсетник

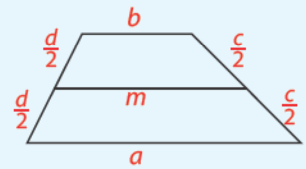
Трапез је четвороугао који има један пар паралелних страница. Паралелне странице називамо основицама (a и b), а друге две странице називамо крацима трапеза (c и d). Ако је $ABCD$ трапез чије су основице $AB = a$ и $CD = b$, а висина h, онда је површина трапеза $ABCD$ једнака збиру површина троуглова ABD и BCD.





$$P = P_{\Delta ABD} + P_{\Delta BCD} = \frac{a \cdot h}{2} + \frac{b \cdot h}{2} = \frac{(a+b) \cdot h}{2}$$

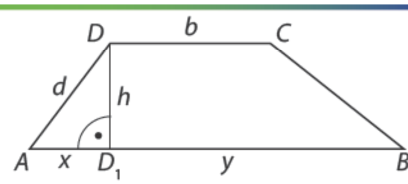
Средња линија трапеза је дуж која спаја средишта његових кракова. Паралелна је основицама трапеза, а њена дужина је $m = \frac{a+b}{2}$. Површину трапеза онда можемо записати и као $P = m \cdot h$.



У произвољном трапезу Питагорина теорема се може искористити за израчунавања у вези са висином трапеза јер висине са одговарајућим страницама формирају праве углове.

пример 1

Израчунај површину трапеза на слици ако је: $x = 3$ cm; $y = 11$ cm; $b = 6$ cm; $d = 5$ cm.



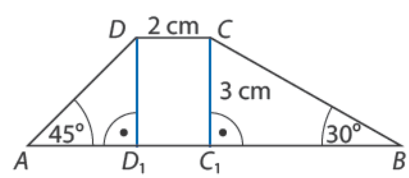
Решење: Троугао AD_1D је правоугли, па можемо израчунати висину $h = DD_1$ датог трапеза:

$h^2 = d^2 - x^2 = 5^2 - 3^2 = 25 - 9 = 16$, па је $h = \sqrt{16} = 4$ cm.

Сада је $a = x + y = 3\text{ cm} + 11\text{ cm} = 14\text{ cm}$ и $P = \frac{(a+b) \cdot h}{2} = \frac{(14+6) \cdot 4}{2}\text{ cm}^2 = 40\text{ cm}^2$.

пример 2

Израчунај површину трапеза на слици.



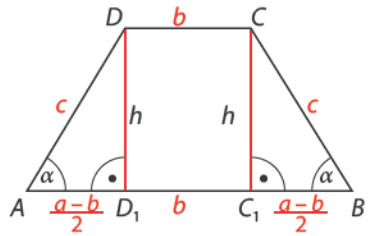
Решење: Имамо да је $b = 2$ cm и $h = 3$ cm. Да бисмо израчунали површину, потребно је да израчунамо дужину основице $AB = a$. Применом Питагорине теореме на правоугле троуглове CC_1B и AD_1D израчунаћемо дужине дужи AD_1 и C_1B, па затим и дужину основице $AB = AD_1 + D_1C_1 + C_1B$. Четвороугао D_1C_1CD је правоугаоник, па је $D_1C_1 = DC = 2$ cm и $DD_1 = CC_1 = 3$ cm.

Троугао CC_1B је правоугли са угловима од $30°$, $60°$ и $90°$. Катета CC_1 једнака је половини хипотенузе BC, па је $BC = 6$ cm. Сада је $(C_1B)^2 = 6^2 - 3^2 = 36 - 9 = 27$, па је $C_1B = \sqrt{27}$ cm $= 3\sqrt{3}$ cm. Троугао AD_1D је једнакокрако правоугли, па је $AD_1 = DD_1 = 3$ cm, те је основица

$$AB = AD_1 + D_1C_1 + C_1B = \left(3 + 2 + 3\sqrt{3}\right)\text{ cm} = \left(5 + 3\sqrt{3}\right)\text{ cm}.$$

Коначно, $P = \frac{\left(5 + 3\sqrt{3} + 2\right) \cdot 3}{2}\text{ cm}^2 = \frac{\left(7 + 3\sqrt{3}\right) \cdot 3}{2}\text{ cm}^2 = \frac{21 + 9\sqrt{3}}{2}\text{ cm}^2$.

Ако је $ABCD$ једнакокраки трапез, онда су његови краци једнаке дужине $BC = DA = c$, а углови на основици $AB = a$ су међусобно једнаки $\measuredangle BAD = \measuredangle ABC = \alpha$. И углови на основици $CD = b$ су међусобно једнаки $\measuredangle BCD = \measuredangle ADC = 180° - \alpha$.



Нека су CC_1 и DD_1 висине на основицу AB. Четвороугао D_1C_1CD је правоугаоник, па је $D_1C_1 = CD = b$. Троуглови AD_1D и BC_1C су подударни према ставу УСУ јер је $AD = BC = c$, затим $\measuredangle DAD_1 = \measuredangle CBC_1 = \alpha$ и $\measuredangle ADD_1 = \measuredangle BCC_1 = 90° - \alpha$. Због подударности имамо $AD_1 = BC_1$. Како је $AB = AD_1 + D_1C_1 + BC_1$, добијамо да је $AD_1 + BC_1 = AB - D_1C_1 = a - b$, па је

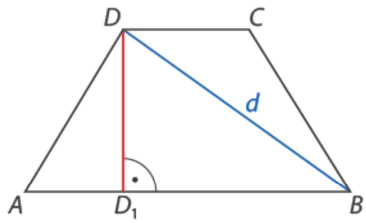
$$AD_1 = BC_1 = \frac{a-b}{2}.$$

Применом Питагорине теореме на правоугли троугао AD_1D добијамо везу између дужина страница и висине једнакокраког трапеза

$$\boldsymbol{h^2 + \left(\frac{a-b}{2}\right)^2 = c^2}.$$

За дужине дијагонала једнакокраког трапеза важи $AC = BD = d$. Ако на правоугли троугао D_1BD применимо Питагорину теорему, добијамо $(DD_1)^2 + (D_1B)^2 = (BD)^2$. Уочи

$$D_1B = AB - AD_1 = a - \frac{a-b}{2} = \frac{2a-(a-b)}{2} = \frac{a+b}{2}.$$



Сада једнакост $(DD_1)^2 + (D_1B)^2 = (BD)^2$ постаје

$$\boldsymbol{h^2 + \left(\frac{a+b}{2}\right)^2 = d^2}.$$

пример 3

Израчунај обим и површину једнакокраког трапеза ако су дужине његових основица $a = 9$ cm и $b = 5$ cm, а дужина крака је $c = 4$ cm.

Решење: Обим једнакокраког трапеза износи $O = a + b + 2c = (9 + 5 + 8)$ cm $= 22$ cm.

Из једнакости $h^2 + \left(\frac{a-b}{2}\right)^2 = c^2$ добијамо $h^2 = 4^2 - \left(\frac{9-5}{2}\right)^2 = 4^2 - 2^2 = 12$, па је

$h = \sqrt{12}$ cm $= 2\sqrt{3}$ cm.

Сада можемо да израчунамо и површину: $P = \frac{(9+5)\cdot 2\sqrt{3}}{2}$ cm² $= 14\sqrt{3}$ cm².

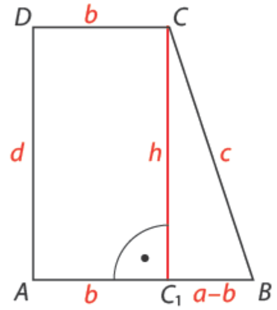
пример 4

Израчунај површину једнакокраког трапеза ако је дужина његове дијагонале $d = 2\sqrt{7}$ m, а висине $h = \sqrt{12}$ m.

Решење: На основу везе између дужине дијагонале, висине и основица једнакокраког трапеза добијамо да је $\left(\frac{a+b}{2}\right)^2 = d^2 - h^2 = \left(2\sqrt{7}\right)^2 - \left(\sqrt{12}\right)^2 = 28 - 12 = 16 = 4^2$, што значи да је $\frac{a+b}{2} = 4$ m, па је тражена површина

$P = \frac{a+b}{2}\cdot h = 4\cdot\sqrt{12}$ m² $= 8\sqrt{3}$ m².

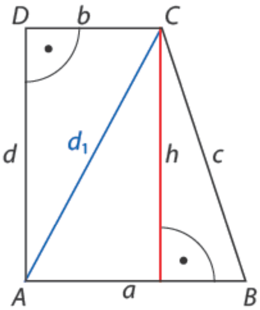
Посматрајмо сада **правоугли трапез** $ABCD$, са правим угловима код темена A и D. Крак AD је нормалан на основице и његова дужина једнака је висини трапеза, $d = h$. Нека је CC_1 висина из темена C на основицу AB. У правоуглом троуглу C_1BC хипотенуза је $BC = c$, док су катете $CC_1 = h$ и $C_1B = a - b$. Применом Питагорине теореме на овај троугао добијамо везу између дужина страница и висине правоуглог трапеза:

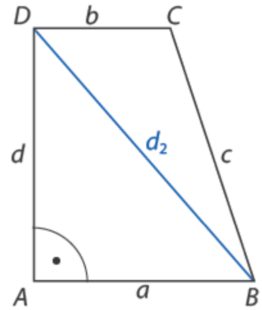


$$\boldsymbol{h^2 + (a-b)^2 = c^2}.$$

Дијагонале правоуглог трапеза су хипотенузе правоуглих троуглова ACD и ABD. Применом Питагорине теореме на ове троуглове добијамо:

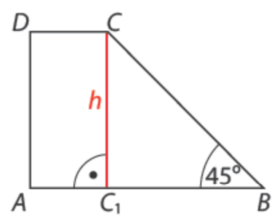
$$\boldsymbol{d_1^2 = b^2 + d^2 = b^2 + h^2},$$
$$\boldsymbol{d_2^2 = a^2 + d^2 = a^2 + h^2}.$$





пример 5

Дужине основица правоуглог трапеза су $a = 32$ cm и $b = 13$ cm, а угао код темена B износи 45°. Израчунај површину тог трапеза.



Решење: За израчунавање површине потребна нам је дужина висине h. Ако је CC_1 висина из темена C, онда је $AC_1 = DC = 13$ cm, па је $C_1B = (32 - 13)$ cm $= 19$ cm. Троугао CC_1B је једнакокрако правоугли, па је $CC_1 = C_1B = 19$ cm, тј. $h = 19$ cm.

Дакле, $P = \dfrac{(a+b)\cdot h}{2} = \dfrac{(32+13)\cdot 19}{2}\ \text{cm}^2 = \dfrac{45\cdot 19}{2}\ \text{cm}^2 = 427{,}5\ \text{cm}^2$.

Задаци

34. Израчунај површину једнакокраког трапеза $ABCD$ са основицама $AB = a > b = CD$, крацима $BC = AD = c$, висине h ако је познато:

а) $a = 10$ cm; $b = 4$ cm; $c = 5$ cm; **б)** $a = 15$ cm; $h = 12$ cm; $c = 13$ cm;

в) $b = 5{,}2$ cm; $c = 5$ cm; $h = 1{,}4$ cm.

35. Једнакокраки трапез има један угао 60°, крак дужине 10 cm и краћу основицу дужине 5 cm. Колика је дужина дуже основице?

36. Израчунај површину једнакокраког трапеза обима 60 cm, крака дужине 17 cm, чија је висина дужине 15 cm.

37. Израчунај дужину висине једнакокраког трапеза у коме је средња линија 2 cm, разлика основица 2 cm, а крак дужине $\sqrt{2}$ cm.

38. Израчунај обим и површину правоуглог трапеза чије су основице a и b (где је $a > b$) и краци c и h (где је $c > h$) ако је познато:

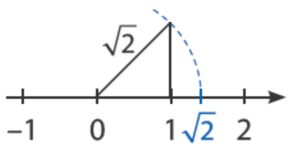
а) $a = 6$ cm, $b = 3$ cm, $c = 5$ cm; **б)** $a = 15$ cm, $b = 10$ cm, $h = 12$ cm;

в) $a = 20$ cm, $c = 17$ cm, $h = 15$ cm; **г)** $b = 3$ cm, $c = \sqrt{18}$ cm, $h = 3$ cm.

Конструкције тачака на бројевној правој које одговарају квадратним коренима природних бројева 2.7.

У претходном поглављу доказали смо да број $\sqrt{2}$ није рационалан. Како је површина квадрата чија је дужина дијагонале $d=2$ $P=\frac{2^2}{2}=2$, закључили смо да је дужина странице тог квадрата $a=\sqrt{2}$. На тај начин смо конструисали дуж дужине $\sqrt{2}$, тј. на бројевној правој конструисали смо тачку која одговара броју $\sqrt{2}$.

Сада када смо научили Питагорину теорему можемо је применити на једнакокрако правоугли троугао чије катете имају дужину $a=1$. Дужина хипотенузе тог троугла је $\sqrt{2}$. Закључујемо да дужину $\sqrt{2}$ можемо конструисати као хипотенузу једнакокрако правоуглог троугла. Затим дужину хипотенузе можемо помоћу шестара пренети на бројевну праву почевши од тачке $O(0)$ као на слици.

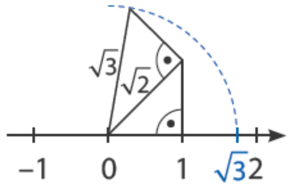


Применом Питагорине теореме можемо конструисати дужину која одговара квадратном корену било ког природног броја.

пример 1

На бројевној правој конструиши тачку која одговара броју $\sqrt{3}$.

Решење: Како је $\left(\sqrt{3}\right)^2=3=1+2$, то је $\left(\sqrt{3}\right)^2=1^2+\left(\sqrt{2}\right)^2$. Дужину $\sqrt{3}$ можемо добити конструкцијом правоуглог троугла чије су дужине катета 1 и $\sqrt{2}$. За то нам је потребна дуж дужине $\sqrt{2}$, коју ћемо конструисати на начин који смо описали на почетку лекције (и у претходном поглављу). Затим ћемо конструисати правоугли троугао над том дужи као катетом тако да дужина друге катете буде 1. Дужину хипотенузе добијеног троугла пренећемо помоћу шестара на бројевну праву, почевши од тачке O (0).

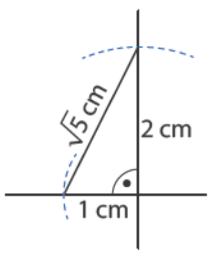


пример 2

Конструиши дуж дужине $\sqrt{5}$ cm.

Решење: Како је $5=4+1$, онда је $\left(\sqrt{5}\right)^2=2^2+1^2$.
Тражена дуж је хипотенуза правоуглог троугла чије су дужине катета 1 cm и 2 cm.

Напомена: Приметимо да је $2=\sqrt{4}$ и да смо дужину $\sqrt{5}$ cm добили користећи $\sqrt{4}$ cm и 1 cm.

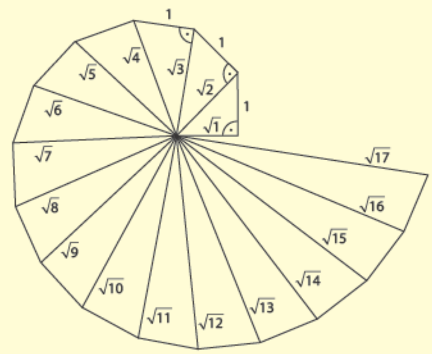


Дужине које одговарају бројевима $\sqrt{2}$, $\sqrt{3}$ и $\sqrt{5}$ конструисали смо помоћу правоуглих троуглова код којих су дужине катета 1 и 1, $\sqrt{2}$ и 1, односно $\sqrt{4}$ и 1. Помоћу дужи дужине $\sqrt{5}$ можемо конструисати нови правоугли троугао са катетама $\sqrt{5}$ и 1. Дужина хипотенузе тог троугла је $\sqrt{6}$ јер је $\left(\sqrt{6}\right)^2=\left(\sqrt{5}\right)^2+1^2$. Ако наставимо са оваквим конструкцијама, можемо добити дужине $\sqrt{7}$, $\sqrt{8}$, $\sqrt{9}\ldots$, тј. дужину која одговара квадратном корену било ког природног броја.

Ако су дужине катета правоуглог троугла $\sqrt{n}$ и 1, онда је дужина хипотенузе тог троугла: $\sqrt{\left(\sqrt{n}\right)^2+1^2}=\sqrt{n+1}$.

занимљивост

Теодорова спирала: Ако наставимо са конструкцијама дужина које одговарају квадратним коренима природних бројева на начин који смо описали приликом конструкције тачке која одговара броју $\sqrt{3}$, добијамо тзв. Теодорову спиралу, названу по старогрчком филозофу Теодору (*Theodorus*), који је на овај начин конструисао дужине које одговарају квадратним коренима природних бројева закључно са $\sqrt{17}$. Претпоставља се да се зауставио на $\sqrt{17}$ јер већ од следећег троугла који бисмо конструисали долази до делимичног преклапања са делом спирале. Спиралу можемо продужити ако наставимо са конструкцијама на исти начин. Покушај да конструишеш Теодорову спиралу, али настави са конструкцијом и после дужине $\sqrt{17}$.

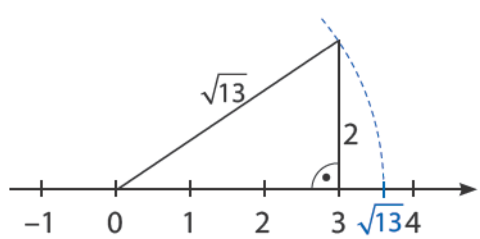


Иако смо описали начин на који можемо добити тачку која одговара броју $\sqrt{n}$ за било који природан број n, ова конструкција често није најпрактичније решење јер, да бисмо конструисали дужину $\sqrt{n}$, потребно је да конструишемо редом дужине $\sqrt{2}$, $\sqrt{3}$, ..., $\sqrt{n-1}$. Ово посебно долази до изражаја код ирационалног броја $\sqrt{n}$ када је n збир квадрата неких природних бројева.

пример 3

На бројевној правој конструши тачку која одговара броју $\sqrt{13}$.

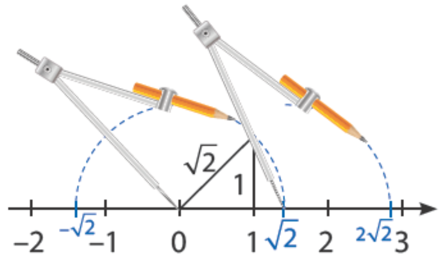
Решење:
Број 13 можемо представити као збир два природна броја на више начина, али је у овом случају најбоље да га запишемо као $9+4$ јер је $9=3^2$ и $4=2^2$. Сада имамо да је $\left(\sqrt{13}\right)^2=3^2+2^2$. На бројевној правој ћемо у тачки која одговара броју 3 конструисати нормалу и на њу нанети дужину која одговара броју 2. Тачку коју на тај начин добијемо на нормали спојићемо са тачком која одговара броју 0 на бројевној правој. Тако добијена дуж има дужину која одговара броју $\sqrt{13}$ и потребно је да је помоћу шестара нанесемо на бројевну праву.



пример 4

На бројевној правој конструиши тачке које одговарају бројевима $-\sqrt{2}$ и $2\sqrt{2}$.

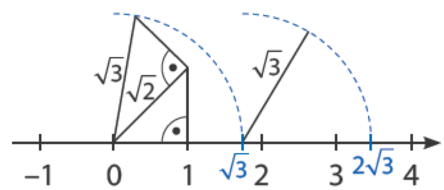
Решење: $\left|-\sqrt{2}\right| = \left|\sqrt{2}\right| = \sqrt{2}$, па су тачке која одговарају бројевима $-\sqrt{2}$ и $\sqrt{2}$ једнако удаљене од 0. Тачка која одговара броју $2\sqrt{2}$ је на два пута већем растојању од 0 у односу на $\sqrt{2}$. Конструишемо дуж дужине $\sqrt{2}$, а онда помоћу шестара пренесемо добијену дужину (као на слици).



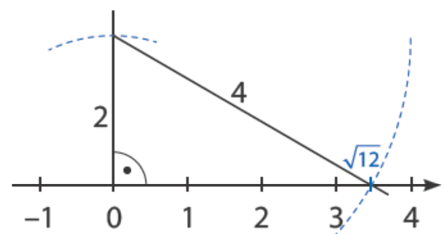
пример 5

На бројевној правој конструиши тачку која одговара броју $\sqrt{12}$.

Решење: Број 12 не можемо записати у облику збира квадрата два природна броја, као што смо урадили код броја 13, али знамо да је $\sqrt{12} = 2\sqrt{3}$, па можемо конструисати тачку која одговара броју $\sqrt{3}$, а онда и тачку која одговара броју $2\sqrt{3}$ као у претходном примеру.



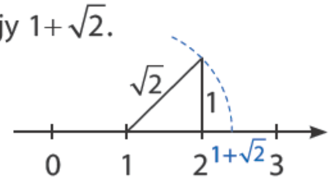
Дужину $\sqrt{12}$ можемо добити и на други начин. Како је $12 = 16 - 4 = 4^2 - 2^2$, то значи да $\sqrt{12}$ можемо конструисати као катету правоуглог троугла код кога је дужина хипотенузе 4, а дужина друге катете 2.



пример 6

На бројевној правој конструиши тачку која одговара броју $1+\sqrt{2}$.

Решење: Конструкцију изводимо на исти начин као у случају броја $\sqrt{2}$, али сада полазимо од тачке која одговара броју 1 (као на слици).



Задаци

39. На бројевној правој конструиши тачке које одговарају броју:

а) $\sqrt{6}$; **б)** $\sqrt{7}$; **в)** $\sqrt{2}+\sqrt{3}$; **г)** $\sqrt{3}-\sqrt{2}$; **д)** $1-\sqrt{5}$; **ђ)** $-\sqrt{2}$; **е)** $\sqrt{2}-\sqrt{3}$; **ж)** $-\sqrt{5}-1$.

40. Конструиши квадрат странице $\sqrt{13}$ cm.

41. Конструиши једнакостранични троугао површине $2\sqrt{3}$ cm^2.

***42.** На белом папиру нацртај дуж без мерења дужине. Конструиши квадрат чија је страница поменута дуж. Затим конструиши квадрат два пута веће површине од првог квадрата.

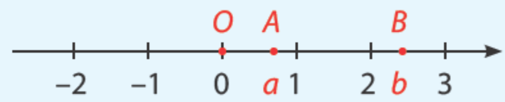
***43.** На белом папиру нацртај дуж без мерења дужине. Конструиши једнакостранични троугао чија је страница поменута дуж. Затим конструиши једнакостранични троугао три пута веће површине од првог једнакостраничног троугла.

2.8. Растојање између две тачке у координатној равни

ПОДСЕТНИК

Растојање између тачке $O(0)$, која одговара броју 0 на бројевној правој, и тачке $A(a)$, која одговара броју a на бројевној правој, једнако је $|a|$. Тачке које одговарају бројевима a и $-a$ једнако су удаљене од тачке O.

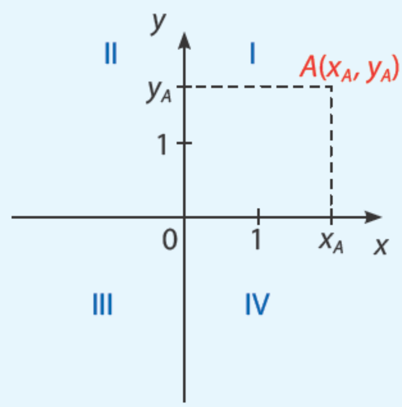
Растојање између тачака $A(a)$ и $B(b)$ једнако је $|b-a|$.



ПОДСЕТНИК

Декартов правоугли координатни систем у равни чине две међусобно нормалне координатне осе: апсцисна (x-оса или Ox оса) и ординатна (y-оса или Oy оса). Пресечну тачку O координатних оса називамо координатни почетак, а раван у којој је уведен координатни систем називамо координатна раван (xOy раван).

Положај сваке тачке у координатном систему одређен је уређеним паром (x, y) – њеним координатама. Тачка O има координате $(0, 0)$. На слици је приказана тачка $A(x_A, y_A)$.

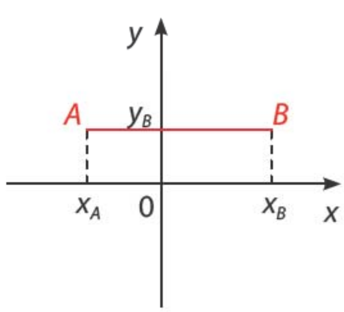


Координатна раван подељена је координатним осама на четири квадранта које означавамо римским бројевима I до IV.

Како наћи растојање између две произвољне тачке, $A(x_A, y_A)$ и $B(x_B, y_B)$, у координатној равни? Размотрићемо за почетак два специјална случаја – када тачке A и B имају једнаке y-координате или једнаке x-координате.

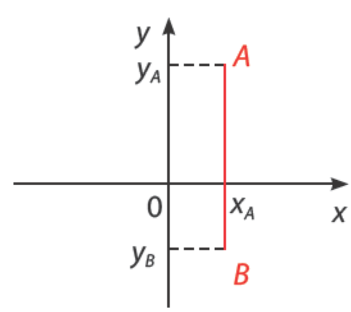
1) $y_A = y_B$

Дуж AB је паралелна x-оси, па је растојање између тачака A и B једнако растојању између тачака које одговарају бројевима x_A и x_B на x-оси, дакле $AB = |x_B - x_A|$.



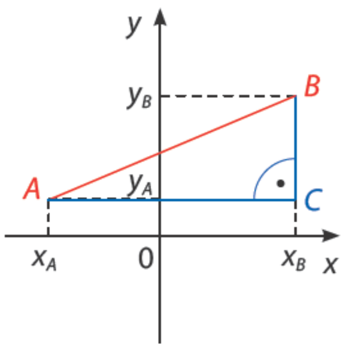
2) $x_A = x_B$

Дуж AB је паралелна y-оси, па је растојање између тачака A и B једнако растојању између тачака које одговарају бројевима y_A и y_B на y-оси, дакле, $AB = |y_B - y_A|$.



У општем случају за тачке $A(x_A,\ y_A)$ и $B(x_B,\ y_B)$ неће увек важити да је $y_A = y_B$ или $x_A = x_B$, тј. дуж AB неће бити паралелна ниједној од координатних оса. Растојање између тачака A и B тада ћемо израчунавати применом Питагорине теореме.

Нека су дате тачке $A(x_A,\ y_A)$ и $B(x_B,\ y_B)$ такве да је $x_A \neq x_B$ и $y_A \neq y_B$. Нека је C пресечна тачка праве која садржи тачку A и паралелна је x-оси и праве која садржи тачку B и паралелна је y-оси. Тачка C онда има координате $(x_B,\ y_A)$.



Тачке A и C имају једнаке y-координате, па је $AC = |x_B - x_A|$. Тачке B и C имају једнаке x-координате, па је $CB = |y_B - y_A|$.

Применом Питагорине теореме на правоугли троугао ACB добијамо $(AB)^2 = (AC)^2 + (CB)^2$, па је

$$(AB)^2 = |x_B - x_A|^2 + |y_B - y_A|^2 = (x_B - x_A)^2 + (y_B - y_A)^2.$$

Коначно добијамо да је растојање између тачака A и B

$$\boldsymbol{AB = \sqrt{(x_B - x_A)^2 + (y_B - y_A)^2}}\ .$$

Напомена: Приметимо да добијена формула важи и у специјалним случајевима које смо издвојили. За $y_A = y_B$ заменом у формулу добијамо $AB = \sqrt{(x_B - x_A)^2 + 0^2} = |x_B - x_A|$. На исти начин, за $x_A = x_B$ заменом у формулу добијамо $AB = \sqrt{0^2 + (y_B - y_A)^2} = |y_B - y_A|$. То значи да је растојање између било које две тачке $A(x_A,\ y_A)$ и $B(x_B,\ y_B)$ у координатној равни $AB = \sqrt{(x_B - x_A)^2 + (y_B - y_A)^2}$.

Приметимо да је растојање између произвољне тачке $A(x_A,\ y_A)$ и координатног почетка O једнако $AO = \sqrt{(0 - x_A)^2 + (0 - y_A)^2} = \sqrt{x_A^2 + y_A^2}$.

пример 1

Одреди растојање тачке $A(6,-8)$ од координатног почетка.

Решење: $AO = \sqrt{6^2 + (-8)^2} = \sqrt{36 + 64} = \sqrt{100} = 10.$

пример 2

Одреди растојање између тачака $A(3,\ -5)$ и $B(-4,\ 1)$.

Решење: $AB = \sqrt{(-4-3)^2 + (1-(-5))^2} = \sqrt{(-7)^2 + 6^2} = \sqrt{49 + 36} = \sqrt{85}\,.$

пример 3

Докажи да су тачке $A(x,\ y)$, $B(-x,\ y)$, $C(x,\ -y)$ и $D(-x,-y)$ подједнако удаљене од координатног почетка.

Решење: Како је $(-x)^2 = x^2$ и $(-y)^2 = y^2$, добијамо да је $AO = BO = CO = DO = \sqrt{x^2 + y^2}$.

пример 4

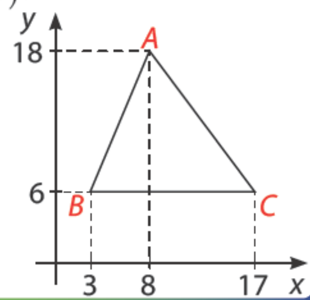
Израчунај обим троугла ABC ако је $A(8, 18)$, $B(3, 6)$ и $C(17, 6)$.

Решење: $AB = \sqrt{(3-8)^2 + (6-18)^2} = \sqrt{25+144} = \sqrt{169} = 13$

$$BC = \sqrt{(17-3)^2 + (6-6)^2} = \sqrt{14^2} = 14$$

$$CA = \sqrt{(8-17)^2 + (18-6)^2} = \sqrt{81+144} = \sqrt{225} = 15$$

$$O_{\Delta ABC} = AB + BC + CA = 13 + 14 + 15 = 42$$



пример 5

Дате су тачке $A(-1, -2)$, $B(3, 10)$ и $C(1, 4)$. Да ли је ΔABC једнакокраки?

Решење: $AB = \sqrt{(3-(-1))^2 + (10-(-2))^2} = \sqrt{16+144} = \sqrt{160} = 4\sqrt{10}$

$$BC = \sqrt{(1-3)^2 + (4-10)^2} = \sqrt{4+36} = \sqrt{40} = 2\sqrt{10}$$

$$AC = \sqrt{(1-(-1))^2 + (4-(-2))^2} = \sqrt{4+36} = \sqrt{40} = 2\sqrt{10}$$

Како је $BC = AC$, делује да је ΔABC једнакокраки, али морамо проверити и неједнакост троугла. Како **не важи** $AC + BC > AB$, дужи AC, BC и AB не граде троугао, па ни једнакокраки троугао.

Задаци

44. Одреди дужину дужи AB ако су координате тачака A и B:

а) $A(2, 5), B(6, 8)$; **б)** $A(1, 2), B(-4, 14)$; **в)** $A\left(-4, -\frac{15}{2}\right), B\left(4, \frac{15}{2}\right)$;

г) $A(-5, 5), B(3, -3)$; **д)** $A\left(-\frac{2}{3}\sqrt{3}, -\frac{1}{3}\right), B\left(\frac{\sqrt{3}}{3}, \frac{2}{3}\right)$; **ђ)** $A\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{8}\right), B\left(\frac{1}{6}, -\frac{1}{8}\right)$.

45. Одреди растојање тачака од координатног почетка и поређај их од најближе до најдаље:
$A\left(0, -\sqrt{10}\right)$; $B\left(-\sqrt{13}, 0\right)$; $C\left(-2, \sqrt{5}\right)$; $D\left(\sqrt{8}, -2\sqrt{2}\right)$; $E\left(-3, -\sqrt{2}\right)$; $F\left(\sqrt{3}, 3\right)$.

46. Израчунај обим троугла чија су темена $A(-1, -1)$, $B(8, 8)$, $C(11, 4)$. Код ког темена је највећи угао? Из ког темена је најдужа висина?

47. Дате су тачке $A(-1, -2)$, $B(2, -1)$, $C(1, 2)$, $D(-2, 1)$. Без цртања слике израчунај растојања између свих парова наведених тачака и на основу тога утврди ког типа је четвороугао $ABCD$.

***48.** У координатном систему дате су тачке $A(-3, -2)$, $B(4, -2)$, $C(4, 6)$, $D(-3, 4)$. Колико троуглова одређују ове четири тачке? За сваки троугао који ове тачке образују израчунај дужине страница и на основу тога утврди да ли су троуглови оштроугли, правоугли или тупоугли.

***49.** Дате су тачке $A(1, 1)$ и $B(5, 1)$. Одреди координате тачке C тако да троугао ABC буде:

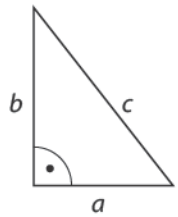
а) једнакостраничан; **б)** једнакокрако правоугли. Одреди сва решења!

Сажетак: ПИТАГОРИНА ТЕОРЕМА

Питагорина теорема:

Ако су a и b дужине катета, а c дужина хипотенузе правоуглог троугла, онда је

$$a^2 + b^2 = c^2.$$



Обрнута Питагорина теорема:

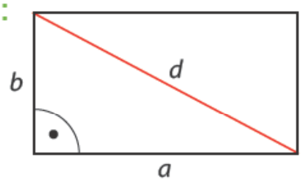
Ако за дужине страница a, b и c троугла важи

$$a^2 + b^2 = c^2,$$

онда је тај троугао правоугли.

Правоугаоник:

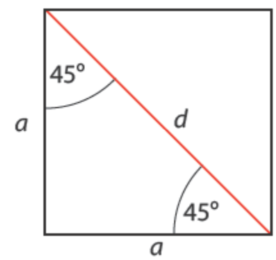
$$d^2 = a^2 + b^2$$



Квадрат:

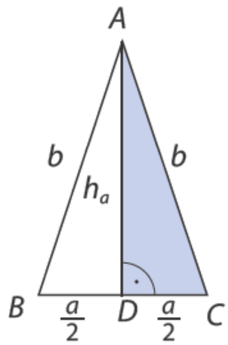
$$d = a\sqrt{2}$$

$$a = \frac{d\sqrt{2}}{2}$$



Једнакокраки троугао:

$$h_a^2 + \left(\frac{a}{2}\right)^2 = b^2$$

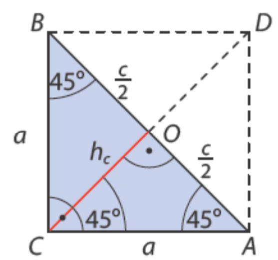


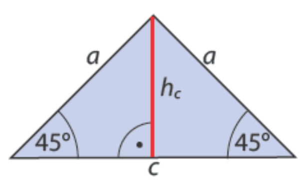
Једнакокрако правоугли троугао:

$$c = a\sqrt{2}$$

$$h_c = \frac{c}{2} = \frac{a\sqrt{2}}{2}$$

$$P = \frac{a^2}{2} = \frac{c^2}{4}$$





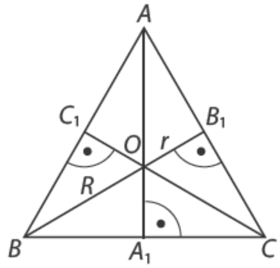
Једнакостранични троугао:

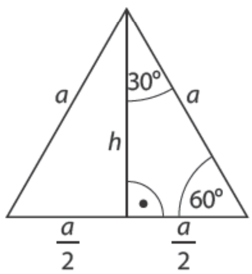
$$h = \frac{a\sqrt{3}}{2}$$

$$P = \frac{a^2\sqrt{3}}{4}$$

$$r = \frac{a\sqrt{3}}{6}$$

$$R = 2r = \frac{a\sqrt{3}}{3}$$

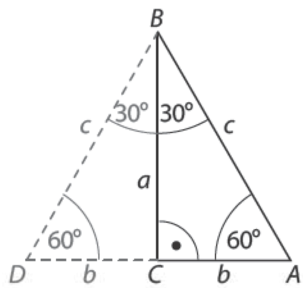




Правоугли троугао са угловима 30°, 60°, 90°:

$$a = \frac{c\sqrt{3}}{2}$$

$$b = \frac{c}{2}$$



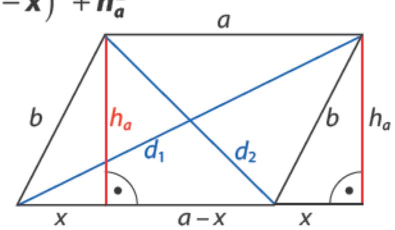
Сажетак: ПИТАГОРИНА ТЕОРЕМА

Паралелограм:

$$x^2 + h_a^2 = b^2$$

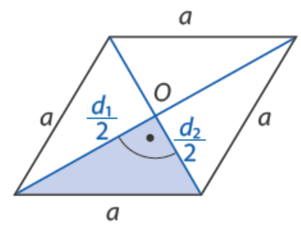
$$d_1^2 = (a + x)^2 + h_a^2$$

$$d_2^2 = (a - x)^2 + h_a^2$$



Ромб:

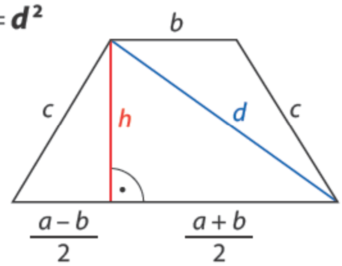
$$\left(\frac{d_1}{2}\right)^2 + \left(\frac{d_2}{2}\right)^2 = a^2$$



Једнакокраки трапез:

$$h^2 + \left(\frac{a-b}{2}\right)^2 = c^2$$

$$h^2 + \left(\frac{a+b}{2}\right)^2 = d^2$$

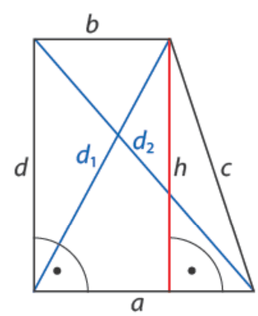


Правоугли трапез:

$$h^2 + (a - b)^2 = c^2$$

$$d_1^2 = b^2 + d^2 = b^2 + h^2$$

$$d_2^2 = a^2 + d^2 = a^2 + h^2$$



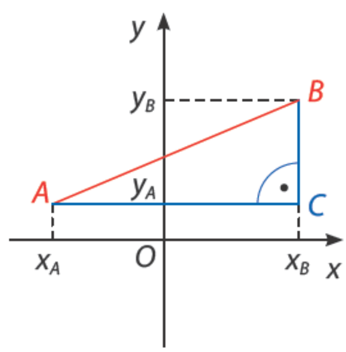
Растојање тачака у координатној равни:

Растојање између тачака $A(x_A, y_A)$ и $B(x_B, y_B)$:

$$AB = \sqrt{(x_B - x_A)^2 + (y_B - y_A)^2}.$$

Растојање тачке $A(x_A, y_A)$ од координатног почетка:

$$AO = \sqrt{x_A^2 + y_A^2}.$$

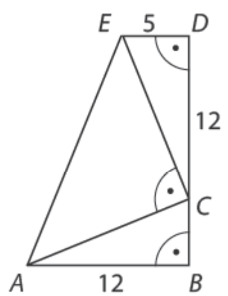


50. У правоуглом троуглу катете су a и b, а хипотенуза c. Попуни табелу.

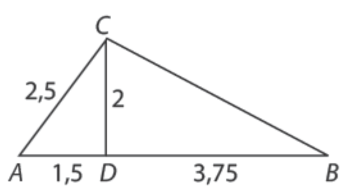
a	3		2,5	$2\frac{1}{4}$		1
b		$\frac{4}{7}$		10	0,84	2,4
c	5	$\frac{5}{7}$	6,5		0,85	

51. У правоуглом троуглу дужина једне катете је $\sqrt{3}$, а хипотенуза је два пута дужа од друге катете. Израчунај дужине страница троугла.

***52.** Израчунај дужину дужи AE користећи податке са слике.



53. На основу података са слике израчунај дужину странице BC, обим и површину ΔABC. Да ли је ΔABC оштроугли, правоугли или тупоугли?



***54.** Ако за висине троугла h_a, h_b, h_c важи једнакост $\left(\frac{h_c}{h_a}\right)^2 + \left(\frac{h_c}{h_b}\right)^2 = 1$, докажи да је троугао правоугли.

55. Израчунај висину правоуглог троугла која одговара хипотенузи и обим троугла ако су познате дужине катета: 10 cm и 24 cm.

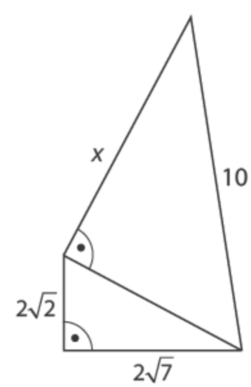
***56.** Израчунај површину правоуглог троугла чија је хипотенуза дужине 17 cm, а обим 40 cm.

***57.** Израчунај дужину хипотенузе ако су дужине тежишних дужи које одговарају катетама 8 cm и 9 cm. (Помоћ: тежишна дуж која одговара страници троугла је дуж чије су крајње тачке средиште те странице и теме наспрамног угла.)

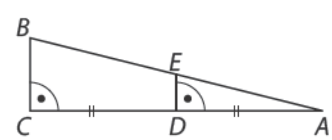
58. Оџачар треба да, користећи мердевине, пређе са крова једне зграде на кров друге. Ако је познато да су зграде високе 35 m и 40 m и да је растојање између зидова зграда 3 m, испитај да ли ће помоћу мердевина од 6 m то бити могуће.

59. Бојана и Никола живе у граду у коме су све улице међусобно паралелне или нормалне. Никола је кренуо из своје куће ка Бојаниној тако што је направио 450 корака право, а затим скренуо лево и направио још 600 корака. Колико је растојање ваздушном линијом између њихових кућа ако Никола са свака три корака пређе два метра?

60. Израчунај дужину дужи обележену са x на слици.



61. Израчунај површину троугла ABC са слике ако је $AB = 41$ m, $DE = 4{,}5$ m и $CD = DA$.



62. Дужине страница троугла су у односу $1 : \sqrt{2} : 1$. Израчунај однос углова, као и однос висина у том троуглу.

***63.** Да ли постоји тупоугли троугао чије су дужине страница корени три узастопна природна броја?

***64.** Однос углова троугла је 2 : 3 : 7. Израчунај односе страница.

65. Израчунај обим и површину правоугаоника ако је дужина дијагонале 20 cm, а странице се односе као 3 : 4.

66. Израчунај дужину дијагонале правоугаоника чији је обим 30 cm, а једна страница је два пута дужа од друге.

67. Израчунај површину квадрата ако је збир дужина свих страница и дијагонала $\left(4\sqrt{3}+2\sqrt{6}\right)$ m.

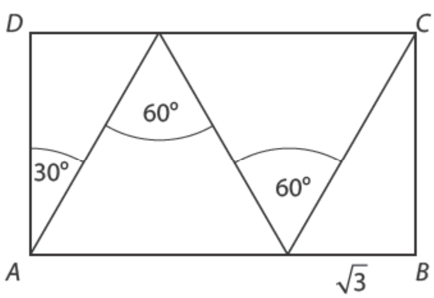
68. Израчунај обим квадрата ако се дужине дијагонале и странице разликују за 1 cm.

69. Израчунај дужину дијагонале квадрата који има исту површину као правоугаоник чија је једна страница $2\sqrt{6}$ cm, а друга 50% дужа од прве.

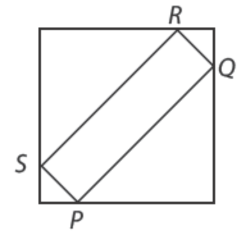
70. Колика је површина дворишта квадратног облика чија је дијагонала 20 m?

71. Одреди однос полупречника круга описаног око квадрата и полупречника круга уписаног у квадрат.

72. Израчунај површину и обим правоугаоника *ABCD* на слици.



***73.** Израчунај дужину дијагонале правоугаоника *PQRS* ако је познато да су четири троугла на слици једнакокрака и да им је збир површина 50 cm².



74. Дванаест квадрата странице $\sqrt{2}$ cm је поређано тако да чине правоугаоник највећег могућег обима. Израчунај дужину дијагонале таквог правоугаоника.

***75.** Четири села *A, B, C* и *D* у једној општини образују правоугаоник на мапи. Унутар тог правоугаоника налази се пошта. Ако је удаљеност села *A, B, C* до поште редом 7 km, 13 km и 11 km, одреди удаљеност четвртог села од поште.

76. У једнакокраком троуглу један угао једнак је збиру друга два. Ако је растојање средишта основице од крака $\sqrt{2}$ cm, одреди растојање између средишта кракова.

77. Одреди углове троугла чије су странице дужине 2 cm, $\sqrt{2}$ cm и $\sqrt{2}$ cm.

78. У троуглу чији су углови 30°, 60°, 90° a и b су катете ($a < b$), c је хипотенуза, h_c је хипотенузина висина, R је полупречник описаног круга, O је обим и P је површина. Одреди наведене елементе ако је:

а) $a = 1$; **б)** $b = 4\sqrt{3}$; **в)** $c = \sqrt{6}$;

г) $h_c = \dfrac{\sqrt{3}}{2}$; **д)** $R = 5$; **ђ)** $O = \dfrac{3+\sqrt{3}}{2}$;

е) $P = 2\sqrt{3}$.

79. Над хипотенузом једнакокрако правоуглог троугла конструисан је једнакостранични троугао. Израчунај однос површина ових троуглова.

80. Једнакокрако правоугли троугао и троугао чија су два угла $30°$ и $90°$ имају једнаке хипотенузе. Који троугао има већи обим?

81. Колика је дужина основице једнакокраког троугла чији је крак 5 cm, а висина која одговара краку 4 cm?

82. У једнакокраком троуглу један угао је два пута већи од збира друга два угла. Израчунај површину троугла ако је:

а) основица $4\sqrt{3}$ cm; **б)** крак 4 cm; **в)** висина основице 5 cm; **г)** висина крака $\sqrt{3}$ cm.

***83.** Угао при врху једнакокраког троугла је α, а дужина крака је $\sqrt{2}$. Одреди површину квадрата конструисаног над основицом ако је:

а) $\alpha = 30°$; **б)** $\alpha = 45°$.

84. Израчунај површину правоуглог троугла чија је хипотенуза дужине 2 cm, а један од углова:

а) $15°$; **б)** $22°30'$.

85. Израчунај углове у троуглу у коме се странице односе $1 : 2 : \sqrt{3}$.

86. У једнакостраничном троуглу полупречници описане и уписане кружнице су R и r. Одреди дужину странице ако је:

а) $R - r = \dfrac{\sqrt{3}}{2}$; **б)** $R + r = 6$;
в) $R \cdot r = 54$; **г)** $R^2 + r^2 = \dfrac{5}{12}$.

87. Израчунај површину једнакокраког троугла ако је висина основице 5 cm, а однос основице и крака $6 : 7$.

***88.** Над страницама квадрата $ABCD$ споља су конструисани једнакостранични троуглови ABE и BCF. Колика је дужина дужи EF ако је $AB = 2$ cm?

***89.** Квадрат $ABCD$ има странице дужине $\sqrt{3}$ cm. Са унутрашње стране квадрата конструисани су једнакостранични троуглови ADE и CDF. Колика је дужина дужи EF?

90. Израчунај обим ромба у коме је једна дијагонала исте дужине као страница, а дужина друге дијагонале (у cm) је:

а) $\sqrt{3}$; **б)** $\sqrt{21}$; **в)** 6; **г)** 15.

91. Ромб је направљен спајањем два једнакостранична троугла висине $3\sqrt{2}$ cm. Израчунај обим ромба.

92. Израчунај површину ромба чији је обим 20 cm, а један угао је пет пута већи од другог.

93. Израчунај површину ромба висине 1 cm и оштрог угла од $45°$.

94. У ромбу однос дијагонала је $3 : 1$, а страница је дужине $\sqrt{10}$ cm. Колика је површина ромба?

***95.** Израчунај површину ромба у коме је висина 2,4 cm, а дужа дијагонала 4 cm.

96. Паралелограм површине 12 cm^2 има дужине висина 2 cm и 3 cm. Одреди збир квадрата дијагонала тог паралелограма.

97. У паралелограму $ABCD$ имамо $\measuredangle DAB = 60°$, страницу $BC = 10$ cm и дијагоналу $BD = 5\sqrt{7}$ cm. Одреди дужину странице AB.

98. Израчунај дужину дијагонале BD паралелограма $ABCD$ у коме је: $\measuredangle ABC = 135°$; $AB = 7$ cm; $BC = 3\sqrt{2}$ cm.

99. Израчунај обим паралелограма $ABCD$ у коме растојање између дужи AB и CD износи $2\sqrt{3}$ cm ако је $\measuredangle CDA = 150°$ и $DB = 4$ cm.

100. У паралелограму $ABCD$ једна страница је нормална на дијагоналу $BD = \sqrt{6}$ cm, а суседне странице су у односу $1 : 2$. Израчунај дужину дијагонале AC.

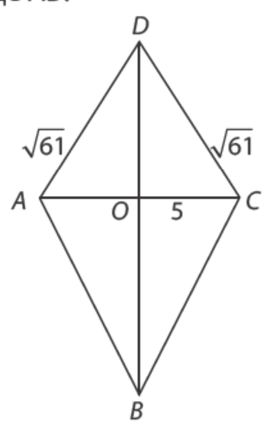
***101.** У делтоиду површине 168 cm^2 збир дијагонала је 38 cm, а дужа дијагонала дели краћу на две дужи које су у односу $5 : 9$. Израчунај обим делтоида.

102. Два једнакокрака троугла једнаких основица дужине $2\sqrt{3}$ cm и висине 1 cm, односно 3 cm, спојена су тако да чине делтоид. Израчунај обим делтоида.

103. Делтоид је састављен од једнакостраничног троугла и једнакокрако правоуглог троугла чија је катета дужине $\sqrt{8}$. Израчунај дужине дијагонала делтоида.

104. У делтоиду $ABCD$ познато је $AD = DC$ и $\measuredangle DAB = 90^\circ$, а дијагонала AC и страница BC су 3 cm. Израчунај површину делтоида $ABCD$.

105. Делтоид $ABCD$ на слици има површину 65 cm^2, а познато је $OC = 5$ cm и $AD = DC = \sqrt{61}$ cm. Израчунај дужину странице AB.



106. Делтоид $ABCD$ (где је $AB = AD$ и $BC = CD$) има прав угао код темена C. Дијагонала BD је два пута краћа од дијагонале AC. Ако је површина делтоида 72 cm^2, одреди његов обим.

***107.** Израчунај површину једнакокраког трапеза у коме је дијагонала дужине 8 cm, а угао између дијагонале и веће основице: **а)** 45°; **б)** 60°.

108. У једнакокраком трапезу чије су дијагонале нормалне растојање основица је 10 cm. Израчунај дужину дијагонале.

109. У једнакокраком трапезу краћа основица је 5 cm, висина 10 cm, а између дијагонале и веће основице је угао од 45°. Колика је дужина крака?

110. У правоуглом трапезу површине 12 cm^2 збир основица је 8 cm, а разлика 2 cm. Израчунај дужину дужег крака.

111. Одреди површину трапеза у коме су углови на већој основици 60° и 45°, а висина и краћа основица су дужине 2 cm.

112. У једнакокраком трапезу су краkови једнаки краћој основици, а један унутрашњи угао је два пута већи од другог. Одреди дужину дијагонале и обим тог трапеза ако је његова површина $75\sqrt{3}$ cm^2.

113. У једнакокраком трапезу дијагонала дужине 20 cm и крак дужине 15 cm граде прав угао. Колика је површина трапеза?

114. У трапезу висине 4 cm средња линија дели трапез на делове чије су површине 7 cm^2 и 5 cm^2. Израчунај дужине основица трапеза.

115. Квадрат странице 2 cm уписан је у једнакокраки трапез тако да је свако теме квадрата средиште једне странице трапеза. Колика је површина трапеза?

116. Израчунај обим и површину правоуглог трапеза чије су основице a и b (такве да је $a > b$), краци c и h (такви да је $c > h$) и дијагонале d_1 и d_2 (такве да је $d_1 < d_2$) ако је познато:

а) $a = 10$ cm; $h = 5$ cm; $d_1 = 5\sqrt{2}$ cm;

б) $c = \sqrt{2}$ cm; $h = 1$ cm; $d_1 = \sqrt{5}$ cm;

в) $a = 4$ cm; $b = 2$ cm; $d_2 = 5$ cm.

117. У правоуглом трапезу краћа основица и дужи крак су дужине 2 cm. Одреди обим трапеза ако му је најмањи угао: **а)** 30°; **б)** 45°; **в)** 60°.

118. У правоуглом трапезу чији је дужи крак дужине 4 cm, а средња линија дужине 6 cm, највећи угао је двоструко већи од најмањег. Израчунај обим трапеза.

119. У правоуглом трапезу једна основица је два пута дужа од друге, а један крак је два пута дужи од другог. Ако је површина овог трапеза $\sqrt{3}$ cm², одреди његов обим.

120. У правоуглом трапезу угао између краће основице и краће дијагонале је 45°, док је угао између дуже дијагонале и дуже основице 30°. Ако је дужина краћег крака $\sqrt{2}$ cm, израчунај дужине обе дијагонале.

121. Израчунај дужину основице AB трапеза $ABCD$ ако је познато:
$\measuredangle DAB + \measuredangle ABC = 90°$;
$BC = 24$ cm; $CD = 13$ cm; $DA = 10$ cm.

***122.** У трапезу чији је збир дужина основица 10 cm, а дијагонале имају дужине 6 cm и 8 cm докажи да се дијагонале секу под правим углом.

123. Израчунај површину трапеза чије су основице 10 cm и 30 cm, а краци 12 cm и 16 cm.

***124.** На белом папиру, без мерења дужина, нацртај дужи a и b тако да је $a > b$. Затим конструиши дужи следећих дужина:

а) $\sqrt{a^2+b^2}$; б) $\sqrt{a^2-b^2}$;

в) $a\sqrt{3}$; г) $b\sqrt{2}$;

д) $\sqrt{9a^2-b^2}$; ђ) $\sqrt{2a^2+8b^2}$.

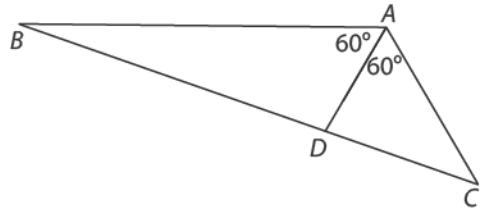
125. У координатном систему нацртај две тачке са целобројним координатама и одреди растојање између тачака, као и средиште дужи чији су крајеви те тачке.

126. У координатном систему одреди координате три различите тачке које се налазе на растојању 1 од координатног почетка, али се не налазе на координатним осама.

***127.** Правоугли троугао има један угао од 15° и хипотенузу дужине 4 cm. Колика је површина тог троугла?

***128.** Дијагонала правоугаоника дужине 4 cm гради са једном страницом угао од 22°30′. Колика је површина тог правоугаоника?

***129.** Дат је троугао на слици. Ако је $AB = 2 \cdot AC$ и $AD = 4$ cm, израчунај дужину дужи BC.



***130.** У једнакокраком ΔABC важи $AC = BC = 2 \cdot AB$. Дуж BD је висина која одговара краку AC. Докажи $CD : AD = 7 : 1$. (Помоћ: задатак се може решити помоћу Питагорине теореме или уочавањем подударних троуглова.)

***131.** У правоуглом троуглу дужине катета су a и b, а дужина хипотенузе c. Докажи:

а) $a \cdot a^2 + b \cdot b^2 < c \cdot c^2$;

б) $a^2 \cdot a^2 + b^2 \cdot b^2 < c^2 \cdot c^2$.

Питалице

1.	Висина једнакостраничног троугла странице 2 cm износи $\sqrt{3}$ cm.	Тачно	Нетачно
2.	Троугао за чије странице a, b и c важи $b^2 \geq a^2 + c^2$ није оштроугли.	Тачно	Нетачно
3.	Троугао са страницама дужине $\sqrt{1}, \sqrt{2}$ и $\sqrt{3}$ је правоугли.	Тачно	Нетачно
4.	У квадрату странице a и дијагонале d важи $d^2 = 2a^2$.	Тачно	Нетачно
5.	Разлика обима једнакокрако правоуглог троугла и збира висина једнака је половини хипотенузе.	Тачно	Нетачно
6.	Полупречник описаног круга једнакостраничног троугла је два пута мањи од висине.	Тачно	Нетачно
7.	У правоуглом трапезу разлика квадрата основица једнака је разлици квадрата дијагонала.	Тачно	Нетачно
8.	Збир квадрата дијагонала ромба једнак је збиру квадрата страница.	Тачно	Нетачно
9.	Збир квадрата дијагонала сваког делтоида једнак је збиру квадрата страница.	Тачно	Нетачно
10.	Тачке $A(-1, 3)$ и $B\left(\sqrt{5}, -\sqrt{5}\right)$ подједнако су удаљене од тачке $O(0, 0)$.	Тачно	Нетачно

Предлог теста знања

1. У правоуглом троуглу дужине катета су 8 cm и 15 cm. Дужина хипотенузе је:

а) 18 cm; **б)** 16 cm; **в)** 17 cm; **г)** 19 cm; **д)** 20 cm.

2. Однос углова у троуглу је 1 : 2 : 3. Количник дужина најдуже и најкраће странице је:

а) 2; **б)** $\frac{2\sqrt{3}}{3}$; **в)** $\sqrt{3}$; **г)** 3; **д)** $\frac{1}{2}$.

3. Дијагонала правоугаоника је $d = 10$ cm, а једна од страница је $a = 6$ cm. Ако је друга страница b, тада је $b - a$:

а) 1cm; **б)** 2cm; **в)** –2cm; **г)** –1cm; **д)** $\sqrt{2}$ cm.

4. У квадрату странице 5 производ дијагонала је:

а) $25\sqrt{2}$; **б)** 25; **в)** 50; **г)** 100; **д)** $50\sqrt{2}$.

5. Полупречник описане кружнице једнакостраничног троугла је дужине $3\sqrt{3}$. Обим троугла је:

а) 27; **б)** 18; **в)** 24; **г)** $12\sqrt{3}$; **д)** $9\sqrt{3}$.

6. Дијагонале ромба су дугачке 6 cm и 8 cm. Висина ромба је:

а) 2,4 cm; **б)** 4,8 cm; **в)** 9,6 cm; **г)** 2 cm; **д)** $2\sqrt{3}$ cm.

7. Делтоид са два права угла и страницама дужине 1 и $\sqrt{3}$ има краћу дијагоналу дужине:

а) 1; **б)** 2; **в)** $\sqrt{3}$; **г)** $\sqrt{2}$; **д)** $2\sqrt{2}$.

8. Краћа основица правоуглог трапеза је дужине 2 cm, а дужине дуже основице и дужег крака су једнаке, свака по 5 cm. Површина тог трапеза је:

а) 14 cm^2; **б)** 7 cm^2; **в)** 28 cm^2; **г)** 12 cm^2; **д)** 10 cm^2.

Кључни појмови (обнови пре решавања контролне вежбе)

Питагорина теорема

Обрнута Питагорина теорема

Растојање тачака у координатној равни

Квадрат над хипотенузом

Квадрат над катетом

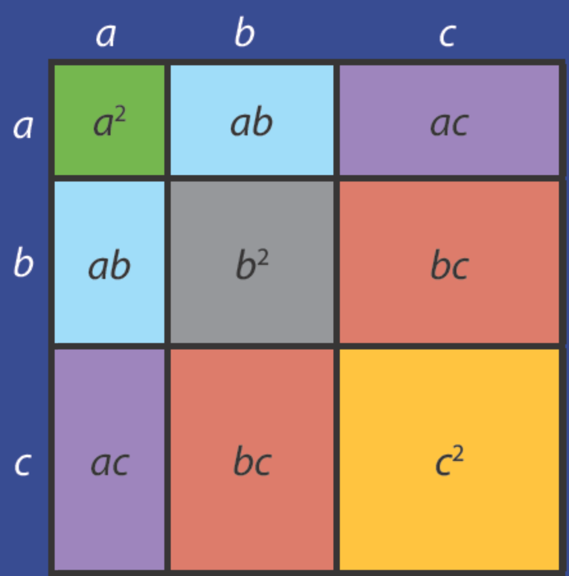
Предлог контролне вежбе

1.1.	Однос углова у троуглу је 1 : 2 : 3. Одреди однос висина троугла.	**15**
1.2.	Однос катета у правоуглом троуглу је 3 : 4. Одреди однос висина троугла.	**20**
1.3.	Однос углова у троуглу је 3 : 4 : 5. Одреди однос висина троугла.	**25**
2.1.	Израчунај површину једнакостраничног троугла чији је обим 1 m.	**15**
2.2.	Једнакостранични троугао састављен је од четири подударна једнакостранична троугла. Ако је полупречник описаног круга великог троугла $2\sqrt{3}$ cm, израчунај површину малог троугла.	**20**
2.3.	У једнакостраничном троуглу ABC страница је дужине 5 cm. Израчунај површину троугла ограниченог страницом AB и висинама из темена A и B.	**25**
3.1.	Израчунај површину једнакокраког трапеза у коме су основице дужине 10 cm и 16 cm, а краци дужине 5 cm.	**15**
3.2.	Израчунај дужину крака једнакокраког трапеза површине 52 cm² и висине 4 cm ако је однос основица 8 : 5.	**20**
3.3.	Израчунај површину једнакокраког трапеза висине 16 cm и дијагонале 65 cm.	**25**
4.1.	Израчунај дужину дужи AB задату тачкама $A(2, 2)$ и $B(6, 5)$.	**15**
4.2.	Израчунај обим троугла ABC задатог тачкама $A(2, 2)$, $B(6, 5)$ и $C(6, 2)$.	**20**
4.3.	Израчунај површину четвороугла $ABCD$ задатог тачкама $A(-5, 1)$, $B(-1, -4)$, $C(3, 1)$ и $D(-1, 6)$.	**25**

3 ЦЕЛИ АЛГЕБАРСКИ ИЗРАЗИ

ЗАНИМЉИВОСТ

Површина квадрата странице $a + b + c$ једнака је збиру површина квадрата страница a, b и c и површина по два правоугаоника страница a и c, b и c, a и b.



$$(a + b + c)^2 = a^2 + b^2 + c^2 + 2ab + 2ac + 2bc$$

3.1. Степеновање природним бројем

Још у претходним разредима, а и у претходним поглављима, сусретали смо се са записивањем производа у облику степена. На пример, када смо рачунали површину квадрата $P = a \cdot a = a^2$, користили смо Питагорину теорему $a^2 + b^2 = c^2$, рачунали запремину коцке $V = a \cdot a \cdot a = a^3$, а исто смо чинили и приликом записивања одговарајућих мерних јединица. Поред тога смо користили и разне друге алгебарске изразе којима смо давали уопштене формуле, на пример за површину правоугаоника ab или у физици за брзину $\frac{s}{t}$ када је у питању равномерно праволинијско кретање. У овом поглављу ћемо се упознати са појмовима степена и целих алгебарских израза, као и са основним операцијама са њима.

ПОДСЕТНИК

За операцију множења реалних бројева важи:

$a \cdot b = b \cdot a$ **комутативност**, чиниоци могу променити места;

$(a \cdot b) \cdot c = a \cdot (b \cdot c)$ **асоцијативност**, чиниоци се могу произвољно груписати.

Нека је $a \in R$ и $n \in N$. Степен реалног броја a природним бројем n, у ознаци a^n, дефинишемо као производ

$$\underbrace{a \cdot a \cdot \ldots \cdot a}_{n \text{ чинилаца}} = a^n.$$

Број a^n назива се **n-ти степен броја** a, број a је **основа** степена, а број n **изложилац** (**експонент**) степена. Сама операција у којој налазимо тражени производ назива се **степеновање**.

Уколико је изложилац $n = 1$, тада пишемо $a^1 = a$.

Лако можемо утврдити да је $0^n = 0$ и $1^n = 1$ за сваки изложилац $n \in N$.

ПРИМЕР 1

Израчунај a^n за $n \in \{1, 2, 3, 4, 5\}$ ако је: **а)** $a = -1$; **б)** $a = 2$; **в)** $a = -2$; **г)** $a = 3$.

Решење:

а) $(-1)^1 = -1$

$(-1)^2 = (-1) \cdot (-1) = 1$

$(-1)^3 = (-1) \cdot (-1) \cdot (-1) = -1$

$(-1)^4 = (-1) \cdot (-1) \cdot (-1) \cdot (-1) = 1$

$(-1)^5 = (-1) \cdot (-1) \cdot (-1) \cdot (-1) \cdot (-1) = -1.$

б) $2^1 = 2$

$2^2 = 2 \cdot 2 = 4$

$2^3 = 2 \cdot 2 \cdot 2 = 8$

$2^4 = 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 = 16$

$2^5 = 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 = 32.$

в) $(-2)^1 = -2$

$(-2)^2 = (-2) \cdot (-2) = 4$

$(-2)^3 = (-2) \cdot (-2) \cdot (-2) = -8$

$(-2)^4 = (-2) \cdot (-2) \cdot (-2) \cdot (-2) = 16$

$(-2)^5 = (-2) \cdot (-2) \cdot (-2) \cdot (-2) \cdot (-2) = -32.$

г) $3^1 = 3$

$3^2 = 3 \cdot 3 = 9$

$3^3 = 3 \cdot 3 \cdot 3 = 27$

$3^4 = 3 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 3 = 81$

$3^5 = 3 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 3 = 243.$

У претходном примеру смо нашли неколико степена броја -1, али лако можемо утврдити и да је $(-1)^n = 1$ за парне вредности n, док је $(-1)^n = -1$ за непарне вредности n, тј. важи:

$$(-1)^n = 1 \quad \text{уколико је изложилац n паран број;}$$

$$(-1)^n = -1 \quad \text{уколико је изложилац n непаран број.}$$

Такође смо могли да приметимо да је нпр. $3^5 = 3\cdot3\cdot3\cdot3\cdot3 = 3^4\cdot3 = 3\cdot3^4$, због асоцијативности множења. Из истог разлога важи и уопштено:

$$a^{n+1} = a^n\cdot a = a\cdot a^n, \qquad \text{за све } a\in R \text{ и } n\in N.$$

пример 2

Израчунај пети степен броја: **а)** $\frac{1}{2}$; **б)** -3; **в)** $\sqrt{2}$; **г)** $\frac{\sqrt{3}}{3}$.

Решење: **а)** $\left(\frac{1}{2}\right)^5 = \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2} = \frac{1}{32}$.

б) $(-3)^5 = (-3)\cdot(-3)\cdot(-3)\cdot(-3)\cdot(-3) = -243$.

в) $\left(\sqrt{2}\right)^5 = \sqrt{2}\cdot\sqrt{2}\cdot\sqrt{2}\cdot\sqrt{2}\cdot\sqrt{2} = \sqrt{32} = 4\sqrt{2}$.

г) $\left(\frac{\sqrt{3}}{3}\right)^5 = \frac{\sqrt{3}}{3}\cdot\frac{\sqrt{3}}{3}\cdot\frac{\sqrt{3}}{3}\cdot\frac{\sqrt{3}}{3}\cdot\frac{\sqrt{3}}{3} = \frac{\sqrt{243}}{243} = \frac{9\sqrt{3}}{243} = \frac{\sqrt{3}}{27}$.

пример 3

Израчунај вредности израза:

а) $\left(\frac{-1}{2}\right)^6 - \left(\frac{-1}{4}\right)^3$; **б)** $\left(\frac{2}{3}\right)^3 - \left(\frac{-\sqrt{3}}{3}\right)^4$; **в)** $(-1)^3 + (-2)^4 + (-2)^5 + 0\cdot(-3)^8$.

Решење:

а) Како је $\left(\frac{-1}{2}\right)^6 = \left(\frac{-1}{2}\right)\cdot\left(\frac{-1}{2}\right)\cdot\left(\frac{-1}{2}\right)\cdot\left(\frac{-1}{2}\right)\cdot\left(\frac{-1}{2}\right)\cdot\left(\frac{-1}{2}\right) = \frac{1}{64}$ и

$\left(\frac{-1}{4}\right)^3 = \left(\frac{-1}{4}\right)\cdot\left(\frac{-1}{4}\right)\cdot\left(\frac{-1}{4}\right) = \frac{-1}{64}$, то је

$$\left(\frac{-1}{2}\right)^6 - \left(\frac{-1}{4}\right)^3 = \frac{1}{64} - \left(\frac{-1}{64}\right) = \frac{1}{32}.$$

б)

$$\left(\frac{2}{3}\right)^3 - \left(\frac{-\sqrt{3}}{3}\right)^4 = \frac{2}{3}\cdot\frac{2}{3}\cdot\frac{2}{3} - \left(\frac{-\sqrt{3}}{3}\right)\cdot\left(\frac{-\sqrt{3}}{3}\right)\cdot\left(\frac{-\sqrt{3}}{3}\right)\cdot\left(\frac{-\sqrt{3}}{3}\right) = \frac{8}{27} - \frac{9}{81} = \frac{8}{27} - \frac{3}{27} = \frac{5}{27}.$$

в) Овде није потребно рачунати $(-3)^8$ јер се тај број множи са 0, па је и њихов производ 0.

Зато је
$$\begin{aligned}(-1)^3 + (-2)^4 + (-2)^5 + 0\cdot(-3)^8 &= (-1)^3 + (-2)^4 + (-2)^5 + 0\\ &= -1 + 16 + (-32) + 0\\ &= -17.\end{aligned}$$

У претходним примерима смо могли уочити једно битно тврђење, које нам говори ког је знака степен у зависности од основе и изложиоца. Оно се заснива на чињеници да је производ бројева истог знака позитиван број, а супротних знакова негативан број.

тврђење

а) Ако је изложилац n паран број, тј. $n=2k$ за неки број $k\in N$ и $a\in R$, тада је

$$a^{2k}\geq 0.$$

При томе је $a^{2k}>0$, за све $a\neq 0$.

б) Ако је изложилац n непаран број, тј. $n=2k-1$ за неки број $k\in N$ и $a\in R$, тада је

$$a^{2k-1}>0 \text{ ако је } a>0;$$
$$a^{2k-1}<0 \text{ ако је } a<0;$$
$$a^{2k-1}=0 \text{ ако је } a=0.$$

пример 4

Одреди знак степена (без рачунања вредности):

а) $(-3)^{26}$; **б)** $\left(\sqrt{113}\right)^{22}$; **в)** $\left(\frac{-7}{9}\right)^{833}$; **г)** $(201)^{31}$; **д)** $(-1\,010\,101)^{232\,323}$.

Решење: а) $(-3)^{26}>0$ јер је 26 паран изложилац;

б) $\left(\sqrt{113}\right)^{22}>0$ јер је паран изложилац (такође $\sqrt{113}>0$, па је и то разлог);

в) $\left(\frac{-7}{9}\right)^{833}<0$ јер је 833 непаран изложилац, а основа негативна;

г) $(201)^{31}>0$ јер је основа $201>0$;

д) $(-1\,010\,101)^{232\,323}<0$ јер је изложилац непаран, а основа негативна.

Приметимо да упоређивањем супротних бројева можемо уочити да за све $a\in R$ важи

$$a^{2n}=(-a)^{2n}, \quad \text{као и}$$
$$(-a)^{2n-1}=-a^{2n-1}, \quad \text{где је } n\in N.$$

пример 5

Који искази су тачни за све вредности $a\in R$:

а) $a^2=(-a)^2$; **б)** $a^2=-a^2$; **в)** $a^3=(-a)^3$; **г)** $-a^5=(-a)^5$?

Решење: Тачни су искази **а** и **г**, а нетачни **б** и **в**.

Нетачност доказујемо тако што налазимо пример броја за који исказ није тачан. Нпр. за $a=1$ је $a^2=1\neq -1=-a^2$, као и $a^3=1\neq -1=(-1)^3=(-a)^3$, па искази **б** и **в** нису тачни.

Такође важе и неке особине које су сличне особинама квадрата бројева.

тврђење

Нека је $n \in N$ и нека је $n > 1$.

Ако је $0 < |a| < 1$, тада је $0 < |a^n| < |a| < 1$.

Ако је $|a| > 1$, тада је $|a^n| > |a| > 1$.

Ако је $|a| < |b|$, тада је $|a^n| < |b^n|$.

пример 6

Упореди степене: **а)** 2^5 и $2{,}1^5$; **б)** $0{,}2^3$ и $|-2|^3$; **в)** $\left(\frac{4}{3}\right)^7$ и 1.

Решење: На основу претходног тврђења важи: **а)** $2^5 < 2{,}1^5$; **б)** $0{,}2^3 < |-2|^3$; **в)** $\left(\frac{4}{3}\right)^7 > 1$.

ЗАДАЦИ

1. Запиши степен код кога је:

а) основа 5, изложилац 3; **б)** основа 2, изложилац 4;

в) основа 6, изложилац 7; **г)** основа 10, изложилац 20.

2. Запиши производе у облику a^b где је b природан број:

а) $2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2$; **б)** $m \cdot m \cdot m$; **в)** $(-1) \cdot (-1) \cdot (-1) \cdot (-1) \cdot (-1)$; **г)** $\underbrace{x \cdot x \cdot \ldots \cdot x}_{100 \text{ чинилаца}}$.

3. Запиши производе у облику степена са изложиоцем који је природан број:

а) $2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 3$; **б)** $a \cdot a \cdot a \cdot b \cdot b \cdot b$; **в)** $a \cdot b \cdot a \cdot b \cdot a \cdot b$; **г)** $a \cdot a \cdot b \cdot b \cdot b \cdot a$.

4. Израчунај вредности степена ако је n природан број:

а) $1^2, 1^3, 1^n, 1^{2n+1}$; **б)** $0^2, 0^3, 0^{2n}, 0^{2n-1}$; **в)** $(-1)^3, (-1)^{2n-1}, (-1)^{2n}, (-1)^{2n+1}$.

5. Запиши број 64 као степен са основом: **а)** 2; **б)** 4; **в)** 8; **г)** 64.

6. Израчунај вредност израза: **а)** $(-1)^{2023} - (-1)^{2024} - (-1)^{2025}$; **б)** $(-1)^{100} \cdot (-1)^{200} - (-1)^{300}$.

7. Израчунај: **а)** 2^3; **б)** $(-3)^3$; **в)** 5^3; **г)** $(-6)^2$.

8. Израчунај: **а)** $0{,}1^2$; **б)** $0{,}1^3$; **в)** $(-0{,}1)^4$; **г)** $(-0{,}1)^5$.

9. Израчунај: **а)** $\left(-1\frac{1}{3}\right)^3$; **б)** $\left(1\frac{1}{2}\right)^4$; **в)** $\left(\sqrt{2}\right)^5$; **г)** $\left(-\sqrt{3}\right)^3$.

10. Попуни кружић ○ тако да исказ буде тачан:

а) $27 = 3^{\bigcirc}$; **б)** $-81 = -3^{\bigcirc}$; **в)** $2^4 = 4^{\bigcirc}$; **г)** $\sqrt{625} = 5^{\bigcirc}$.

11. Провери да ли је исказ тачан:

а) $5^4 - 5^2 = 6 \cdot 10^2$; **б)** $-3^3 - (-3)^3 = 0$; **в)** $7^2 + (-1)^2 = 5^2 \cdot 2$; **г)** $(-2)^5 + 2^5 = (-2)^6$.

12. Поређај од мањег ка већем бројеве: $0{,}1$; $-0{,}1$; $0{,}1^2$; $(-0{,}1)^3$; $-0{,}1^4$; $0{,}1^5$.

3.2. Операције са степенима; степен производа и количника

Нека су x и y степени исте основе, нпр. $x = 2^8$ и $y = 2^5$. Одредимо њихов производ и њихов количник у облику степена исте основе. Производ рачунамо на следећи начин:

$$\begin{aligned} x \cdot y &= 2^8 \cdot 2^5 \\ &= \underbrace{(2\cdot2\cdot2\cdot2\cdot2\cdot2\cdot2\cdot2)}_{8 \text{ чинилаца}} \cdot \underbrace{(2\cdot2\cdot2\cdot2\cdot2)}_{5 \text{ чинилаца}} \\ &= \underbrace{2\cdot2\cdot2\cdot2\cdot2\cdot2\cdot2\cdot2\cdot2\cdot2\cdot2\cdot2\cdot2}_{13 \text{ чинилаца}} \\ &= 2^{13}, \end{aligned}$$

или краће

$$2^8 \cdot 2^5 = 2^{13} = 2^{8+5}.$$

Слично рачунамо и количник:

$$\frac{x}{y} = \frac{2^8}{2^5} = \frac{2\cdot2\cdot2\cdot2\cdot2\cdot2\cdot2\cdot2}{2\cdot2\cdot2\cdot2\cdot2} = 2\cdot2\cdot2 = 2^3,$$

или краће

$$\frac{2^8}{2^5} = 2^3 = 2^{8-5}.$$

На исти начин, ако множимо a^n и a^m $(n, m \in N,\ a \in R)$, добијамо:

$$a^n \cdot a^m = \underbrace{(a\cdot a\cdot \ldots \cdot a)}_{n \text{ чинилаца}} \cdot \underbrace{(a\cdot a\cdot \ldots \cdot a)}_{m \text{ чинилаца}} = \underbrace{a\cdot a\cdot \ldots \cdot a}_{n+m \text{ чинилаца}} = a^{n+m}.$$

Ако делимо a^n са a^m (где $n, m \in N$, $n > m$, $a \in R$, $a \neq 0$), добијамо:

$$\frac{a^n}{a^m} = \frac{\overbrace{a\cdot a\cdot \ldots \cdot a}^{n \text{ чинилаца}}}{\underbrace{a\cdot a\cdot \ldots \cdot a}_{m \text{ чинилаца}}} = \underbrace{a\cdot a\cdot \ldots \cdot a}_{n-m \text{ чинилаца}} = a^{n-m}.$$

Запишимо сада сажето претходне налазе.

тврђење

$a^n \cdot a^m = a^{n+m}$, за све $n, m \in N$, $a \in R$.

$\dfrac{a^n}{a^m} = a^{n-m}$, за све $n, m \in N$ такве да је $n > m$ и све $a \in R$, $a \neq 0$.

Приметимо да смо формулу за дељење могли добити (проверити) и користећи множење:

$$a^{n-m} \cdot a^m = a^{(n-m)+m} = a^n, \quad \text{тј. } a^{n-m} \cdot a^m = a^n, \quad \text{па је одатле } \frac{a^n}{a^m} = a^{n-m}.$$

пример 1

Упрости изразе: **а)** $5^3 \cdot 5^6$; **б)** $5^6 : 5^3$; **в)** $3^3 \cdot 3^8 \cdot 3^{13}$; **г)** $x^{10} \cdot x$;

д) $x^{10} : x$, за $x \neq 0$; **ђ)** $(-x)^3 \cdot (-x)^6 : (-x^4)$, за $x \neq 0$.

Решење: а) $5^3 \cdot 5^6 = 5^{3+6} = 5^9$;

б) $5^6 : 5^3 = 5^{6-3} = 5^3$;

в) $3^3 \cdot 3^8 \cdot 3^{13} = 3^{3+8} \cdot 3^{13} = 3^{(3+8)+13} = 3^{24}$;

г) $x^{10} \cdot x = x^{10} \cdot x^1 = x^{10+1} = x^{11}$;

д) $x^{10} : x = x^{10} : x^1 = x^{10-1} = x^9$;

ђ) $(-x)^3 \cdot (-x)^6 : (-x^4) = (-x)^{3+6} : (-x^4) = (-x)^9 : (-x^4)$

$= -x^9 : (-x^4) = x^9 : x^4 = x^{9-4} = x^5$.

Напомена: Води рачуна о заградама, нпр. $(-x)^4 = x^4 \neq -x^4$, за $x \neq 0$.

До сада смо множили и делили степене исте основе. А како се степенује степен неког броја? Нпр. колико је $(2^8)^5$? По дефиницији је

$$(2^8)^5 = 2^8 \cdot 2^8 \cdot 2^8 \cdot 2^8 \cdot 2^8 = 2^{8+8+8+8+8} = 2^{40} = 2^{8 \cdot 5}.$$

Уопштено, ако $m, n \in N$ и $a \in R$, тада је

$$(a^n)^m = \underbrace{a^n \cdot a^n \cdot \ldots \cdot a^n}_{m \text{ чинилаца}} = a^{\overbrace{n+n \ldots +n}^{m \text{ сабирака}}} = a^{n \cdot m}.$$

Дакле, *m*-ти степен *n*-тог степена броја *a* једнак је степену са основом *a* и изложиоцем који је једнак производу изложилаца *m* и *n*.

тврђење

$$(a^n)^m = a^{n \cdot m}, \quad \text{за све } n, m \in N \text{ и } a \in R.$$

пример 2

Израчунај: **а)** $(2^2)^2$; **б)** $\left[\left(\frac{-1}{2}\right)^3\right]^2$; **в)** $\left[(-1)^3\right]^6 : \left[(-1)^2\right]^3$.

Решење: а) $(2^2)^2 = 2^{2 \cdot 2} = 2^4 = 16$;

б) $\left[\left(\frac{-1}{2}\right)^3\right]^2 = \left(\frac{-1}{2}\right)^{3 \cdot 2} = \left(\frac{-1}{2}\right)^6 = \frac{1}{64}$;

в) $\left[(-1)^3\right]^6 : \left[(-1)^2\right]^3 = (-1)^{3 \cdot 6} : (-1)^{2 \cdot 3} = (-1)^{3 \cdot 6 - 2 \cdot 3} = (-1)^{12} = 1$.

пример 3

Упрости израз $\frac{(x^2)^{10} \cdot (x^4)^5}{(x^5)^7}$, за $x \neq 0$.

Решење: $\frac{(x^2)^{10} \cdot (x^4)^5}{(x^5)^7} = \frac{x^{2 \cdot 10} \cdot x^{4 \cdot 5}}{x^{5 \cdot 7}} = \frac{x^{20} \cdot x^{20}}{x^{35}} = x^{20+20-35} = x^5$.

Понекад је потребно степене довести на исту основу како бисмо могли одредити вредности израза или вредност основе ако знамо колики је изложилац, или обрнуто, како бисмо одредили вредност изложиоца знајући вредност основе.

пример 4

Одреди $n \in N$ ако је: **а)** $0{,}5^n = 0{,}0625$; **б)** $(3^n)^4 = (3^2)^{14}$; **в)** $2^n = (2^2)^3 \cdot 4^6 : 8^4$.

Решење: а) $0{,}0625 = 0{,}5 \cdot 0{,}5 \cdot 0{,}5 \cdot 0{,}5 = 0{,}5^4$, па је $n = 4$;

б) $(3^n)^4 = 3^{4n}$ и $(3^2)^{14} = 3^{28}$, па мора да важи $4n = 28$, тј. $n = 7$;

в) $2^n = (2^2)^3 \cdot 4^6 : 8^4 = 2^6 \cdot (2^2)^6 : (2^3)^4 = 2^6 \cdot 2^{12} : 2^{12} = 2^6$, па је $n = 6$.

На почетку смо множили и делили степене. Одредимо сада колики је степен производа или количника. На пример, одредимо $(2 \cdot 5)^3$ и $\left(\frac{2}{5}\right)^3$ као производ, односно количник степена:

$$(2 \cdot 5)^3 = (2 \cdot 5) \cdot (2 \cdot 5) \cdot (2 \cdot 5) = (2 \cdot 2 \cdot 2) \cdot (5 \cdot 5 \cdot 5) = 2^3 \cdot 5^3;$$

$$\left(\frac{2}{5}\right)^3 = \frac{2}{5} \cdot \frac{2}{5} \cdot \frac{2}{5} = \frac{2 \cdot 2 \cdot 2}{5 \cdot 5 \cdot 5} = \frac{2^3}{5^3}.$$

На исти начин можемо уопштити n-ти степен производа или количника бројева a и b користећи комутативност и асоцијативност множења ($a, b \in R$, $n \in N$):

$$(a \cdot b)^n = \underbrace{(a \cdot b) \cdot (a \cdot b) \cdot \ldots \cdot (a \cdot b)}_{n \text{ чинилаца (заграда)}} = \underbrace{(a \cdot a \cdot \ldots \cdot a)}_{n \text{ чинилаца}} \cdot \underbrace{(b \cdot b \cdot \ldots \cdot b)}_{n \text{ чинилаца}} = a^n \cdot b^n,$$

$$\left(\frac{a}{b}\right)^n = \underbrace{\frac{a}{b} \cdot \frac{a}{b} \cdot \ldots \cdot \frac{a}{b}}_{n \text{ чинилаца}} = \frac{\overbrace{a \cdot a \cdot \ldots \cdot a}^{n \text{ чинилаца}}}{\underbrace{b \cdot b \cdot \ldots \cdot b}_{n \text{ чинилаца}}} = \frac{a^n}{b^n}, \quad \text{за } b \neq 0.$$

тврђење

Ако $n \in N$, имамо: $(a \cdot b)^n = a^n \cdot b^n$, за $a, b \in R$;

$$\left(\frac{a}{b}\right)^n = \frac{a^n}{b^n}, \quad \text{за } a, b \in R \text{ уз услов } b \neq 0.$$

Приметимо да, уколико степенујемо производ више чинилаца, добијамо сличну формулу: $(a_1 \cdot a_2 \cdot \ldots \cdot a_k)^n = a_1^n \cdot a_2^n \cdot \ldots \cdot a_k^n$, где $k, n \in N$ и $a_1, a_2, \ldots, a_k \in R$.

пример 5

Израчунај: **а)** $2^5 \cdot 3^5$; **б)** $(-3)^3 \cdot 4^3$; **в)** $\left(\frac{-8}{5}\right)^4 \cdot \left(\frac{-1}{16}\right)^4$; **г)** $\left(\frac{3}{4}\right)^6 \cdot (-8)^6 : (-6)^6$;

д) $(-0{,}375)^5 : \left(-1\frac{5}{16}\right)^5 \cdot \left(1\frac{1}{6}\right)^5$.

Решење: а) $2^5 \cdot 3^5 = (2 \cdot 3)^5 = 6^5 = 7\,776$; **б)** $(-3)^3 \cdot 4^3 = (-3 \cdot 4)^3 = (-12)^3 = -1728$;

в) $\left(\frac{-8}{5}\right)^4 \cdot \left(\frac{-1}{16}\right)^4 = \left[\frac{-8}{5} \cdot \left(\frac{-1}{16}\right)\right]^4 = \left(\frac{1}{10}\right)^4 = \frac{1}{10\,000}$;

г) $\left(\frac{3}{4}\right)^6 \cdot (-8)^6 : (-6)^6 = \left[\frac{3}{4} \cdot (-8) : (-6)\right]^6 = 1^6 = 1$;

д) $(-0{,}375)^5 : \left(-1\frac{5}{16}\right)^5 \cdot \left(1\frac{1}{6}\right)^5 = \left[-0{,}375 : \left(-1\frac{5}{16}\right) \cdot \left(1\frac{1}{6}\right)\right]^5$

$$= \left[\frac{-3}{8} : \left(\frac{-21}{16}\right) \cdot \frac{7}{6}\right]^5 = \left(\frac{1}{3}\right)^5 = \frac{1}{243}.$$

Понекад степене прво морамо другачије записати како бисмо лакше записали или израчунали изразе.

пример 6

Израчунај: **а)** $(-0{,}2)^{30}\cdot 25^{12}\cdot 0{,}25^3$; **б)** $\dfrac{8^{2n+3}\cdot 4^{n+2}}{16^{2n+3}}$.

Решење:

а) $(-0{,}2)^{30}\cdot 25^{12}\cdot 0{,}25^3=\left[(-0{,}2)^5\right]^6\cdot\left(25^2\right)^6\cdot\left(0{,}5^2\right)^3=\left[(-0{,}2)^5\cdot 25^2\cdot 0{,}5\right]^6$

$$=(-0{,}00032\cdot 625\cdot 0{,}5)^6=0{,}1^6=0{,}000001;$$

б) $\dfrac{8^{2n+3}\cdot 4^{n+2}}{16^{2n+3}}=\dfrac{\left(2^3\right)^{2n+3}\cdot\left(2^2\right)^{n+2}}{\left(2^4\right)^{2n+3}}=\dfrac{2^{6n+9}\cdot 2^{2n+4}}{2^{8n+12}}=2^{(6n+9)+(2n+4)-(8n+12)}=2^1=2.$

До сада нисмо спомињали збир или разлику степена јер се могу сабирати само степени са истом основом и истим изложиоцем. Тако је $a^n+2a^n=3a^n$ јер због дистрибутивности имамо да важи $a^n+2a^n=1\cdot a^n+2\cdot a^n=(1+2)\cdot a^n=3\cdot a^n$. Степени са различитим основама или изложиоцима не могу се лако сабирати, осим у специјалним ситуацијама, када се могу довести на облик погодан за сабирање, као што је, рецимо:

$$3^4+3^5=1\cdot 3^4+3\cdot 3^4=4\cdot 3^4 \quad \text{или} \quad 2^8+4^4=2^8+\left(2^2\right)^4=2^8+2^8=2\cdot 2^8=2^9.$$

Више речи о томе биће у следећим лекцијама, када будемо говорили о растављању полинома на чиниоце.

ЗАДАЦИ

13. Упрости производе: **а)** $2^2\cdot 2^3$; **б)** $3^5\cdot 3^5$; **в)** $5^7\cdot 5^{13}$; **г)** $7^4\cdot 7^8$;
д) $a^2\cdot a^5$; **ђ)** $b^{10}\cdot b^{20}$; **е)** $c^{100}\cdot c^{11}$; **ж)** $d^{17}\cdot d^{22}$.

14. Упрости производе:

а) $\left(\dfrac{1}{3}\right)^2\cdot\left(\dfrac{1}{3}\right)^8$; **б)** $0{,}25^5\cdot 0{,}25^{10}$; **в)** $\left(3\dfrac{3}{5}\right)^6\cdot\left(3\dfrac{3}{5}\right)^7$; **г)** $\left(\sqrt{3}\right)^3\cdot\left(\sqrt{3}\right)^5$.

15. Упрости производе: **а)** $a^2\cdot a^3\cdot a^4$; **б)** $b\cdot b^5\cdot b\cdot b^3$; **в)** $c^2\cdot(-c)\cdot c^3\cdot(-c)$.

16. Упрости производе: **а)** $2\cdot a^2\cdot 3\cdot a^3$; **б)** $9\cdot b^5\cdot 3\cdot b^3$; **в)** $c^2\cdot d^3\cdot c^4\cdot d^5$.

17. Упрости количнике ($a,b,c,d\neq 0$):

а) $2^3:2^2$; **б)** $3^6:3^5$; **в)** $5^{13}:5^7$; **г)** $7^8:7^4$;
д) $a^5:a^2$; **ђ)** $b^{20}:b^{10}$; **е)** $c^{100}:c^{11}$; **ж)** $d^{22}:d^{17}$.

18. Упрости количнике: **а)** $\left(\dfrac{1}{3}\right)^8:\left(\dfrac{1}{3}\right)^2$; **б)** $0{,}25^{10}:0{,}25^5$; **в)** $\left(3\dfrac{3}{5}\right)^7:\left(3\dfrac{3}{5}\right)^6$; **г)** $\left(\sqrt{3}\right)^5:\left(\sqrt{3}\right)^3$.

19. Степенуј производе:

а) $(ab)^3$; **б)** $(ab)^5$; **в)** $(2ab)^8$; **г)** $\left(\dfrac{1}{2}ab\right)^4$; **д)** $(-2abc)^3$; **ђ)** $(abcd)^5$.

20. Степенуј количнике ($b,c,d\neq 0$):

а) $\left(\dfrac{a}{b}\right)^3$; **б)** $\left(\dfrac{a}{b}\right)^5$; **в)** $\left(\dfrac{2a}{b}\right)^8$; **г)** $\left(\dfrac{a}{2b}\right)^4$; **д)** $\left(\dfrac{-2a}{bc}\right)^3$; **ђ)** $\left(\dfrac{ab}{cd}\right)^2$.

3.3. Степеновање декадне јединице целим бројем

У млађим разредима смо природне бројеве записивали користећи декадне јединице, нпр. $8562 = 8 \cdot 1000 + 5 \cdot 100 + 6 \cdot 10 + 2 \cdot 1$, али сада знамо да су $10 = 10^1$, $100 = 10^2$, $1000 = 10^3$ степени броја 10. Често и у свакодневном говору користимо префиксоиде да означимо степене броја 10, нпр. у рецептима за спремање јела можемо прочитати: „сипати један декаграм прашка за пециво". Декаграм добијамо када на мерну јединицу „грам" додамо префиксоид „дека", који означава $10 = 10^1$ грама.

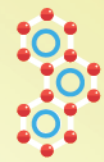
У природним наукама срећемо неке бројеве у чијем запису се (ради једноставности) користе степени броја 10 (такозвани научни запис). У примеру Авогадрове константе користи се степеновање броја 10 природним бројем 23, али у примеру гравитационе константе појављује се негативан степен 10^{-11}. Природно је запитати се колика је та вредност и колико је уопште 10^n, али за све вредности $n \in Z$.

Физика:
гравитациона константа

$$6{,}67 \cdot 10^{-11} \frac{\mathrm{Nm}^2}{\mathrm{kg}^2}.$$

Хемија:
Авогадрова константа

$$6{,}022 \cdot 10^{23} \frac{1}{\mathrm{mol}}.$$



Степеновање природним бројем смо већ дефинисали. Знамо да је $10^1 = 10$, $10^2 = 100$, $10^3 = 1000$, $10^4 = 10\,000$, $10^5 = 100\,000$ итд. Можемо уочити да је број нула једнак изложиоцу степена:

$$10^n = 1\underbrace{000\ldots0}_{n \text{ нула}}, \quad \text{за } n \in N.$$

Ако желимо да проширимо скуп у коме се може налазити изложилац, придржаваћемо се принципа да особине које су важиле када је изложилац био природан важе и када је изложилац цео број. Тако, ако се у особини $\frac{10^n}{10^m} = 10^{n-m}$ ослободимо захтева да је $n > m$, у случају да је $n = m$ добијамо: $1 = \frac{10^n}{10^n} = 10^{n-n} = 10^0$. Дакле, $10^0 = 1$. Сада број 8 562 можемо записати у облику

$$8562 = 8 \cdot 10^3 + 5 \cdot 10^2 + 6 \cdot 10^1 + 2 \cdot 10^0.$$

Када је у питању негативан изложилац, добијамо:

$$10^{-n} = 10^{0-n} = \frac{10^0}{10^n} = \frac{1}{10^n}, \quad \text{где } n \in N.$$

Уочимо да је број децимала иза запете једнак апсолутној вредности изложиоца, тј.

$$10^{-n} = \frac{1}{10^n} = 0{,}\underbrace{000\ldots01}_{n \text{ цифара}}; \quad \text{где } n \in N.$$

$$10^{-1} = \frac{1}{10^1} = \frac{1}{10} = 0{,}1;$$

$$10^{-2} = \frac{1}{10^2} = \frac{1}{100} = 0{,}01;$$

$$10^{-3} = \frac{1}{10^3} = \frac{1}{1000} = 0{,}001;$$

$$10^{-4} = \frac{1}{10^4} = \frac{1}{10\,000} = 0{,}0001 \text{ итд.}$$

пример 1

Запиши број 12,345 у облику збира производа његових цифара и степена броја 10.

Решење: $12{,}345 = 1 \cdot 10^1 + 2 \cdot 10^0 + 3 \cdot 10^{-1} + 4 \cdot 10^{-2} + 5 \cdot 10^{-3}$.

пример 2

Израчунај: **а)** $10^5 \cdot 10^{-3}$; **б)** $10^4 : 10^5$; **в)** $10^{-2} \cdot 10^{-3}$; **г)** $10^{-1} \cdot 10^{-2} : 10^{-3}$.

Решење: а) $10^5 \cdot 10^{-3} = 10^{5+(-3)} = 10^2 = 100$;

б) $10^4 : 10^5 = 10^{4-5} = 10^{-1} = 0{,}1$;

в) $10^{-2} \cdot 10^{-3} = 10^{-2+(-3)} = 10^{-5} = 0{,}00001$;

г) $10^{-1} \cdot 10^{-2} : 10^{-3} = 10^{-1+(-2)-(-3)} = 10^0 = 1$.

Степене броја 10 користимо за записивање такозваних великих и малих бројева. Велики су бројеви у чијем запису користимо позитиван степен броја 10, нпр.

$$8\,000\,000 = 8 \cdot 1\,000\,000 = 8 \cdot 10^6 \text{ или } 11\,000\,000\,000 = 1{,}1 \cdot 10\,000\,000\,000 = 1{,}1 \cdot 10^{10},$$

а мали су бројеви у чијем запису користимо негативан степен броја 10, нпр.

$$0{,}0000008 = 8 \cdot 0{,}0000001 = 8 \cdot 10^{-7} \text{ или } 0{,}000000011 = 1{,}1 \cdot 0{,}00000001 = 1{,}1 \cdot 10^{-8}.$$

Сваки од бројева смо записали у облику $a \cdot 10^n$, где је $1 \le a < 10$ и $n \in Z$. Такав запис назива се **научни (стандардни) запис** бројева. Калкулатори користе такав запис.

пример 3

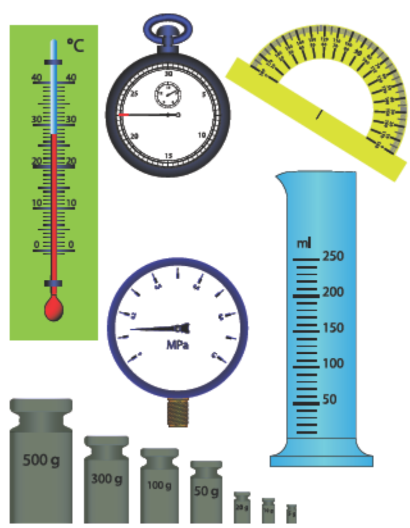
Преведи следеће бројеве у научни запис: **а)** 80 203 000; **б)** 0,000000089.

Решење: а) $80\,203\,000 = 8{,}0203 \cdot 10\,000\,000 = 8{,}0203 \cdot 10^7$;

б) $0{,}000000089 = 8{,}9 \cdot 0{,}00000001 = 8{,}9 \cdot 10^{-8}$.

Раније смо споменули да се користе и префиксоиди уз мерне јединице (нпр. декаграм). Они су такође повезани са степенима броја 10. У следећој табели можемо видети неке од префиксоида који се користе уз јединице SI-система и колика је њихова вредност.

Префиксоиди	Ознака	Вредност	Назив
деци	d	10^{-1}	десети део (десетина)
центи	c	10^{-2}	стоти део (стотина)
мили	m	10^{-3}	хиљадити део (хиљадитина)
микро	μ	10^{-6}	милионити део
нано	n	10^{-9}	милијардити део
пико	p	10^{-12}	билионити део
дека	da	10^{1}	десет
хекто	h	10^{2}	сто
кило	k	10^{3}	хиљаду
мега	M	10^{6}	милион
гига	G	10^{9}	милијарда
тера	T	10^{12}	билион



Домаћи задатак: Истражи којим јединицама се записују величине атома, честице у ваздуху, меморија телефона или рачунара, резолуција камере телефона. Запиши неке од тих вредности у научном облику. Пронађи још неке префиксоиде декадних јединица који се користе, као и њихове вредности.

пример 4

Преведи следеће величине у научни запис: **а)** 3670 km; **б)** 15 ns; **в)** 0,14 cm. Изрази решење у метрима, односно у секундама.

Решење: **а)** $3670\ \text{km} = 3670 \cdot 10^3\ \text{m} = (3{,}67 \cdot 10^3) \cdot 10^3\ \text{m} = 3{,}67 \cdot 10^6\ \text{m}$;

б) $15\ \text{ns} = 15 \cdot 10^{-9}\ \text{s} = (1{,}5 \cdot 10^1) \cdot 10^{-9}\ \text{s} = 1{,}5 \cdot 10^{-8}\ \text{s}$;

в) $0{,}14\ \text{cm} = 0{,}14 \cdot 10^{-2}\ \text{m} = (1{,}4 \cdot 10^{-1}) \cdot 10^{-2}\ \text{m} = 1{,}4 \cdot 10^{-3}\ \text{m}$.

ЗАДАЦИ

21. Изрази број у облику степена броја 10:

а) 1000; **б)** 1 000 000; **в)** $1000 \cdot 1000 \cdot 1000$; **г)** 10 милијарди;

д) 0,1; **ђ)** 0,0001; **е)** $\frac{1}{100}$; **ж)** $\frac{1}{1000}$.

22. У облику децималног броја напиши:

а) 10^{-3}; **б)** $\frac{1}{10^5}$; **в)** $\frac{1}{10^4}$; **г)** 10^{-6}.

23. Запиши бројеве у научном запису:

а) 123 000; **б)** 123 000 000; **в)** $123 \cdot 10^{10}$; **г)** $12{,}3 \cdot 10^5$.

24. Запиши бројеве у научном запису:

а) број литара воде у пуном базену димензија 5 m x 10 m x 2 m;

б) број плочица квадратног облика странице 2 cm потребних за поплочавање трга површине три хектара;

в) број минута у миленијуму (користи да једна година има 365 дана).

25. Колико цифара има број $10^0 + 10^1 + \ldots + 10^{100}$?

26. Запиши бројеве у научном запису:

а) 0,123; **б)** 0,000123; **в)** $\frac{12{,}3}{10^5}$; **г)** $123\,000 \cdot 10^{-10}$.

27. Запиши бројеве у научном запису:

а) $5{,}5 \cdot 10^3 + 4{,}7 \cdot 10^3$; **б)** $5{,}67 \cdot 10^7 - 170 \cdot 10^4$;

в) $72 \cdot 10^{-5} + 3{,}1 \cdot 10^{-4}$; **г)** $\frac{101}{10^{100}} - 0{,}99 \cdot 10^{-98}$.

28. Преведи следеће величине у научни запис:

а) 12 345 kg; **б)** 111,111 nm; **в)** 54,321 Ms; **г)** 0,0123 ps.

Алгебарски изрази; бројевна вредност израза 3.4.

Током досадашњег школовања често сте се сусретали како са бројевним изразима, тако и са алгебарским изразима. Бројевни израз чине бројеви повезани знацима операција. На пример, бројевни изрази су:

$$\frac{1-2\cdot 3}{4}; \qquad \left(\frac{-1}{2}\right):0{,}1^3; \qquad 5^2-\sqrt{3}:\left(\sqrt{6}-1\right).$$

Степеновање је множење више истих вредности, па је степен неког броја такође бројевни израз.

Како се често трудимо да уопштимо неке појмове и да их запишемо користећи формуле, уобичајено је да користимо и неке променљиве као уопштеније ознаке уместо бројева. У том случају, уколико бројеве и променљиве повежемо операцијама, добијамо алгебарске изразе. Такви су, на пример:

$$x\cdot y; \qquad 2\cdot x; \qquad x+y-\frac{3+x}{a}; \qquad \frac{2x-3b}{a-2x}+(a+1)(a+2); \qquad \sqrt{x}\,.$$

Приметимо да нам заграде служе да промене редослед рачунских операција, те су и оне дозвољене.

пример 1

Формирај алгебарски израз у ком ћеш троструки количник израза x и $2y^2$ умањити за петоструки збир израза $-x^2$ и y^3.

Решење: Алгебарски израз који добијамо је $3\cdot\frac{x}{2y^2}-5\cdot\left(-x^2+y^3\right)$.

пример 2

Формирај израз којим се рачуна површина правоугаоника ако су странице правоугаоника a и $a+2$.

Решење: Површина је $a\cdot(a+2)$.

Уколико се у изразима јављају само операције сабирања, одузимања, множења и дељења, тј. само рационалне операције (као у претходна два примера), такав израз назива се **рационални алгебарски израз**.

Симболи реалних бројева и симболи променљивих су **рационални алгебарски изрази**. Ако су A и B рационални алгебарски изрази, онда су изрази облика

$$A+B \qquad A-B \qquad A\cdot B \qquad \frac{A}{B}$$

такође **рационални алгебарски изрази**.

Примери рационалних алгебарских израза су

$$1+a; \qquad \sqrt{3}; \qquad (x+y)(a+b); \qquad \frac{a+b}{a-b}; \qquad \frac{x^3+8}{x^3-y^3}.$$

Примери израза који нису рационални алгебарски изрази су

$$a+\sqrt{a}; \qquad \sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)}; \qquad |y|; \qquad 3-|3+x|.$$

Бројевна вредност израза је вредност коју добијамо када у алгебарском изразу свакој променљивој доделимо неку вредност (неки реалан број) и обавимо све операције у изразу.

Наравно, приликом доделе вредности свакој променљивој морамо водити рачуна да све операције можемо извести. Специјално, када је реч о рационалним алгебарским изразима, морамо водити рачуна да се у изразима са дељењем не деси да делилац буде једнак нули.

пример 3

Ако је $x=-2$ и $y=-1$, израчунај бројевну вредност израза:

а) $\frac{x+1}{y+2}$; **б)** $\frac{x:y+y:x}{x-y}$; **в)** $\frac{x^2+2xy+y^2}{x^3+3x^2y+3xy^2+y^3}$.

Решење: а) $\frac{-2+1}{-1+2}=\frac{-1}{1}=-1$;

б) $\frac{-2:(-1)+(-1):(-2)}{(-2)-(-1)}=\frac{2+0{,}5}{-1}=-2{,}5$;

в) $\frac{(-2)^2+2(-2)(-1)+(-1)^2}{(-2)^3+3(-2)^2(-1)+3(-2)(-1)^2+(-1)^3}=\frac{4+4+1}{-8-12-6-1}=\frac{9}{-27}=-\frac{1}{3}$.

ЗАДАЦИ

29. Запиши изразе: **а)** производ броја a и броја два пута мањег од броја b; **б)** збир бројева $3a$ и $2b$; **в)** количник броја a и корена броја b (за $b>0$); **г)** разлика броја a и реципрочне вредности броја b (за $b\neq 0$).

30. Запиши изразе:

а) производ разлике квадрата бројева a и b и квадрата разлике бројева a и b;

б) производ збира квадрата бројева a и b и квадрата збира бројева a и b;

в) производ куба разлике бројева a и b и разлике кубова бројева a и b;

г) производ куба збира бројева a и b и збира кубова бројева a и b.

31. Ако је $x=\frac{1}{2}$, израчунај вредност израза: **а)** $x-\frac{3}{2}$; **б)** $\left(-x-\frac{1}{2}\right)^5$; **в)** $\frac{4}{3}x+\frac{1}{3}$; **г)** $8x^2+6$.

32. Израчунај вредност израза: **а)** $-3xy$ ако је $x=-1$ и $y=-\frac{1}{3}$; **б)** $2x^3$ ако је $x=-1$; **в)** $\frac{-x^2}{2y^3}$ ако је $x=-1$ и $y=\frac{1}{2}$; **г)** $\frac{x+y}{x-y}$, ако је $x=\frac{1}{2}$ и $y=\frac{1}{3}$.

33. Израчунај вредност израза:

а) $(x-3)(x+3)$ ако је $x=\frac{3}{2}$;

б) $2(y-1)(y^2+1)$ ако је $y=-3$;

в) $\frac{(x+1)(y+1)}{(x-1)(y-1)}$ ако је $x=1{,}5$ и $y=2$;

г) $\frac{x^2+4x+3}{x+3}$ ако је $x=0{,}75$.

Полиноми; операције са полиномима 3.5.

Међу рационалним алгебарским изразима због свог значаја се посебно издвајају цели алгебарски изрази, које називамо и полиномима.

Полином (цели алгебарски израз) је рационални алгебарски израз у коме не учествује дељење изразом који садржи променљиву (непознату величину).

Дакле, константе (бројеви) и променљиве су полиноми, али полином је и било који израз облика $A+B$, $A-B$ или $A\cdot B$, где су A и B полиноми. Дељење може да се јави само у оквиру бројева.

Тако су следећи изрази полиноми: $3x$; $x+y^2$; $\frac{1}{2}+\frac{1}{3}x$; $\frac{\sqrt{3}}{2}x+4a^2+2xy-\frac{1}{8}b^5$.

Међутим, следећи изрази нису полиноми: $\frac{x+1}{x}$; $1+\frac{1+a^2}{x}$; $x^2+a^2-\frac{1}{x^2+a^2}$.

Неки полиноми имају специјалне називе. То су мономи, биноми и триноми.

ЗАНИМЉИВОСТ

Назив полином је настао од грчких речи *poly*, што значи „више” и *nimos*, што значи „име, назив” (πολυώνυμος, *polyónymos*). Слично је и за мономе, биноме и триноме, где су „мо-”, „би-”, „три-” изведенице од грчких или латинских речи *monos, bis, trias*, а означавају из колико делова се састоји полином (једног, два, односно три).

Моном је полином у коме нема ни сабирања, ни одузимања. Дакле, то је израз који чине константе или променљиве, али и њихови производи. Тако можемо приметити да су мономи 5, x, $3x$, $\frac{-1}{2}a^2b^3c$, али да $5+x$, $2-y$, $\frac{1}{2}x-\frac{1}{5}a^2$ нису.

Коефицијент монома је бројевна константа која се јавља у моному, а **степен монома** је збир изложилаца променљивих које учествују у моному.

ПРИМЕР 1

Одреди коефицијент и степен монома: **а)** 5; **б)** x; **в)** $3x$; **г)** $\frac{-1}{2}a^2b^3c$; **д)** xya^2.

Решење: а) Коефицијент је 5, а степен је 0 јер нема променљивих.

б) Коефицијент је 1 јер је $x=1\cdot x$, а и степен је 1 јер се јавља једна променљива x.

в) Коефицијент је 3 јер је $3x=3\cdot x$, а степен је 1.

г) Коефицијент је $\frac{-1}{2}$, а степен је 6 јер је $\frac{-1}{2}a^2b^3c=\frac{-1}{2}\cdot\overbrace{a\cdot a\cdot b\cdot b\cdot b\cdot c}^{\text{6 чинилаца}}$.

д) Коефицијент је 1, а степен је 4 јер је $xya^2=1\cdot x\cdot y\cdot a\cdot a$.

Уколико се мономи разликују само у коефицијенту или се не разликују, кажемо да су мономи **слични**.

На пример, $4a$ и $2a$ су слични; ab и $5ab$ су слични; $2x^2yz$ и $\sqrt{2}x^2yz$ су слични;

али $4a$ и $2a^2$ нису слични; ab и $5b$ нису слични; $2x^2yz$ и $\sqrt{2}xy^2z$ нису слични.

Супротни мономи су слични мономи чији коефицијенти су супротни бројеви. Тако имамо да је моному x^2 супротан моном $-x^2$, моному $5ab$ је супротан моном $-5ab$, а моному $\sqrt{2}x^2yz$ супротан је $-\sqrt{2}x^2yz$.

пример 2

У скупу монома $M=\left\{15, \frac{1}{2}xy, -2x^2y^2, \sqrt{3}, \frac{1}{8}x^2y^2, 3xy, -x^2y^2, 2x^2, -xy\right\}$ одреди сличне мономе, а затим за нека три монома из скупа M одреди њима супротне мономе.

Решење: Слични су: 15 и $\sqrt{3}$; $\frac{1}{2}xy$, $3xy$ и $-xy$; $-2x^2y^2$, $\frac{1}{8}x^2y^2$ и $-x^2y^2$.

Моному 15 супротан је -15; моному $\frac{1}{2}xy$ супротан је $\frac{-1}{2}xy$; моному $-2x^2y^2$ супротан је $2x^2y^2$.

Бином представља збир (или разлику) два неслична монома, а **трином** представља збир (или разлику) три међусобно неслична монома.

Примери бинома: $a+b$; $a-b$; $4x^2-y^2$; $3x^2+x^2y$; $56-11x^6$.

Примери тринома: $1+x+x^2$; ax^2-p-4q; $4x^3+2xy-1$; $a+b+c$; $1+y+x^6$.

Приметимо да $4a+a$ није бином јер су $4a$ и a слични мономи. Такође, $4a+a+4$ није трином из истог разлога.

пример 3

Од монома 1, $2x$ и $3x^2$ образуј по пет бинома и тринома.

Решење: Примери пет бинома: $1+2x$; $1+3x^2$; $3x^2+2x$; $1-2x$; $1-3x^2$.

Примери пет тринома: $1+2x+3x^2$; $1-2x+3x^2$; $3x^2+2x-1$; $1-2x-3x^2$; $1+2x-3x^2$.

пример 4

Одреди вредности бинома $4x^2-a$ и тринома $x+a-2a^2$ ако је $x=-1$ и $a=-2$.

Решење: Вредност бинома је $4\cdot(-1)^2-(-2)=4+2=6$,
а тринома $-1+(-2)-2\cdot(-2)^2=-1-2-8=-11$.

Полиноми представљају збирове монома, па се **супротан полином** датом полиному добија као збир монома супротних мономима у датом полиному. Ако са P означимо дати полином, супротан ћемо означити са $-P$.

Тако је датом полиному $P=5a-3x^2+4$ супротан полином $-P=-5a+3x^2-4$.

пример 5

За дате полиноме одреди супротне:

а) $3x^8$; б) $a-2xy+4x^5$; в) $-3a+4ab+b^2-2b^3$.

Решење: а) $-3x^8$; б) $-a+2xy-4x^5$; в) $3a-4ab-b^2+2b^3$.

Како вредности променљивих у полиномима замењујемо реалним бројевима (ради рачунања вредности полинома), природно је да и међу полиномима уведемо сабирање, одузимање и множење. Слични мономи се сабирају тако што се саберу њихови коефицијенти. На тај начин користимо закон дистрибутивности. Погледајмо пример.

пример 6

Одреди збирове датих монома: **а)** a и $4a$; **б)** $3x^2$ и $-8x^2$; **в)** $\frac{1}{2}ab^2c^3$ и $\frac{1}{3}ab^2c^3$.

Решење: а) $a+4a=1\cdot a+4\cdot a=(1+4)\cdot a=5a$;

б) $3x^2+(-8x^2)=[3+(-8)]\cdot x^2=-5x^2$;

в) $\frac{1}{2}ab^2c^3+\frac{1}{3}ab^2c^3=\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{3}\right)\cdot ab^2c^3=\frac{5}{6}ab^2c^3$.

Полиноми представљају збирове монома, па се полиноми сабирају тако што се сабирају одговарајући мономи. При томе користимо закон асоцијативности да групишемо сличне мономе како бисмо их лакше сабрали.

пример 7

Одреди збир датих полинома: **а)** x^2+2x+3 и $-3x^2+x-2$;

б) $2x^4+xy^2-y^2+x+2y$ и $3x^2y+3xy^2+2y^2+2y+2x$.

Решење: а) $(x^2+2x+3)+(-3x^2+x-2)=\left[x^2+(-3x^2)\right]+(2x+x)+\left[3+(-2)\right]$

$=-2x^2+3x+1$;

б) $(2x^4+xy^2-y^2+x+2y)+(3x^2y+3xy^2+2y^2+2y+2x)=$

$=2x^4+3x^2y+(xy^2+3xy^2)+(-y^2+2y^2)+(x+2x)+(2y+2y)=$

$=2x^4+3x^2y+4xy^2+y^2+3x+4y$.

Одузимање полинома можемо дефинисати као сабирање са супротним полиномом, тј. ако су P и Q полиноми, тада је $P-Q=P+(-Q)$, где је полином $-Q$ супротан полиному Q.

пример 8

Одредити разлику полинома P и Q ако је:

а) $P=2x^3-x^2+x+1$ и $Q=3x^3+x^2+2$;

б) $P=3x^2y+2xy-y+\sqrt{2}$ и $Q=2x^2-y+\sqrt{2}$;

в) $P=x^5+x^3+x+2$ и $Q=2x^4+x^3+2x^2+2$.

Решење: а) $P-Q=(2x^3-x^2+x+1)-(3x^3+x^2+2)$

$=(2x^3-x^2+x+1)+(-3x^3-x^2-2)=-x^3-2x^2+x-1$;

б) $P-Q=\left(3x^2y+2xy-y+\sqrt{2}\right)-\left(2x^2-y+\sqrt{2}\right)$

$=\left(3x^2y+2xy-y+\sqrt{2}\right)+\left(-2x^2+y-\sqrt{2}\right)=3x^2y+2xy-2x^2$;

в) $P-Q=(x^5+x^3+x+2)-(2x^4+x^3+2x^2+2)$

$=(x^5+x^3+x+2)+(-2x^4-x^3-2x^2-2)=x^5-2x^4-2x^2+x$.

У претходном примеру су сви полиноми (и P и Q и $P-Q$) записани у сређеном облику, тј. сваки је записан као збир међусобно несличних монома. Уколико полином није дат у сређеном облику, сабирањем сличних монома га можемо написати у сређеном облику. На пример, полином $2x^4+3y^2-xy+4xy-y^2+x^4+3$ није записан у сређеном облику, али сабирањем сличних монома доводимо га у сређени облик $3x^4+2y^2+3xy+3$.

Приликом сређивања полинома често се води рачуна и о степенима несличних монома, па се редослед сабирака (монома) бира тако да је сваки следећи сабирак истог или мањег степена, нпр.

$$3x^4+2y^2+3xy+3$$

или да је сваки следећи сабирак истог или већег степена, нпр.

$$3+2y^2+3xy+3x^4.$$

Највећи степен од свих монома који учествују у полиному назива се степен полинома. На пример:

степен полинома $P=7$ је 0;

степен полинома $Q=2x^3-x^2+x+1$ је 3;

степен полинома $R=3x^4+2y^2+3xy+3$ је 4;

степен полинома $S=7x^3+5x^2y^3+72xy^3z^4$ је 8.

Уколико је полином константа различита од нуле, степен је 0, а ако је полином константа 0 (тај полином називамо **нула полиномом**), за њега се степен не дефинише. Дакле,

степен нула полинома $O=0$ се не дефинише.

пример 9

Одреди степене следећих полинома:

а) $2x-1$; **б)** 4; **в)** $-3x^{23}+23x^3$; **г)** x^4+x^3-x-1; **д)** $4x^2y^3-x^3y+x$.

Решење: а) 1; **б)** 0; **в)** 23; **г)** 4; **д)** 5.

пример 10

За дате полиноме $P=x^5-x^4+4x^3+3x^2+2$ и $Q=-x^5-x^4-x^3+3x^2+2x$ одреди $P+Q$ и $P-Q$, среди их по опадајућим степенима монома и одреди њихове степене.

Решење:

$$\begin{aligned} P+Q&=\left(x^5-x^4+4x^3+3x^2+2\right)+\left(-x^5-x^4-x^3+3x^2+2x\right)\\ &=x^5-x^4+4x^3+3x^2+2-x^5-x^4-x^3+3x^2+2x\\ &=-2x^4+3x^3+6x^2+2x+2. \end{aligned}$$

Степен збира полинома је 4.

$$\begin{aligned} P-Q&=\left(x^5-x^4+4x^3+3x^2+2\right)-\left(-x^5-x^4-x^3+3x^2+2x\right)\\ &=x^5-x^4+4x^3+3x^2+2+x^5+x^4+x^3-3x^2-2x\\ &=2x^5+5x^3-2x+2. \end{aligned}$$

Степен разлике полинома је 5.

У претходном примеру полиноми су садржали само променљиву x. Полиноме који садрже само једну променљиву називамо полиномима једне променљиве. У полиному једне променљиве моном степена 0 називамо **слободан члан**. Слободан члан може бити и 0.

Домаћи задатак: Размисли да ли постоји веза између степена збира (или разлике) полинома са степенима самих полинома. Да ли су једнаки, мањи или већи од степена почетних полинома?

Множење два монома је врло једноставно. Како су мономи производи бројева (константи) и променљивих, то ће и производ монома бити моном, чији је коефицијент једнак производу коефицијената полазних монома.

пример 11

Одреди производ монома: **а)** $3x^2$ и $2x$; **б)** x и 5; **в)** $4ab^2$ и $4ab^2$; **г)** $\frac{1}{2}abc^2$ и $\sqrt{3}a^3b$.

Решење: Приликом множења користимо комутативност и асоцијативност и особине степена:

а) $3x^2 \cdot 2x = 3 \cdot x^2 \cdot 2 \cdot x = 6 \cdot x^3 = 6x^3$;

б) $x \cdot 5 = 5x$;

в) $4ab^2 \cdot 4ab^2 = 4 \cdot a \cdot b^2 \cdot 4 \cdot a \cdot b^2 = 16a^2b^4$;

приметимо и да је $4ab^2 \cdot 4ab^2 = \left(4ab^2\right)^2 = 4^2 \cdot a^2 \cdot \left(b^2\right)^2 = 16a^2b^4$;

г) $\frac{1}{2}abc^2 \cdot \sqrt{3}a^3b = \frac{1}{2} \cdot a \cdot b \cdot c^2 \cdot \sqrt{3} \cdot a^3 \cdot b = \frac{\sqrt{3}}{2}a^4b^2c^2$.

Ако моном множимо биномом, триномом или уопште збиром више монома, применићемо дистрибутивни закон. Примера ради, нека A, B, C и D представљају мономе. Тада је $A \cdot (B+C)$ производ монома A и бинома $B+C$, а применом особине дистрибутивности добијамо:

$$A \cdot (B+C) = A \cdot B + A \cdot C.$$

Исто правило важи и за множење два полинома. На пример, производ бинома $A+B$ и бинома $C+D$ одредићемо користећи дистрибутивни закон два пута:

$$(A+B) \cdot (C+D) = (A+B) \cdot C + (A+B) \cdot D = A \cdot C + B \cdot C + A \cdot D + B \cdot D.$$

Уопштено, за множење два полинома важи правило „сваки са сваким", што значи да се сваки моном првог полинома множи са сваким мономом другог полинома, а затим се сви новодобијени мономи саберу:

$$A \cdot (B+C) = A \cdot B + A \cdot C;$$

$$(A+B) \cdot (C+D) = A \cdot C + B \cdot C + A \cdot D + B \cdot D.$$

$$x \cdot \left(-3 + y^2\right) = x \cdot (-3) + x \cdot y^2$$

$$(a - 3b) \cdot 4r = a \cdot (4r) + (-3b) \cdot 4r$$

$$(a-3) \cdot (x+4)$$

$$a \cdot x + (-3) \cdot x + a \cdot 4 + (-3) \cdot 4$$

пример 12

Одреди производе датих полинома (и среди их):

а) $3x^4 + 2x$ и $-xy$; **б)** $x^2 + y^2$ и $x + y$; **в)** $a^4 - a^3 + 1$ и $a - 1$.

Решење: а) $\left(3x^4 + 2x\right) \cdot (-xy) = 3x^4 \cdot (-xy) + 2x \cdot (-xy) = -3x^5y - 2x^2y$;

б) $\left(x^2 + y^2\right) \cdot (x+y) = x^2 \cdot x + y^2 \cdot x + x^2 \cdot y + y^2 \cdot y = x^3 + xy^2 + x^2y + y^3$;

в) $\left(a^4 - a^3 + 1\right) \cdot (a-1) = a^4 \cdot a - a^3 \cdot a + 1 \cdot a + a^4 \cdot (-1) - a^3 \cdot (-1) + 1 \cdot (-1)$

$= a^5 - a^4 + a - a^4 + a^3 - 1 = a^5 - 2a^4 + a^3 + a - 1$.

Поновимо сада операције са полиномима кроз пример.

пример 13

Дати су полиноми $P = x^2 - 3x + y$; $Q = x - 2y$; $R = 2x + y$; $S = 2y$.

Одреди полиноме: **а)** $Q + 2R$; **б)** $P \cdot S + Q \cdot R$; **в)** $(P + 3Q + 2S)R - 2x^2 Q$.

Решење:

а) $Q + 2R = x - 2y + 2(2x + y) = x - 2y + 4x + 2y = 5x$;

б) $P \cdot S + Q \cdot R = (x^2 - 3x + y) \cdot 2y + (x - 2y) \cdot (2x + y)$

$= (2x^2y - 6xy + 2y^2) + (2x^2 - 4xy + xy - 2y^2) = 2x^2y - 9xy + 2x^2$;

в) $(P + 3Q + 2S)R - 2x^2Q =$

$= [x^2 - 3x + y + 3 \cdot (x - 2y) + 2 \cdot 2y] \cdot (2x + y) - 2x^2 \cdot (x - 2y) =$

$= [x^2 - 3x + y + 3x - 6y + 4y] \cdot (2x + y) - 2x^3 + 4x^2y =$

$= [x^2 - y] \cdot (2x + y) - 2x^3 + 4x^2y = 2x^3 + x^2y - 2xy - y^2 - 2x^3 + 4x^2y =$

$= 5x^2y - 2xy - y^2$.

ЗАДАЦИ

34. Који од наведених израза нису полиноми (објасни зашто):

а) $x^2 + x$; **б)** $2xy - y$; **в)** $x + \frac{1}{x}$; **г)** $3\sqrt{x}$; **д)** $\sqrt{3} \cdot x$; **ђ)** $\frac{(x+1)x}{2}$; **е)** $\frac{x+1}{x}$; **ж)** $(x + y)^2$?

35. За наведене мономе одреди коефицијент и степен монома:

а) $2x^2$; **б)** $-\frac{1}{3}x$; **в)** $-\sqrt{3} \cdot (-x^3)$; **г)** xy^2; **д)** $x^2 \cdot 4 \cdot x \cdot y$; **ђ)** $-3x^2 \cdot \frac{y^3}{6}$.

36. За сваки од полинома одреди да ли је моном, бином или трином:

а) $2xyz$; **б)** $2(xy + z)$; **в)** $2(x + y + z)$;
г) $xy^2 + yz^2 + zx^2$; **д)** $(xyz)^2 + xyz$; **ђ)** $(xyz)^2 \cdot xyz$.

37. За сваки од монома $3x^3$, $-\frac{1}{2}xy^2$, xyz, $\left[(xy)^2\right]^3$, одреди мономе који су:

а) слични са два пута мањим коефицијентом;

б) слични са квадрираним коефицијентом.

38. Изабери одговарајући троугао и представи његов обим у облику:
а) монома; **б)** бинома; **в)** тринома.

39. Одреди коефицијент наведеног монома и испитај да ли је сличан моному $2x^2y^3$:

а) $2x^3y^2$; **б)** $(-\sqrt{3}y) \cdot (\sqrt{3}xy)^2$; **в)** $-5x^2 \cdot \frac{1}{10}y^3$; **г)** $\frac{(xy^2)^2}{y}$.

40. Дат је полином $P = \frac{x^3 + 2x^2 - x + 4}{4}$.

а) Који је степен полинома P?

б) Који је моном степена 0 (тј. слободан члан) у полиному P?

в) Који коефицијент стоји уз моном степена 2 у полиному P?

г) Запиши и среди полином $Q = -P$.

41. Сабери мономе: **а)** $2x$ и $3x$; **б)** $-2x^2$ и $-x^2$; **в)** $\frac{1}{3}xy$ и $-\frac{1}{2}xy$;
г) $\frac{xyz}{4}$ и $\frac{3}{4}\cdot xyz$; **д)** $(2xy)^2$ и $x^2\cdot(3y)^2$; **ђ)** $\sqrt{2}x^5$ и $-\sqrt{2}x^5$.

42. Упрости полиноме: **а)** $x+2x+3x$; **б)** $2x^2-3x^2$; **в)** $xy-\frac{xy}{2}+\frac{1}{3}xy$;
г) $3x^2y-(0{,}5x^2y+1{,}5x^2y)$; **д)** $xy-(2xy-3xy)-4xy$; **ђ)** $(2x^2)^2-3x^4$.

43. Среди полиноме и запиши сваки по опадајућим степенима:
а) $3-x^2+3x$; **б)** $y^3-y^2+y-1-2y+3y^2$;
в) $\frac{1+a+a^2}{3}+\frac{2}{3}a^2+\frac{5}{3}a-\frac{4}{3}$; **г)** $2b+b^4+3b^2+(-2b^4)-3b^2+2$.

44. Провери тачност исказа: **а)** $2x^2+2x^3=5x^5$; **б)** $x^2+x^2=x^4$; **в)** $x^3-2x^3=-x^3$;
г) $4x+4y=4xy$; **д)** $ab+ba=a^2b^2$; **ђ)** $2a+b-a-2b=b+a$.

45. Упрости полиноме: **а)** $(x+2+y)-(x-y)-3$; **б)** $a+[b-(a+b)]-a$;
в) $x^2+xy+3-y^2-2xy+x^2-2$; **г)** $a-ab-(2a+2b-ab)+2-(3+3b)$.

46. У кружић упиши моном тако да исказ буде тачан: **а)** $\bigcirc+3x^2=6x^2$;
б) $\bigcirc-2ab=ab$; **в)** $2x^2y-\bigcirc=3x^2y$; **г)** $\sqrt{3}y^3+\bigcirc=-\sqrt{3}y^3$.

47. Реши једначине: **а)** $2x+x-4x=-7$; **б)** $(x+3)-(x-2)=6$;
в) $2y^2-2(y+y^2)+3+4y=7$; **г)** $\frac{x}{2}+\frac{x}{3}+\frac{x}{6}+x=-4$;
д) $y+3y^2+4y^2-6y^2=2$; **ђ)** $a-\{2a-[3a-(4a+2)]\}=-1$.

48. Збир непознатог природног броја и њему суседних природних бројева је 78. Који је то број?

49. Збир непознатог броја, његове половине и његове двоструке вредности је 21. Који је то број?

50. Упрости производ (ослободи се заграде): **а)** $2(-4x^3)$; **б)** $-3(-5y^2)$; **в)** $6(-2z)$;
г) $(7a^4)\left(-\frac{1}{4}\right)$; **д)** $3x(-2x^2)$; **ђ)** $(-4y^2)(-5y)$; **е)** $a^3(-2a^2)$; **ж)** $(-2b^4)(-3b^2)$.

51. Упрости производ: **а)** $2x^2y(-3xy^2)$; **б)** $4a^2b(-2ab^2)$;
в) $-5xyz(-2x^2y^2)$; **г)** $3m^2n(-2m^2n^2)$.

52. Упрости полином: **а)** $2x(-3x^2)\cdot 4x^3$; **б)** $(-a)(-2a^2)(-5a^3)$; **в)** $(3x^2)^2$; **г)** $(-x^3)^3$;
д) $2x(-3xy)\cdot 4y^2$; **ђ)** $a^2\cdot 2ab(-5bc)$; **е)** $3m^2(-2mn)\cdot 4np$; **ж)** $(x^2)^3(2x^3)^2$.

53. Помножи моном и бином: **а)** $x(3x-4)$; **б)** $-5a(a^2+1)$; **в)** $-y(1+y)$; **г)** $b^2(b^2+b)$;
д) $(2x-1)(-x)$; **ђ)** $(x+y)\cdot 2x$; **е)** $(zx-1)zy$; **ж)** $(a-b)(-3ab)$.

54. Помножи моном и трином: **а)** $2x(x^2+x+1)$; **б)** $(y^3-y-2)y$;
в) $ab(a+b+ab)$; **г)** $(1-z+z^3)\cdot z^2$.

55. Помножи биноме: **а)** $(x+2)(x-3)$; **б)** $(2y-1)(y+4)$; **в)** $(3m-2)(2m+1)$;
г) $(5b+2)(3b-1)$; **д)** $(x^2+1)(x-1)$; **ђ)** $(y^2-1)(y^2+1)$;
е) $(3mn-1)(m-n)$; **ж)** $(a^2-b^2)(2a-b^3)$.

3.6. Квадрат бинома и разлика квадрата

У претходној лекцији смо видели како се множе два бинома. Поновимо то, али множећи два иста бинома. Помножимо бином $A + B$ биномом $A + B$, где су A и B мономи. Тако добијамо **квадрат збира** монома.

$$(A+B)^2 = (A+B)\cdot(A+B)$$
$$= A\cdot A + A\cdot B + B\cdot A + B\cdot B$$
$$= A^2 + 2AB + B^2$$

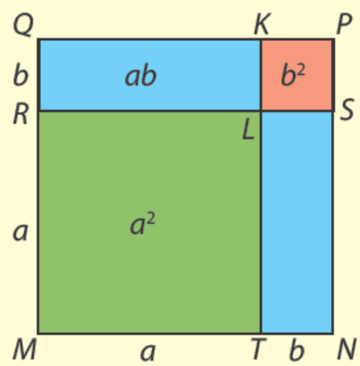
квадрат збира монома

$$(A+B)^2 = A^2 + 2AB + B^2$$

$$(x+3)^2 = x^2 + 6x + 9$$

ЗАНИМЉИВОСТ

Формулу за **квадрат збира** монома могли смо добити и геометријски посматрајући површине квадрата и правоугаоника.



Површина квадрата $MNPQ$ је $P_{MNPQ} = (a+b)^2$, а она се може добити као збир површина квадрата $MTLR$ и $LSPK$ и правоугаоника $RLKQ$ и $TNSL$, које су редом a^2, b^2, ab и ab. Одатле добијамо да је

$$(a+b)^2 = P_{MNPQ} = P_{MTLR} + P_{TNSL} + P_{RLKQ} + P_{LSPK}$$
$$= a^2 + ab + ab + b^2 = a^2 + 2ab + b^2.$$

Квадрат разлике монома A и B можемо добити и заменом B са $-B$ у формули за квадрат збира монома, а можемо га и директно израчунати ради вежбе множења полинома.

$$(A-B)^2 = (A-B)\cdot(A-B)$$
$$= A\cdot A - A\cdot B - B\cdot A + B\cdot B$$
$$= A^2 - 2AB + B^2$$

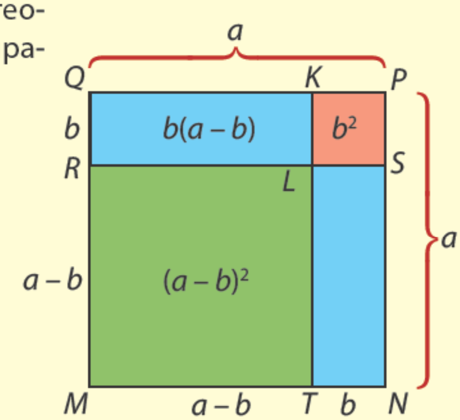
квадрат разлике монома

$$(A-B)^2 = A^2 - 2AB + B^2$$

$$(x-3)^2 = x^2 - 6x + 9$$

ЗАНИМЉИВОСТ

И формулу за **квадрат разлике** можемо добити геометријски, посматрајући површине квадрата и правоугаоника.



Површина квадрата странице a на слици једнака је збиру површина осенчених фигура.

$$P_{MNPQ} = P_{MTLR} + P_{TNSL} + P_{RLKQ} + P_{LSPK}$$
$$a^2 = (a-b)^2 + b(a-b) + b(a-b) + b^2$$
$$a^2 = (a-b)^2 + (2ab - 2b^2) + b^2$$
$$a^2 = (a-b)^2 + 2ab - b^2$$

Одавде следи $(a-b)^2 = a^2 - 2ab + b^2$.

Квадрат збира или разлике монома краће називамо **квадрат бинома**.

тврђење

Квадрат бинома: $(A+B)^2 = A^2 + 2AB + B^2$ или $(A-B)^2 = A^2 - 2AB + B^2$.

пример 1

Одреди квадрате бинома: **а)** $3a-4b$; **б)** $\frac{1}{2}x^2 + x$; **в)** $x+1$; **г)** $x-\sqrt{3}$.

Решење: а) $(3a-4b)^2 = (3a)^2 - 2\cdot 3a\cdot 4b + (4b)^2 = 9a^2 - 24ab + 16b^2$;

б) $\left(\frac{1}{2}x^2 + x\right)^2 = \left(\frac{1}{2}x^2\right)^2 + 2\cdot\frac{1}{2}x^2\cdot x + x^2 = \frac{1}{4}x^4 + x^3 + x^2$;

в) $(x+1)^2 = x^2 + 2\cdot x\cdot 1 + 1^2 = x^2 + 2x + 1$;

г) $\left(x-\sqrt{3}\right)^2 = x^2 - 2\cdot x\cdot\sqrt{3} + \left(\sqrt{3}\right)^2 = x^2 - 2\sqrt{3}x + 3$.

Корисно је уочити да је $(-A-B)^2 = (A+B)^2$ јер је $-A-B = -1\cdot(A+B)$, па су им квадрати једнаки.

Посматрајмо сада производ збира и разлике два монома A и B и средимо израз који добијемо.

$$(A+B)\cdot(A-B) = A^2 - AB + AB - B^2 = A^2 - B^2$$

Добијени израз је разлика квадрата монома A и B, па се и добијена формула назива формулом за разлику квадрата.

разлика квадрата монома

$A^2 - B^2 = (A+B)\cdot(A-B)$

$x^2 - 9 = (x+3)\cdot(x-3)$

тврђење

Разлика квадрата два монома једнака је производу збира и разлике тих монома:

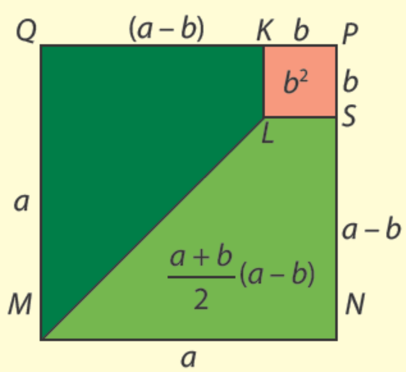
$$A^2 - B^2 = (A+B)(A-B).$$

Као што смо квадрат бинома геометријски интерпретирали, можемо исто учинити и са разликом квадрата.

занимљивост

И формулу за разлику квадрата можемо добити геометријски. Разлика површина квадрата $MNPQ$ и $LSPK$ једнака је збиру површина подударних трапеза $MNSL$ и $MLKQ$. Ти трапези су правоугли, па лако можемо наћи њихове површине.

$$\begin{aligned} a^2 - b^2 &= P_{MNPQ} - P_{LSPK} \\ &= P_{MNSL} + P_{MLKQ} \\ &= \frac{(a+b)}{2}\cdot(a-b) + \frac{(a+b)}{2}\cdot(a-b) \\ &= (a+b)\cdot(a-b) \end{aligned}$$



пример 2

Одреди следеће производе користећи формулу за разлику квадрата:

а) $(3x-2y)\cdot(3x+2y)$; **б)** $\left(x\sqrt{3}-1\right)\cdot\left(x\sqrt{3}+1\right)$; **в)** $(-2a-b)\cdot(-2a+b)$.

Решење: а) $(3x-2y)\cdot(3x+2y)=(3x)^2-(2y)^2=9x^2-4y^2$;

б) $\left(x\sqrt{3}-1\right)\cdot\left(x\sqrt{3}+1\right)=\left(x\sqrt{3}\right)^2-1^2=3x^2-1$;

в) $(-2a-b)\cdot(-2a+b)=(-2a)^2-b^2=4a^2-b^2$.

Формуле за квадрат бинома и разлику квадрата могу бити врло корисне приликом рачунања вредности разних израза.

пример 3

Користећи формулу за квадрат бинома или разлику квадрата, израчунај:

а) 73^2; **б)** 123^2; **в)** $103\cdot 117$; **г)** $8{,}24^2-3{,}24^2$; **д)** $0{,}0102^2-0{,}01^2$.

Решење:

а) $73^2=(70+3)^2=70^2+2\cdot 70\cdot 3+3^2=4900+420+9=5329$;

б) $123^2=(120+3)^2=120^2+2\cdot 120\cdot 3+3^2=14\,400+720+9=15\,129$;

в) $103\cdot 117=(110-7)\cdot(110+7)=110^2-7^2=12\,100-49=12\,051$;

г) $8{,}24^2-3{,}24^2=(8{,}24-3{,}24)\cdot(8{,}24+3{,}24)=5\cdot 11{,}48=57{,}4$;

д) $0{,}0102^2-0{,}01^2=(0{,}0102-0{,}01)\cdot(0{,}0102+0{,}01)=0{,}0002\cdot 0{,}0202=0{,}00000404$.

Знајући Питагорину теорему уз познавање формуле за квадрат бинома или разлику квадрата, можемо решавати неке задатке које до сада нисмо могли. Погледајмо примере.

пример 4

Једна катета правоуглог троугла је 8. Одреди другу катету тог троугла ако је хипотенуза за 5 дужа од те катете.

Решење: Нека је позната катета $a=8$, а b непозната катета. Тада је хипотенуза $c=b+5$. Ако искористимо Питагорину теорему, добијамо да је $8^2+b^2=(b+5)^2$. Сређивањем датог израза добијамо $64+b^2=b^2+10b+25$, тј. добијамо једначину $10b=39$. Решавањем ове једначине добијамо да је катета $b=3{,}9$.

пример 5

Докажи да је квадрат дужине једне катете једнак производу збира и разлике дужина остале две странице правоуглог троугла.

Решење: Из Питагорине теореме $c^2=a^2+b^2$ следи $a^2=c^2-b^2$. Применимо сада формулу за разлику квадрата и добијамо $a^2=c^2-b^2=(c+b)(c-b)$.

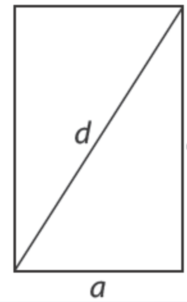
пример 6

Израчунај дужину дијагонале правоугаоника обима 14 и површине 12.

Решење: Нека су странице правоугаоника a и b. Тада је обим $O=2(a+b)$, а површина $P=ab$. Одатле добијамо да је збир $a+b$ једнак половини обима, дакле, $a+b=7$, а производ ab је једнак површини, дакле, $ab=12$. Сада искористимо Питагорину теорему и формулу за квадрат збира да израчунамо квадрат дијагонале:

$$d^2=a^2+b^2=\left(a^2+b^2+2ab\right)-2ab=\left(a+b\right)^2-2ab=7^2-2\cdot 12=25.$$

Одатле следи $d=\sqrt{25}=5$.



ЗАДАЦИ

56. Применом формуле за разлику квадрата растави полином на производ бинома:

а) x^2-4; **б)** $9-y^2$; **в)** $1-a^2$; **г)** b^2-16.

57. Применом формуле за разлику квадрата растави полином на производ бинома:

а) x^2-y^2; **б)** $4a^2-9$; **в)** $4a^2b^2-x^2$; **г)** $49x^2-81y^2$;
д) x^4-y^2; **ђ)** $9a^2-b^4$; **е)** $100x^2y^4-z^6$; **ж)** $a^4-9b^2c^6$.

58. Запиши производ бинома као разлику квадрата:

а) $(x+1)(x-1)$; **б)** $(y-3)(3+y)$; **в)** $(a-b)(a+b)$; **г)** $(1-ab)(1+ab)$;

д) $(z^2+5)(z^2-5)$; **ђ)** $(ab+c)(-ab+c)$; **е)** $(x^2+y)(y-x^2)$; **ж)** $(2ab-3c)(3c+2ab)$.

59. Примени формулу за разлику квадрата како би лакше израчунао вредност израза:

а) 75^2-25^2; **б)** 29^2-21^2; **в)** 43^2-57^2; **г)** $1\,001^2-999^2$;

д) $13{,}5^2-6{,}5^2$; **ђ)** $1{,}55^2-0{,}45^2$; **е)** $\left(7\frac{3}{4}\right)^2-\left(2\frac{1}{4}\right)^2$; **ж)** $\left(12\frac{3}{5}\right)^2-\left(7\frac{2}{5}\right)^2$.

60. Представи квадрат бинома као трином:

а) $(x+1)^2$; **б)** $(x-2)^2$; **в)** $(3-x)^2$; **г)** $(4+3x)^2$;

д) $(x+2y)^2$; **ђ)** $(3y-2x)^2$; **е)** $(5xy-2)^2$; **ж)** $(ab+c)^2$.

61. Представи полином као квадрат бинома:

а) $a^2+2ab+b^2$; **б)** a^2+b^2-2ab; **в)** x^2+6x+9; **г)** $4y^2-12y^3+9y^4$;

д) $1+2z^2+z^4$; **ђ)** $\frac{1}{4}a^2+2a+4$; **е)** $2x^3y^3+\frac{x^2y^4}{4}+4x^4y^2$; **ж)** $2abc+c^2+a^2b^2$.

62. Да ли је тачан исказ за све реалне бројеве a и b:

а) $(a-b)^2=a^2-b^2$; **б)** $(a+b)^2=a^2+b^2+2ab$;

в) $(a-b)^2=(b-a)^2$; **г)** $(-a-b)^2=-a^2+2ab-b^2$?

3.7. Растављање полинома на чиниоце

У претходним разредима смо научили да се сложени бројеви могу написати у облику производа простих бројева, тј. могу да се раставе на просте чиниоце. На пример

$$33=3\cdot 11;\qquad 28=2^2\cdot 7;\qquad 1000=2^3\cdot 5^3;\qquad 3060=2^2\cdot 3^2\cdot 5\cdot 17.$$

Сада се можемо запитати да ли се полиноми могу раставити на чиниоце, тј. да ли неке полиноме можемо записати као производ више других полинома и како то да урадимо. Код неких полинома је поступак растављања на чиниоце једноставнији, код неких се очекује наша сналажљивост, али се свако растављање своди на основне законе рачунских операција.

Код монома је очигледно да се могу написати у облику производа (с обзиром на то да су тако и дефинисани):

$$2x^2y=2\cdot x\cdot x\cdot y;\qquad 8a^3bc=2\cdot 2\cdot 2\cdot a\cdot a\cdot a\cdot b\cdot c=2^3\cdot a^3\cdot b\cdot c\qquad \text{и слично.}$$

Због једноставности и краћег записа користимо приказ у облику степена (уместо $x\cdot x$ пишемо x^2).

Сетимо се да смо полином множили мономом користећи дистрибутивност. На пример

$$x\cdot(2x-1)=2x^2-x,$$

што значи да се полином $2x^2-x$ може раставити на чиниоце, као производ монома x и бинома $2x-1$. Слично можемо раставити и још неке полиноме, користећи такозвано извлачење испред заграде, тј. извлачимо заједнички чинилац испред заграде користећи дистрибутивни закон.

пример 1

Растави на чиниоце полиноме: **а)** $3x+6$; **б)** a^2b+abc; **в)** $8a^2-16a+24b$.

Решење: а) $3x+6=3\cdot x+3\cdot 2=3\cdot(x+2)$;

б) $a^2b+abc=ab\cdot a+ab\cdot c=ab\cdot(a+c)$;

в) $8a^2-16a+24b=8\cdot a^2+8\cdot(-2a)+8\cdot 3b=8\cdot(a^2-2a+3b)$.

Урадимо сада исто, али тако да је заједнички чинилац неки бином.

пример 2

Растави на чиниоце полиноме: **а)** $x(x-6)-2(x-6)$; **б)** $m(a-b)+n(a-b)$;
в) $x^2(a+x)+a^2(a+x)+ax(a+x)$.

Решење: а) $x(x-6)-2(x-6)=(x-2)(x-6)$;

б) $m(a-b)+n(a-b)=(m+n)(a-b)$;

в) $x^2(a+x)+a^2(a+x)+ax(a+x)=(x^2+a^2+ax)(a+x)$.

Подсетимо се формуле за разлику квадрата $A^2-B^2=(A+B)(A-B)$. Можемо уочити да смо већ тада започели идеју растављања на чиниоце јер смо полином A^2-B^2 написали у облику производа два полинома (у овом случају то су $A+B$ и $A-B$). Искористимо ту формулу да раставимо још неке полиноме.

пример 3

Растави на чиниоце биноме:

а) $16x^2-9$; **б)** $a^4b^2-81x^2$; **в)** a^4-1; **г)** $4a^5-a^3x^2$.

Решење: **а)** $16x^2-9=(4x)^2-3^2=(4x+3)(4x-3)$;

б) $a^4b^2-81x^2=(a^2b)^2-(9x)^2=(a^2b+9x)(a^2b-9x)$;

в) $a^4-1=(a^2)^2-1^2=(a^2+1)(a^2-1)=(a^2+1)(a+1)(a-1)$

Примети да смо два пута искористили разлику квадрата. Бином a^2+1 је такозвани збир квадрата који није могуће раставити у скупу реалних бројева.

г) $4a^5-a^3x^2=a^3(4a^2-x^2)=a^3\left[(2a)^2-x^2\right]=a^3(2a+x)(2a-x)$

У овом примеру смо прво искористили дистрибутивни закон, па онда разлику квадрата.

Такође, поред разлике квадрата, и код квадрата бинома имамо растављање на чиниоце, те је трином $A^2+2AB+B^2$ једнак производу два иста бинома $A+B$, тј. $(A+B)^2$.

пример 4

Растави на чиниоце триноме: **а)** $4x^2+4x+1$; **б)** $x^2-6xy+9y^2$; **в)** $25a^2b^2+40abc+16c^2$; **г)** $9x^4-12x^2y+4y^2$.

Решење: **а)** $4x^2+4x+1=(2x)^2+2\cdot 2x\cdot 1+1^2=(2x+1)^2$;

б) $x^2-6xy+9y^2=x^2-2\cdot x\cdot 3y+(3y)^2=(x-3y)^2$;

в) $25a^2b^2+40abc+16c^2=(5ab)^2+2\cdot 5ab\cdot 4c+(4c)^2=(5ab+4c)^2$;

г) $9x^4-12x^2y+4y^2=(3x^2)^2-2\cdot 3x^2\cdot 2y+(2y)^2=(3x^2-2y)^2$.

Често је потребно комбиновати претходне идеје, али и уочити да се неки мономи могу записати као збирови сличних, и то погодно одабраних како би нам олакшали груписање појединих сабирака, са циљем извлачења испред заграда. То су обично знатно тежи примери.

пример 5

Растави следеће полиноме на чиниоце:

а) $2a^2+ab+2ac+bc$; **б)** ab^5-a^5b; **в)** $8x^3+8x^2y-18xy^2-18y^3$.

Решење: **а)**
$$2a^2+ab+2ac+bc=(2a^2+ab)+(2ac+bc)=a(2a+b)+c(2a+b)=(a+c)(2a+b);$$

б) $ab^5-a^5b=ab(b^4-a^4)=ab(b^2+a^2)\cdot(b^2-a^2)=ab(b^2+a^2)\cdot(b+a)(b-a)$;

в)
$$\begin{aligned}8x^3+8x^2y-18xy^2-18y^3&=2(4x^3+4x^2y-9xy^2-9y^3)\\&=2\left[(4x^3+4x^2y)-(9xy^2+9y^3)\right]\\&=2\left[4x^2(x+y)-9y^2(x+y)\right]\\&=2(x+y)\cdot(4x^2-9y^2)\\&=2(x+y)\cdot(2x+3y)(2x-3y).\end{aligned}$$

Пример 6

Користећи формуле за квадрат бинома и разлику квадрата, растави следеће полиноме на чиниоце: **а)** $4x^2-4x-15$; **б)** $6x^2+xy-y^2$.

Решење: а) $4x^2-4x-15=\left(4x^2-4x+1\right)-16=\left(2x-1\right)^2-4^2$

$$=\left(2x-1-4\right)\cdot\left(2x-1+4\right)=\left(2x-5\right)\cdot\left(2x+3\right);$$

б) $6x^2+xy-y^2=\frac{25}{4}x^2-\frac{1}{4}x^2+xy-y^2=\frac{25}{4}x^2-\left(\frac{1}{4}x^2-xy+y^2\right)=\left(\frac{5}{2}x\right)^2-\left(\frac{1}{2}x-y\right)^2$

$$=\left[\frac{5}{2}x+\left(\frac{1}{2}x-y\right)\right]\cdot\left[\frac{5}{2}x-\left(\frac{1}{2}x-y\right)\right]=\left(3x-y\right)\cdot\left(2x+y\right).$$

Растављање полинома на чиниоце нам је од изузетног значаја приликом решавања једначина.

Подсетник

Производ два или више чинилаца једнак је нули ако и само ако је бар један од чинилаца нула.

Зато се једначина облика $A\cdot B=0$ своди на решавање две једначине, $A=0$ и $B=0$. Решење било које од ове две једначине уједно је и решење полазне једначине $A\cdot B=0$. У случају више чинилаца, нпр. $A\cdot B\cdot C\cdot D=0$, сваки од чинилаца води ка једној једначини.

Пример 7

Реши једначине: **а)** $4x^2+3x=0$; **б)** $6x-9x^2=1$; **в)** $x^4=16$; **г)** $4x^2-2x=6x-3$; **д)** $x^3-x=0$.

Решење: Овакве једначине обично решавамо растављањем полинома на чиниоце.

а) $4x^2+3x=0$ Раставимо прво полином на левој страни једначине на чиниоце.

$x\left(4x+3\right)=0$ Пошто имамо два чиниоца, имамо две једначине, $x=0$ и $4x+3=0$; решење прве је $x_1=0$, а друге је $x_2=\frac{-3}{4}$. Дакле, имамо два решења.

б) $6x-9x^2=1$ Од обе стране одузмимо 1, па затим обе стране помножимо бројем −1.

$9x^2-6x+1=0$ Раставимо сада полином на левој страни на чиниоце.

$\left(3x-1\right)^2=0$ На левој страни добијамо два истоветна чиниоца, па имамо две истоветне једначине $3x-1=0$. Зато имамо само једно решење $x=\frac{1}{3}$.

в) Овде не морамо растављати полином на чиниоце јер једначину можемо написати у облику $x^2\cdot x^2=4\cdot 4$. Одавде следи да је $x^2=4$, а одраније знамо да ова последња једначина има два решења, $x_1=\sqrt{4}=2$ и $x_2=-\sqrt{4}=-2$. (Зашто не морамо разматрати случај $x^2=-4$?)

г) $4x^2-2x=6x-3$ Убрзајмо сада поступак. Пребацимо све изразе на леву страну па раставимо полином на левој страни на чиниоце. Тако добијамо две једначине, $2x-3=0$ и $2x-1=0$, чија решења су $x_1=\frac{3}{2}$ и $x_2=\frac{1}{2}$.

$4x^2-8x+3=0$

$\left(2x-3\right)\left(2x-1\right)=0$

д) $x^3-x=0$ Раставимо полином на левој страни на што више чинилаца

$x\left(x^2-1\right)=0$ тако да на левој страни добијемо производ три монома.

$x\left(x+1\right)\left(x-1\right)=0$ Одатле добијамо три једначине: $x=0$, $x+1=0$ и $x-1=0$.

Решења ове три једначине су: $x_1=0$, $x_2=-1$ и $x_3=1$.

Сва три решења су уједно и решења полазне једначине $x^3-x=0$.

пример 8

Једна страница правоугаоника је за 14 дужа од друге. Ако се дужа страница смањи за 6, а краћа повећа за 10, дијагонала правоугаоника се неће променити. Одреди странице правоугаоника.

Решење: Нека је $b=a+14$, где су a и b странице тог правоугаоника. Користећи Питагорину теорему за налажење дијагонале која је иста у оба случаја (јер се по условy задатка дијагонала не мења), добијамо: $d^2=a^2+b^2=(a+10)^2+(b-6)^2$. Заменом $b=a+14$ у последњу једнакост добијамо једначину:

$$a^2+(a+14)^2=(a+10)^2+(a+8)^2$$

$$a^2+a^2+28a+196=a^2+20a+100+a^2+16a+64$$

$$2a^2+28a+196=2a^2+36a+164$$ (Одузмимо од обе стране исти моном $2a^2$.)

$$28a+196=36a+164$$ Решење ове једначине је $a=4$,

$$-8a+32=0$$ па је $b=a+14=4+14=18$.

ЗАДАЦИ

63. Растави мономе на чиниоце: **а)** 48; **б)** 36; **в)** $4x^2$; **г)** $15a^3b^2$; **д)** $-100x^3$; **ђ)** $-54xy^2$.

64. Растави бином на чиниоце извлачењем заједничког чиниоца:

а) $5x-10$; **б)** $4-2y$; **в)** $14+21z^2$; **г)** $15a+10$;
д) $44y-22x$; **ђ)** $49a+28b^2$; **е)** $-24m-30n$; **ж)** $8a^2-12b$.

65. Растави бином на чиниоце извлачењем заједничког чиниоца:

а) $3x^2-x$; **б)** $y-y^2$; **в)** $6z+3z^2$; **г)** $10a^2+25a^3$;
д) ab^2+a^2b; **ђ)** $4x^2+6x^3$; **е)** $12ab-8ac$; **ж)** $3x^4+2x^2$.

66. Растави полином на чиниоце применом формула за разлику квадрата или квадрат бинома:

а) x^2-y^2; **б)** $9a^2-4b^2$; **в)** $144-121x^2$; **г)** $-9y^2+x^2$;
д) a^2+4a+4; **ђ)** $4x^2-12xy+9y^2$; **е)** $a^2b^2+9+6ab$; **ж)** $4x^4+2x^2+\frac{1}{4}$.

67. Растави полином на чиниоце: **а)** $x(x+1)+x+1$; **б)** $y-2-y(y-2)$;
в) $a-3+a(3-a)$; **г)** $(m+1)n-m-1$.

68. Растави полином на чиниоце:

а) x^3+x^2+x; **б)** $4x+2y-6z$; **в)** $x+1+x(x+1)+x^2(x+1)$;
г) $ax+a^2y-a$; **д)** $2(y-2)+y(2-y)-y^2(y-2)$; **ђ)** $a+(a-1)a^2-1-a(1-a)$.

69. Растави полином на чиниоце: **а)** $15x^{10}-9x^8$; **б)** $ab^m+a^2b^{m+n}$ $(m,n\in N)$;
в) $x^{n-1}+x^{n+1}$ $(n\in N)$; **г)** $8a^m-12a^n$ $(m,n\in N;\ m>n)$.

***70.** Растави полином на чиниоце:

а) $2a+2b+a^2+ab$; **б)** $xy+2x-y^2-2y$; **в)** $10a-6ab-5b+3b^2$;
г) $6y-21xy+10x-35x^2$; **д)** $x^2y-xyz-xz+z^2$; **ђ)** $a^2+ac+bc+ba$.

***71.** Растави полином на чиниоце:

а) x^3+x^2-x-1; **б)** x^3-x^2-x+1; **в)** x^3-2x^2-4x+8;
г) $a^3-b^3+a^2b-ab^2$; **д)** $8a^3-12a^2b-18ab^2+27b^3$; **ђ)** $a^3-b^2a+2b^3-2a^2b$.

Сажетак: ЦЕЛИ АЛГЕБАРСКИ ИЗРАЗИ

Степеновање:

$$\underbrace{a \cdot a \cdot \ldots \cdot a}_{n \text{ чинилаца}} = a^n$$

Степеновање реалног броја a природним бројем n.

Особине степеновања ($n, m \in N;\ a \in R$):

$a^n \cdot a^m = a^{n+m}$ и $\dfrac{a^n}{a^m} = a^{n-m}$, за $n > m$ и $a \neq 0$

$(a^n)^m = a^{n \cdot m}$

$(a \cdot b)^n = a^n \cdot b^n$ и $\left(\dfrac{a}{b}\right)^n = \dfrac{a^n}{b^n}$, за $b \neq 0$

Степеновање декадне јединице:

$10^0 = 1$ и $10^{-n} = \dfrac{1}{10^n}$, за $n \in N$

Цели алгебарски изрази (полиноми):

Цели алгебарски израз (**полином**): рационални алгебарски израз у коме не учествује дељење изразом који садржи променљиву

Моном: израз који чине константе или променљиве, али и њихови производи (Уколико се мономи разликују само у коефицијенту или се не разликују, кажемо да су **слични**.)

Бином: збир два неслична монома

Трином: збир три међусобно неслична монома

Цели алгебарски изрази (полиноми):

$A + B = B + A$ комутативност сабирања

$(A + B) + C = A + (B + C)$ асоцијативност сабирања

$AB = BA$ комутативност множења

$(AB)C = A(BC)$ асоцијативност множења

$A(B + C) = AB + AC$ дистрибутивност („сваки са сваким")

$(A + B)(C + D) = AC + BC + AD + BD$ дистрибутивност („сваки са сваким")

$$\left.\begin{aligned}(A+B)^2 &= A^2 + 2AB + B^2\\ (A-B)^2 &= A^2 - 2AB + B^2\end{aligned}\right\}$$ квадрат бинома

$A^2 - B^2 = (A + B)(A - B)$ разлика квадрата

Додатни задаци

72. Израчунај вредност израза:

а) $(-2)^3+(-2)^2$; б) 2^5+3^3;
в) 3^4-2^6; г) $(-3)^3-(-3)^2$;
д) $-5^3\cdot(-2)^2$; ђ) $(-5)^3\cdot(-2)^2$;
е) $-(-3)^3\cdot(-2)^3$; ж) $7^2\cdot 3^2$.

73. Израчунај вредност израза:

а) $2^3+2^4-2^5$; б) $3^2-(-3)^3-3^4$;
в) $(\sqrt{2})^3+(2\sqrt{2})^3-(\sqrt{2})^6-2\sqrt{2}$;
г) $\left(-\frac{1}{2}\right)^2-\left(-\frac{1}{2}\right)^3$;
д) $0{,}1^2-\left(\frac{9}{10}\right)^2+\frac{2^2}{5}$;
ђ) $5^2\cdot 2^2-10^3+3^2\cdot 10^2$;
е) $\frac{(\sqrt{3})^2(-\sqrt{3})-3^2}{-3}\cdot\left(\frac{1}{2}\right)^4\cdot(\sqrt{2})^4$;
ж) $2^4\cdot 7^2-3^3\cdot 4^3$.

74. Одреди највећи природан број за који је исказ тачан:

а) $3^n<200$; б) $-100<(-2)^n<100$;
в) $0{,}5^n>0{,}01$; г) $\left(-\frac{1}{5}\right)^n>\frac{1}{600}$.

***75.** Сара је сабирала кубове свих једноцифрених природних бројева и закључила да је њихов збир једнак години у којој ће напунити 22 године. Које године је Сара рођена? (Куб броја је исто што и трећи степен броја.)

***76.** Реши једначину $x^4=28^2+8^3$.

77. Упрости количнике $(a,b,c,d\neq 0)$:

а) $\frac{a^4}{a^2}$; б) $\frac{b^7}{b^4}$; в) $\frac{c^{22}}{c^{20}}$; г) $\frac{(-d)^{11}}{(-d)^{10}}$.

78. Запиши изразе у облику степена производа:

а) a^3b^3; б) a^5b^5;
в) $2^8a^8b^8$; г) $\left(\frac{1}{2}\right)^4a^4b^4$;
д) $(-2)^3a^3b^3c^3$; ђ) $a^5b^5c^5d^5$.

79. Запиши изразе у облику степена количника $(b,c,d\neq 0)$:

а) $\frac{a^3}{b^3}$; б) $\frac{a^5}{b^5}$; в) $\frac{2^8a^8}{b^8}$;
г) $\frac{a^4}{2^4b^4}$; д) $\frac{(-2)^3a^3}{b^3c^3}$; ђ) $\frac{(ab)^2}{c^2d^2}$.

80. Упрости изразе:

а) $\frac{2^2\cdot 2^4}{2^3}$; б) $\frac{3^7}{3^2\cdot 3^3}$;
в) $\frac{x^5x^2}{x^3x^4}$, $(x\neq 0)$; г) $\frac{y^3y^6}{y^2y^4}$, $(y\neq 0)$;
д) $\frac{5^8:5^5}{5^4:5^3}$; ђ) $\frac{7^8\cdot 7^3}{7^8:7^3}$;
е) $\frac{a^7a^3:a^5}{a^8a^2:a^6}$, $(a\neq 0)$;
ж) $\frac{-b^2(-b)^2:b^2}{(-b)^6:b^4}$, $(b\neq 0)$.

81. Упрости израз ако је $a\neq 0$:

а) $a^7(a^3:a)\cdot a$; б) $(a^7a^3):(a\cdot a)$.

82. Провери тачност исказа за свако $x\neq 0$:

а) $x^4-x^2=x^2$; б) $x^4:x^2=x^2$;
в) $3x^2\cdot 4x^3=12x^6$; г) $(-x)^2=-x^2$;
д) $x^3:x^3=1$; ђ) $x^3\cdot x^3=x^9$;
е) $x^6:x^3=x^2$; ж) $\frac{4x^5}{2x^3}=2x^2$.

***83.** Одреди непознату x тако да исказ буде тачан:

а) $2^x\cdot 2^5=2^7$; б) $3^x:3^3=3^6$;
в) $a^{x+1}\cdot a^2=a^5\cdot a^5$;
г) $5^x\cdot 5^{x+1}\cdot 5^{x+2}=5^6$;
д) $\frac{b^{x+2}:b^x}{b^7:b^6}=b^x$, $(b\neq 0)$;
ђ) $c^x\cdot c^{x-2}=c^{x+1}$.

84. Израчунај вредност израза:

а) $\frac{\left[0{,}25^4:\left(\frac{1}{4}\right)^2\right]\cdot 0{,}5^2}{\left(2\cdot\frac{1}{8}\right)^3:\left(\frac{25}{100}\right)^2}$;

б) $\frac{\left(1\frac{1}{2}\right)^2\cdot 1{,}5^3}{\left(\frac{3}{2}\right)^8:\left(\frac{3}{4}+\frac{3}{4}\right)^4}$.

85. Израчунај вредност израза:

а) $|x-y|+|y+2|$, за $x=2$ и $y=3$;

б) $\sqrt{x^2}+2x+1$, за $x=-1$;

в) $\sqrt{(x+1)^2}-\sqrt{(y-1)^2}$, за $x=-2, y=2$;

г) $\dfrac{-|x^2-1|}{3\left|y+\dfrac{1}{3}\right|}$, за $x=0$, $y=-\dfrac{2}{3}$.

86. Израчунај степен степена $(a,b,c\neq 0)$:

а) $(a^3)^2$; **б)** $(a^2b^2)^2$; **в)** $\left[\left(\dfrac{1}{2}\right)^3 a^5b^7\right]^3$;

г) $\left(\dfrac{a^2}{b^2}\right)^2$; **д)** $\left(\dfrac{0{,}5^2}{a^3}\right)^4$; **ђ)** $\left(\dfrac{a^2b^3}{c^4}\right)^5$.

87. Израчунај вредност израза:

а) $21^3:7^3$; **б)** $\dfrac{15^5}{5^5}$; **в)** $\dfrac{0{,}02^3}{0{,}03^3}$;

г) $\dfrac{9999^2}{99^2}$; **д)** $\left(\dfrac{16}{9}\right)^4\cdot\left(\dfrac{3}{8}\right)^4$;

ђ) $1{,}5^3:0{,}3^3$; **е)** $\left(2\dfrac{1}{10}\right)^4\cdot\left(1\dfrac{3}{7}\right)^4$;

ж) $\left(4\dfrac{2}{7}\right)^3:\left(1\dfrac{1}{14}\right)^3$.

88. Упрости израз ако је $a\neq 0$:

а) $a^{10}:(a^5\cdot a^4)$; **б)** $\dfrac{(a^4)^4:(a^3)^5}{(a^3)^2}\cdot(a^2)^3$;

в) $(a^{33})^{44}-(a^{12})^{121}$;

г) $\dfrac{\left[(a^2)^2\cdot(a^2)^2\right]^3}{-(a^5)^3\cdot(a^2)^2:(a^3)^6}$.

89. Упрости израз ако су m и n природни бројеви:

а) $(a^m)^2\cdot(a^2)^m:(a^3)^m$;

б) $(a^{m+1}:a^{m-1})^2:a^3$;

в) $\left[(-a)^2\cdot(a^{m-1})^2:a^{m-1}\right]\cdot a^2$;

г) $\dfrac{a^m\cdot a^m}{(a^2)^m}$.

90. У кружић упиши одговарајући број тако да исказ буде тачан:

а) $2^{\bigcirc}=8^3$; **б)** $3^8=9^{\bigcirc}$;

в) $5^3\cdot 25^3=125^{\bigcirc}$; **г)** $16^3=2^2\cdot 4^{\bigcirc}$.

91. Запиши вредност израза у облику m^n, где су m и n природни бројеви:

а) $\dfrac{2^2\cdot 8^3\cdot 4^2}{16^2:8^2}\cdot\dfrac{1}{4}$;

б) $\dfrac{81^2\cdot 9^2:3^5}{(3^3)^2}\cdot(3^2)^2\cdot\left(\dfrac{1}{3}\right)^3$;

в) $\dfrac{25^2\cdot\left(\dfrac{1}{5}\right)^2\cdot\left(\dfrac{1}{2}\right)^4\cdot\left(100^2:10^2\right)^2}{625^4\cdot\left(\dfrac{1}{25}\right)^4:25^3}$.

***92.** Реши једначину:

а) $(a^3)^4=(a^6)^x$ за $a\notin\{-1, 0, 1\}$;

б) $\left(\dfrac{1}{2}\right)^x=\dfrac{64:2^3}{(8^2\cdot 4^2)^2}$;

в) $9^x:16^x=\left(\dfrac{3}{4}\right)^6$;

г) $\left[(2^3)^4\right]^x=(2^x)^7\cdot 32$.

93. Који број је већи:

а) 2^{15} или 3^{10}; **б)** 5^{100} или 3^{150};

в) 5^{30} или 2^{70}?

94. У кружић упиши један од знакова неједнакости (< или >) или једнакости (=) тако да исказ буде тачан:

а) $99^{99}+99^{100}\bigcirc 100^{100}$;

б) $5^{100}-5^{98}\bigcirc 4\cdot 5^{99}$;

в) $2^{50}\cdot 3^{51}\bigcirc(6^7\cdot 2^{10})^3\cdot(3^{15})^2\cdot\dfrac{1}{2}$.

95. Израчунај вредност израза $(a-b)(a^2+ab+b^2)$ ако је:

а) $a=2, b=-1$; **б)** $a=1, b=\dfrac{1}{2}$;

в) $a=3, b=2$; **г)** $a=\dfrac{1}{2}, b=-\dfrac{1}{2}$.

96. За $x=3$ израчунај вредност израза:

а) $2x^3-3x^2+4x-5$;

б) $\dfrac{x^3-x^2-8x+12}{x^2+6x+9}$;

в) $\dfrac{x^4}{9}+\dfrac{x^3}{-3}-x^2+x\cdot(-3)$.

97. Израчунај вредност израза:

а) $\dfrac{\frac{1}{2}a^2+\frac{1}{3}a-1}{3\cdot(b-2)^2}$, за $a=2$ и $b=1{,}5$;

б) $\dfrac{ab\cdot\frac{1}{c}}{\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}}$, за $a=2$, $b=3$ и $c=6$;

в) $\dfrac{a^2-b^2-c^2}{-a^2+b^2-c^2}$, за $a=-1$, $b=1$ и $c=0{,}5$.

98. Израчунај вредност израза:

а) $2\cdot 2^x-2^{x+1}+4^{x-1}$, за $x=2$;

б) $\dfrac{2^x\cdot 3^x\cdot 6}{6^{x-1}}$, за $x=5$;

в) $\sqrt{5^x-10^y}$, за $x=3$ и $y=2$.

99. Провери тачност исказа:

а) $a^3-b^3=(a-b)(a^2+ab+b^2)$, за $a=\frac{1}{2}$ и $b=\frac{1}{3}$;

б) $a^2-(a+b)^2+b^2=2ab$, за $a=0{,}5$ и $b=1{,}2$;

в) $(a-b)^2-b^2=a^2+2ab$, за $a=-\frac{1}{2}$ и $b=-3$.

100. Михајлов отац је два пута, а деда три пута старији од Михајла. Ако заједно имају 108 година, колико година има Михајло?

101. Дати су полиноми $A=3x^2-x+2$, $B=-x^2-4$, $C=3x^2-3x+3$ и $D=-x+5$. Израчунај:

а) $A+B-D$; **б)** $B-C+A$;
в) $A+B+C+D$; **г)** $(A-C)-(B-D)$;
д) $-A-D$; **ђ)** $A-[B-(C+D)]$.

102. Израчунај збир и разлику полинома A и B ако је:

а) $A=x^3+x+1$, $B=x^2-x-1$;

б) $A=a^2+ab-b^2$, $B=2a^2-\frac{ab}{2}+b^2$;

в) $A=(a-1)-(2-a)$, $B=2a-3$;

г) $A=xyz+x+y+z$, $B=xy+x-y-z$.

103. Одреди полином P ако је:

а) $P+x^2-x=2x^2+x$;

б) $x^3-1-P=x^2-1$;

в) $2P+x^2+x+1=3x^2+5x+7$;

г) $P+x-1=3x+1-P$.

104. Дати су полиноми $P=2x^2-3x+4$, $Q=(x+1)(x+2)$ и $R=-x^2+2x-1$.

а) Од производа полинома P и Q одузми полином R.

б) Од квадрата полинома R одузми збир полинома P и Q.

в) Квадрату збира полинома Q и R додај полином P.

105. Помножи бином и трином:

а) $(x+2)(x^2-3x+1)$;

б) $(2y-1)(y^2+4y-2)$;

в) $(-a^2+5a-2)(1-0^2)$;

г) $-(2-3m)(2m^2-m+7)$.

106. Среди полином:

а) $2x(x+3)-x(x-1)$;

б) $(y-2)^2-(y-3)^2$;

в) $a(a^2+a-1)-(a-1)^2+(a-2)(a+3)$;

г) $(b-3)(b^2-2b-1)+b(b-4)$.

107. Упрости израз:

а) $\frac{x}{3}(6x^2+3x-9)$;

б) $\left(\frac{a}{2}-\frac{1}{3}\right)\left(\frac{4a^2}{5}-\frac{6a}{5}\right)$;

в) $\left(y-\frac{1}{2}\right)\left(y+\frac{1}{2}\right)\cdot 4y$;

г) $(0{,}6b+0{,}3)\left(\frac{5}{3}b+10\right)$.

108. Реши једначину:

а) $2(x-3)+3x\cdot(-1)=3$;

б) $y(y+3)-(y+2)y+6=11$;

в) $(a+2)(a-2)-(a+1)(a-1)=4-2(a+2)$;

г) $a(a^3+a^2+a+2)-a^2(a^2+a+1)=a-1$.

***109.** Ако је $A=x+1$, $B=x-1$, $C=x^2-x+1$ и $D=2x+1$, среди полином:

а) $AB+C+D$; **б)** $AC-BD$;
в) $AD+BC$; **г)** $ABD-C$;
д) C^2+A^2+BD; **ђ)** $(C-B)(A+D^2)$;
е) $(A+B)^2-CD$; **ж)** $C-(A-B+C)^2$.

***110.** Среди полином:

а) $x(x+1)(x+2)-2x(1-x)(x-1)$;

б) $y^2(y-2)+y(y+1)^2-2y(y-1)(y+1)$;

в) $(a+2)(a^2-2)-(a+1)^3$;

г) $2a(a-b+1)+b(2a-2)-a(2+b)$.

***111.** Одреди непознате мономе P, Q, R тако да исказ буде тачан:

а) $x(P+2)=x^2+2x$;

б) $2y(P+1)=2y^2+Q$;

в) $P(-3a^3+Q-2a^5)=6a^6-4a^3+4a^8$;

г) $4b^2\left(P-b^2Q+\frac{1}{4}b^4\right)=-\frac{b^3}{2}+b^8+R^2$.

112. Применом формуле за разлику квадрата растави полином на производ бинома:

а) $0{,}25x^2-0{,}64$; **б)** $y^2-0{,}49z^2$;

в) $\frac{x^2}{4}-\frac{y^2}{9}$; **г)** $\frac{16}{25}a^2-\frac{25}{16}b^2$;

д) $2\frac{1}{4}a^2-1\frac{7}{9}b^2$; **ђ)** $\frac{y^2}{9}-\frac{x^2}{25}$.

113. Запиши производ бинома као разлику квадрата:

а) $\left(\frac{y}{3}-\frac{x}{2}\right)\left(\frac{x}{2}+\frac{y}{3}\right)$;

б) $\left(\frac{3}{4}ab-\frac{c}{2}\right)\left(\frac{3}{4}ab+\frac{1}{2}c\right)$;

в) $\left(\frac{x^2}{2}-\frac{y^2}{4}\right)\left(\frac{x^2}{2}+\frac{y^2}{4}\right)$;

г) $(0{,}4ab^2-1)(1+0{,}4ab^2)$.

114. Да ли је исказ тачан:

а) $\left(2x-\frac{1}{2}\right)^2=4x^2+2x+\frac{1}{4}$;

б) $\left(3x+\frac{1}{3}\right)^2=9x^2+2x+\frac{1}{3}$;

в) $(-x+1)^2=-2x+1+x^2$;

г) $(2x+2)^2=4x^2+4$?

115. Израчунај:

а) $(1+\sqrt{2})^2$; **б)** $(1-\sqrt{2})(1+\sqrt{2})$;

в) $(\sqrt{3}-\sqrt{2})(\sqrt{2}+\sqrt{3})$;

г) $(\sqrt{5}+\sqrt{7})^2$; **д)** $(\sqrt{8}-\sqrt{2})^2$;

ђ) $(\sqrt{2}+3\sqrt{3})^2-(3\sqrt{3}-\sqrt{2})^2$.

116. Помножи полиноме користећи формулу за разлику квадрата:

а) $(x^2+1)(x-1)(x+1)$;

б) $(y+5)(y^2+25)(5-y)$;

в) $(1+2xy)(1-2xy)(1+4x^2y^2)$;

г) $(3b-a)(a^2+9b^2)(a+3b)$.

117. Уместо P, Q и R напиши бар један моном тако да исказ буде тачан:

а) $(x+P)^2=x^2+2x+1$;

б) $(3a+P)^2=9a^2+Q+16b^2$;

в) $(3x-P)^2=Q-12xy^2+R$;

г) $(P-4y^4)^2=Q-2y^4+R$.

118. Применом формуле за квадрат бинома израчунај:

а) $13^2+2\cdot13\cdot17+17^2$;

б) $111^2-2\cdot111\cdot61+61^2$;

в) $90\cdot55+55^2+45^2$;

г) $33\cdot23\cdot2-23^2-33^2$;

д) $\sqrt{14{,}4^2-14{,}4\cdot8{,}8+4{,}4^2}$;

ђ) $\sqrt{2\cdot2\cdot98+98^2+4}$.

119. Одреди:

а) $a+b$ ако је $a^2+b^2=34$ и $ab=15$;

б) a^2+b^2, ако је $a-b=-5$ и $ab=150$;

в) ab ако је $a+b=1$ и $a^2+b^2=\frac{5}{8}$.

120. Испитај тачност исказа:

а) $a(a+2b)=(a+b)^2-b^2$;

б) $(a-3b)^2-(3a-b)^2=$
$=(2\sqrt{2})^2(b-a)(b+a)$;

в) $(a-b)(a+b)^2+(a-b)^2(b-a)=$
$=ab(a^2b-ab^2)$;

г) $a^2+(a+b)^2-b^2=2a(a+b)$.

---

121. Упрости израз:

а) $(2x-y)^2+y^2-2y(y+2x)$;

б) $\frac{1}{2}(x+y)(2x-2y)-y^2$;

в) $(x-\sqrt{5})(x^2+5)(x+\sqrt{5})-(x^2+2^2)^2+2(2x)^2$;

г) $(a-b)(a^2+ab+b^2)+(b-a)(b^2-2ab+a^2)$.

122. Реши једначину: **а)** $(x-1)^2+5=(x-2)^2$; **б)** $2(y+3)^2=(y-5)^2+(y-3)^2$;
в) $4(a+4)^2-2(a-2)^2=7+(2a-1)(a+1)$;
г) $(x^2+1)^2-x^4=2(x-1)^2$; **д)** $(x+1)^2+(x-1)^2=2(x-3)(x+3)$.

123. Користећи формуле за разлику квадрата и квадрат бинома израчунај:

а) $\dfrac{13^2+2\cdot13\cdot27+9^3}{44{,}5^2-19{,}5^2}$;

б) $\sqrt{23^2+46\cdot5^2+5^4}-\sqrt{50^2-14^2}$.

124. Реши једначину:

а) $(x+1)^2+(x+2)^2=(x+3)^2$;

б) $(x+5)^2+(x-3)^2+(x-2)^2-47=0$;

в) $(x-7)(x+5)+(x+1)^2=\dfrac{2x^2+8x+8}{(2+x)^2}$;

г) $(x+3)(x+5)+2=2(x+2)^2$.

125. Користећи формуле за разлику квадрата и квадрат бинома израчунај:

а) 1001^2-999^2;

б) $1001^2+999^2+2002\cdot999$.

126. Катета правоуглог троугла је дужине 7 cm, а хипотенуза је за 1 cm дужа од друге катете. Израчунај обим троугла.

***127.** Странице правоугаоника се разликују за 2 cm, а дијагонала је дужине 10 cm. Колика је површина правоугаоника?

***128.** Површина правоуглог троугла је 30 cm², а збир дужина катета је 17 cm. Колика је дужина хипотенузе?

***129.** Дужине страница правоуглог троугла су $x-2$, $x+5$ и $x+7$. Одреди x.

130. За које x су $3x-4$ и $4x$ дужине катета, а $5x-2$ дужина хипотенузе правоуглог троугла?

131. Реши једначину:

а) $x^2+x=0$; **б)** $x^2-2x=0$;

в) $3x-x^2=0$; **г)** $-7x-3x^2=0$;

д) $x^2\sqrt{3}-x=0$; **ђ)** $2x^2-x\sqrt{2}=0$;

е) $\dfrac{x^2}{4}-\dfrac{x}{2}=0$; **ж)** $\dfrac{3x}{5}-\dfrac{5}{3}x^2=0$.

***132.** Реши једначину:

а) $x^3+6x^2+9x=0$;

б) $x^3-4x^2-16x+64=0$;

в) $x^{1001}-x^{999}=0$;

г) $x^2+2x-35=0$;

д) $x^2+y^2+2x+4y+5=0$.

133. Докажи

$$(a^2+b^2)(c^2+d^2)=(ac+bd)^2+(ad-bc)^2.$$

134. Допуни полином додавањем одговарајућег слободног члана, па га запиши као квадрат бинома:

а) x^2+2x; **б)** y^2-4y;

в) a^2-10a; **г)** x^2+x;

д) $y^2+2\sqrt{3}y$; **ђ)** $4a^2-\dfrac{1}{2}a$.

***135.** Користећи идеју из претходног задатка, растави полином на чиниоце:

а) x^2+4x+3; **б)** x^2-2x-8;

в) $x^2-8x+12$; **г)** x^2+3x+2;

д) x^2+x-6; **ђ)** x^2-3x+2.

***136.** Ако је $x\neq y$ и $x^2-24x=y^2-24y$, израчунај $x+y$.

***137.** Нађи два монома чији је производ $-12x^4y^2$, а збир моном са коефицијентом 1.

***138.** Израчунај

$$\frac{124}{124\,124\,124^2-124\,124\,123\cdot124\,124\,125}.$$

***139.** Израчунај

$$\left[1-\left(\frac{1}{2}\right)^2\right]\cdot\left[1-\left(\frac{1}{3}\right)^2\right]\cdot\ldots\cdot\left[1-\left(\frac{1}{100}\right)^2\right].$$

***140.** Нађи два проста броја чија је разлика квадрата прост број. Колико има решења?

Питалице

1.	За сваки реалан број a важи $a^7 \cdot a^3 = a^{10}$.	Тачно	Нетачно
2.	За сваки реалан број $b \neq 0$ важи $b^8 : b^4 = b^4$.	Тачно	Нетачно
3.	За све природне бројеве a, b, c и d важи $\left[\left(a^b\right)^c\right]^d = a^{b+c+d}$.	Тачно	Нетачно
4.	$10^{-3} = \left(\frac{1}{10}\right)^3$	Тачно	Нетачно
5.	$8^{17} > \left(4^5\right)^5 > \left(2^7\right)^7$	Тачно	Нетачно
6.	Збир два полинома другог степена увек је полином другог степена.	Тачно	Нетачно
7.	Разлика квадрата два суседна непарна природна броја дељив је са 4.	Тачно	Нетачно
8.	За све реалне бројеве a и b важи $(a-b)^2 = (b-a)^2$.	Тачно	Нетачно
9.	За све реалне бројеве a и b важи $(2a+4b)^2 = 2(a+2b)^2$.	Тачно	Нетачно
10.	За сваки реалан број a и сваки природни број n важи $a\left(a^{n+1} - a^{n-1}\right) = a^n(a-1)(a+1)$.	Тачно	Нетачно

Предлог теста знања

1. Вредност израза $(-1)^{2023}-(-1)^{2024}+(-1)^{2025}$ је:

а) -3; **б)** -1; **в)** 0; **г)** 1; **д)** 3.

2. За сваки реалан број a полином $(a^2)^3\cdot a\cdot(a^2)^4$ једнак је полиному:

а) a^{11}; **б)** a^{12}; **в)** a^{13}; **г)** a^{14}; **д)** a^{15}.

3. Ако је $x\neq 0$ и $y\neq 0$, израз $2xy$ једнак је изразу:

а) $\dfrac{8(xy)^3}{(-2x)(-2y)}$; **б)** $\dfrac{(2xy)^3}{(-2x)^2y}$; **в)** $\dfrac{(4xy)^2}{4xy^2}$; **г)** $\dfrac{x^3y^2}{\frac{1}{2}(xy)^2}$; **д)** $\dfrac{(4x^2y^2)^2}{(2xy)^3}$.

4. Вредност израза $\left(3x^2-\dfrac{4}{3}\right):\left(x^2+\dfrac{8}{3}x+\dfrac{16}{9}\right)$ за $x=-\dfrac{1}{3}$ је:

а) -1; **б)** 1; **в)** $\dfrac{1}{3}$; **г)** $-\dfrac{1}{3}$; **д)** $\dfrac{1}{9}$.

5. Дати су полиноми $A=-x^2+2x-3$, $B=x^2+x-2$ и $C=x^2+1$. Слободан члан полинома $3(A-B)+2(C-A)$ је:

а) 2; **б)** -1; **в)** 4; **г)** 5; **д)** -3.

6. Коефицијент уз x у полиному $(x+1)^2-2(x-1)^2+(x+1)(x-1)$ је:

а) 6; **б)** 0; **в)** -2; **г)** -4; **д)** 2.

7. Исказ $(x^2-P-2)(x-3)=x^3+x^2-14x+6$ је тачан за:

а) $P=3x$; **б)** $P=4x$; **в)** $P=-4x$; **г)** $P=2x$; **д)** $P=-2x$.

8. Међу наведеним бројевима највећи је:

а) 2^{10}; **б)** 3^6; **в)** 5^4; **г)** 6^4; **д)** 10^3.

Кључни појмови (обнови пре решавања контролне вежбе)

Степен	Степен степена	Множење степена истих основа
Основа	Степен производа	Дељење степена истих основа
Изложилац	Степен количника	Степен декадне јединице
Полином	Алгебарски израз	Рационални алгебарски израз
Моном	Бројевни израз	Бројевна вредност израза
Степен монома	Слични мономи	Коефицијент монома
Нула полином	Супротан полином	Сређени облик полинома
Слободан члан	Степен полинома	Полином једне промењиве
Бином	Квадрат бинома	Извлачење заједничког чиниоца испред заграде
Трином	Разлика квадрата	Растављање полинома на чиниоце

Предлог контролне вежбе

1.1.	Упрости израз $\dfrac{a^{10}\cdot a^5 : a^8}{a^{10}:a^5}$ ако је $a\neq 0$.	**15**
1.2.	Упрости израз $\dfrac{\left(\dfrac{x}{y}\right)^5\left(\dfrac{y}{x}\right)^5(xy)^2}{\left(x^4\right)^2:\left(x^2\right)^3}$ ако је $x\neq 0$ и $y\neq 0$.	**20**
1.3.	Упрости израз $\dfrac{4^{2n-2}\cdot 4^{n+4}}{2^{4n+3}\cdot 16^{(n-2):2}}$ ако је n паран природан број.	**25**
2.1.	Среди полином $\dfrac{4}{9}(2a+3b)-\dfrac{1}{3}\left(\dfrac{a}{3}+b\right)$.	**15**
2.2.	Среди полином $x^2\left(\dfrac{x^2}{2}-1\right)-\left(x^2-4\right)\left(1+\dfrac{x^2}{2}\right)$.	**20**
2.3.	Среди полином $(2x+1)(2-3x)(x+3)-(x+4)(1-x)(6x-1)$.	**25**
3.1.	Запиши трином $a^2+4ab+4b^2$ у облику квадрата бинома.	**15**
3.2.	Запиши трином $\dfrac{x^4}{4}+2x^3+4x^2$ у облику квадрата бинома.	**20**
3.3.	Запиши трином $\dfrac{x^2y^4}{4}+\dfrac{1}{9}x^6y^2-\dfrac{1}{3}x^4y^3$ у облику квадрата бинома.	**25**
4.1.	Растави полином на чиниоце: $a-1-a(1-a)$.	**15**
4.2.	Растави полином на чиниоце: $x^4+x^3+x^2+x$.	**20**
4.3.	Растави полином на чиниоце: y^2+2y-8.	**25**

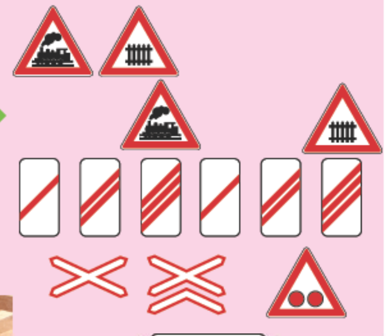
4 МНОГОУГАО

ЗАНИМЉИВОСТ

Пиротски ћилим је познат по богатству боја и шара и специфичној орнаментици. Свака шара има неку своју скривену поруку. За поједине се верује да имају магијска својства, да штите породицу, бране од невремена или било каквог зла, а за неке да развијају и подстичу мудрост и вештину говора. У основи већине орнамената налази се неки многоугао, украшен додатним мотивима.

МНОГОУГАО

Многоуглове, посебно правилне, можемо видети свуда око себе. Користе се у уметности, архитектури, грађевинарству, саобраћају... У многим храмовима, поред сакралних садржаја, можемо приметити орнаменте у облицима различитих многоуглова. Човековом оку пријају и одају утисак лепоте многи уметнички предмети, нарочито они који садрже симетричне геометријске мотиве.



4.1. Појам многоугла и број дијагонала

Многоугао представља фигуру у равни ограничену затвореном изломљеном линијом. Та линија може бити проста или имати самопресеке (уколико неке дужи имају заједничких тачака које нису крајеви). Уколико је изломљена линија проста (без самопресека), кажемо да је реч о простом многоуглу. У супротном, посреди је звездасти многоугао.

У елементарној геометрији, када се говори о многоугловима, сматра се да је многоугао прост.

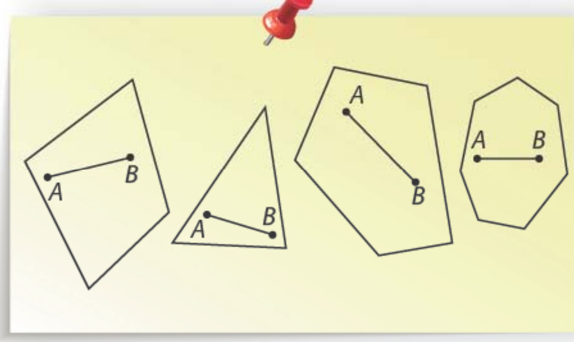
Фигура у равни ограничена затвореном изломљеном линијом без самопресека (тј. простом затвореном линијом) назива се **многоугао**. Темена те изломљене линије су **темена многоугла**, а њене дужи су **странице многоугла**. Уколико је број темена природан број n (а самим тим и број страница), кажемо да је многоугао ***n*-тоугао**.

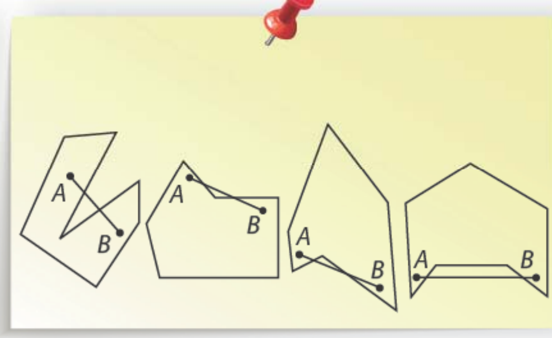
У n-тоуглу број темена је $n \geq 3$.

На слици су приказани неки многоуглови.

Међу многоугловима разликујемо конвексне и неконвексне многоуглове.

Ако за сваке две тачке *A* и *B* многоугла важи да и све остале тачке дужи *AB* припадају многоуглу, кажемо да је многоугао **конвексан**. У супротном је **неконвексан**.



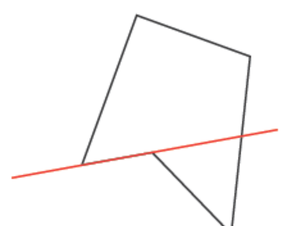


Осим ако није другачије наглашено посматраћемо само **конвексне** многоуглове.

Постоји још једно својство по коме се могу разликовати конвексни и неконвексни многоуглови. Код конвексног многоугла за сваку праву одређену страницом важи да су сва остала темена многоугла са исте стране те праве. Тај услов није испуњен код неконвексног многоугла, тј. постоји права одређена страницом тако да су нека темена многоугла са различитих страна те праве.

Поред страница многоугла, битне су нам и дужи које спајају несуседна темена многоугла.

Конвексни многоугао



Неконвексни многоугао

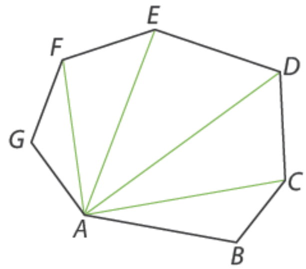
Дуж која спаја два несуседна темена многоугла назива се **дијагонала многоугла**.

Приметимо:

троугао нема дијагонале.

пример 1

На слици је приказан седмоугао $ABCDEFG$ и дијагонале које спајају теме A са несуседним теменима: AC, AD, AE и AF.



Темена B и G су суседна темену A, па су AB и AG странице.

Исти број дијагонала, четири, полази и из сваког од осталих темена овог седмоугла.

Приметимо да је број дијагонала из једног темена $4 = 7 - 3$, где је 7 укупан број темена, а 3 број темена из којих није могуће повући дијагоналу.

Одредимо број дијагонала произвољног многоугла које полазе из једног темена. Ако посматрамо једно теме n-тоугла и спојимо га са осталим несуседним теменима (њих $n - 3$), добићемо дијагонале из тог темена.

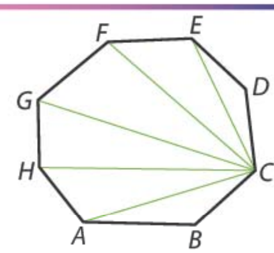
тврђење

У n-тоуглу број дијагонала које полазе из једног темена је $d_n = n - 3$.

пример 2

Колико дијагонала осмоугла полази из једног темена?

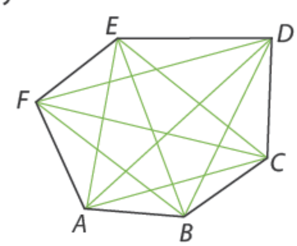
Решење: $d_8 = 8 - 3 = 5$. На слици су дијагонале чије је једно теме C.



пример 3

На слици је приказан шестоугао $ABCDEF$. Из сваког темена полазе три дијагонале ($d_6 = 6 - 3 = 3$). Колики је укупан број дијагонала овог шестоугла?

Решење: Како из сваког од шест темена полазе три дијагонале, природно би било рећи да их је $6 \cdot 3$. Међутим, у том случају бисмо сваку дијагоналу бројали два пута (нпр. дијагоналу AC бисмо бројали и као дијагоналу из темена A, али и као дијагоналу из темена C), па претходни производ морамо поделити са 2.
Зато је укупан број дијагонала шестоугла $\frac{6 \cdot 3}{2} = 9$.



Дијагонале су AC, AD, AE, BD, BE, BF, CE, CF и DF

На исти начин као у примеру можемо поступити и приликом рачунања броја дијагонала произвољног n-тоугла. Из сваког од n темена полази $d_n = n - 3$ дијагонала. Производ $n \cdot d_n$ би урачунао сваку дијагоналу два пута (из сваког од два темена дијагонале), зато претходни производ морамо поделити са два, па је укупан број дијагонала $D_n = \frac{n \cdot d_n}{2} = \frac{n \cdot (n-3)}{2}$.

тврђење

Укупан број дијагонала у n-тоуглу је $D_n = \frac{n \cdot (n-3)}{2}$.

пример 4

Одреди број дијагонала n-тоугла ако је: **а)** $n = 9$; **б)** $n = 20$; **в)** $n = 53$.

Решење: а) $D_9 = \dfrac{9 \cdot (9-3)}{2} = \dfrac{9 \cdot 6}{2} = 27$; **б)** $D_{20} = \dfrac{20 \cdot (20-3)}{2} = 170$;

в) $D_{53} = \dfrac{53 \cdot 50}{2} = 1325$.

пример 5

Ако неки многоугао има 54 дијагонале, одреди број страница тог многоугла.

Решење: $D_n = \dfrac{n(n-3)}{2} = 54$. Одавде добијамо $n(n-3) = 108 = 12 \cdot 9$, па је $n = 12$.

Напомена: Једначина $n(n-3) = 108$ има два решења у скупу реалних бројева, која добијамо користећи растављање полинома на чиниоце. Ослобађајући се заграде на левој страни и одузимањем 108 од обе стране, добијамо једначину $n^2 - 3n - 108 = 0$.

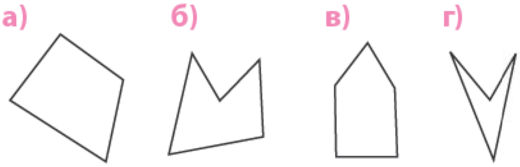
Како је $n^2 - 3n - 108 = (n+9)(n-12)$, једначина се своди на $(n+9)(n-12) = 0$, чија решења су $n = 12$ или $n = -9$. Али како број страница многоугла не може бити негативан број -9, то мора бити $n = 12$.

Домаћи задатак: Одреди за који многоугао важи $D_n + d_n = 0$, а за који $D_n = n$.

ЗАДАЦИ

1. Да ли је многоугао конвексан или неконвексан?

а) **б)** **в)** **г)**



2. Нацртај:

а) отворену изломљену линију; **б)** отворену изломљену линију без самопресека;

в) затворену изломљену линију; **г)** затворену изломљену линију са самопресеком;

д) конвексни многоугао; **ђ)** неконвексни многоугао.

3. Да ли постоји неконвексни троугао? А четвороугао? Ако постоји, нацртај га.

4. Колико постоји дијагонала из једног темена многоугла који има:

а) 5 страница; **б)** 4 темена; **в)** 13 страница; **г)** 3 унутрашња угла?

5. Нацртај петоугао $ABCDE$ и запиши све његове странице и дијагонале. Да ли петоугао има више дијагонала или страница?

6. Колико темена има многоугао коме се из једног темена може повући:

а) 1 дијагонала; **б)** 7 дијагонала; **в)** 0 дијагонала; **г)** 47 дијагонала?

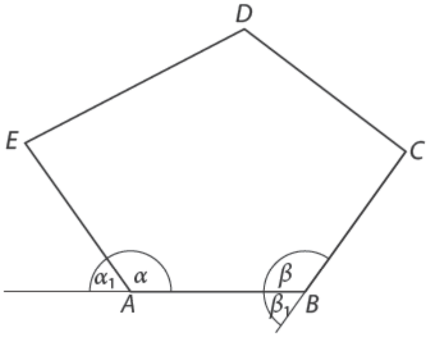
7. Колико укупно дијагонала (D_n) има многоугао са n страница ако је:

а) $n = 5$; **б)** $n = 10$; **в)** $n = 16$; **г)** $n = 22$?

8. Да ли постоји многоугао који има укупно 36 дијагонала?

4.2. Углови многоугла

Суседне странице многоугла имају заједничко теме. Праве које садрже две суседне странице одређују значајне углове многоугла. Угао који има заједничких (унутрашњих) тачака са многоуглом назива се **унутрашњи угао многоугла**. Ако је многоугао конвексан, сваки унутрашњи угао је конвексан. Угао који је упоредан унутрашњем углу је **спољашњи угао**.

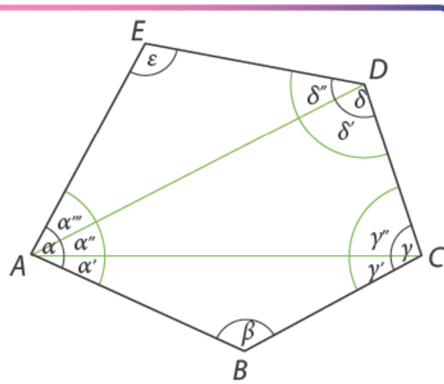


На слици су са α и α_1 означени унутрашњи и спољашњи угао код темена A. Слично, са β и β_1 су означени унутрашњи и спољашњи угао код темена B.

Број унутрашњих углова једнак је броју темена многоугла, тј. број унутрашњих углова n-тоугла је n. Број спољашњих углова је такође n.

Подсетимо се да је збир унутрашњих углова троугла $\alpha + \beta + \gamma = 180^\circ$. Можемо се запитати постоји ли слична формула и за произвољан n-тоугао и како она гласи (ако постоји).

пример 1



Посматрајмо петоугао $ABCDE$ и означимо са $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ и ε одговарајуће унутрашње углове тог петоугла. Поделимо петоугао дијагоналама из темена A на три троугла, а унутрашње углове у теменима A, C и D на три, односно два дела:

$$\alpha = \alpha' + \alpha'' + \alpha''', \quad \gamma = \gamma' + \gamma'' \quad \text{и} \quad \delta = \delta' + \delta''.$$

У троугловима ABC, ACD и ADE важи:

$180^\circ = \alpha' + \beta + \gamma'$, $180^\circ = \alpha'' + \gamma'' + \delta'$ и $180^\circ = \alpha''' + \delta'' + \varepsilon$

(јер збир унутрашњих углова у троуглу мора бити 180°).

Сабирајући претходне три једнакости добијамо

$$3 \cdot 180^\circ = (\alpha' + \beta + \gamma') + (\alpha'' + \gamma'' + \delta') + (\alpha''' + \delta'' + \varepsilon)$$
$$= (\alpha' + \alpha'' + \alpha''') + \beta + (\gamma' + \gamma'') + (\delta' + \delta'') + \varepsilon = \alpha + \beta + \gamma + \delta + \varepsilon\,.$$

Дакле, збир унутрашњих углова петоугла је $\alpha + \beta + \gamma + \delta + \varepsilon = 3 \cdot 180^\circ = 540^\circ$.

На исти начин као у примеру произвољан конвексни n-тоугао можемо поделити на $n - 2$ троугла дијагоналама из једног темена. Тада је збир унутрашњих углова n-тоугла једнак збиру унутрашњих углова свих тих троуглова, тј. $(n - 2) \cdot 180^\circ$.

тврђење

Збир унутрашњих углова n-тоугла је $S_n = (n - 2) \cdot 180^\circ$.

Специјално, за $n = 3$ или $n = 4$ добијамо већ познате збирове унутрашњих углова троугла $S_3 = (3 - 2) \cdot 180^\circ = 180^\circ$ и четвороугла $S_4 = (4 - 2) \cdot 180^\circ = 2 \cdot 180^\circ = 360^\circ$.

пример 2

Израчунај збир унутрашњих углова n-тоугла ако је: **а)** $n = 6$; **б)** $n = 8$, **в)** $n = 12$.

Решење: **а)** $S_6 = (6 - 2) \cdot 180° = 4 \cdot 180° = 720°$;

б) $S_8 = (8 - 2) \cdot 180° = 6 \cdot 180° = 1080°$;

в) $S_{12} = (12 - 2) \cdot 180° = 10 \cdot 180° = 1800°$.

пример 3

Постоји ли петоугао са унутрашњим угловима: 125°32′, 132°28′, 79°53′, 89°13′ и 112°55′?

Решење:

Збир датих углова је $125°32' + 132°28' + 79°53' + 89°13' + 112°55' = 540°1'$.

Збир унутрашњих углова петоугла мора бити $S_5 = (5 - 2) \cdot 180° = 3 \cdot 180° = 540°$. Како збир датих углова није 540°, не постоји петоугао са датим угловима.

пример 4

Сви унутрашњи углови многоугла међусобно су једнаки и сваки је осам пута већи од њему одговарајућег спољашњег угла. Одреди који је то многоугао.

Решење: Ако је α унутрашњи, а α_1 спољашњи угао, по услову задатка је $\alpha = 8 \cdot \alpha_1$, а пошто је $\alpha + \alpha_1 = 180°$, добијамо $\alpha = 160°$ и $\alpha_1 = 20°$. Сви унутрашњи углови су једнаки, па важи

$$S_n = (\underbrace{\alpha + \alpha + ... + \alpha}_{(n \text{ сабирака})}) = n \cdot \alpha = n \cdot 160°.$$

На основу претходног тврђења је $S_n = (n - 2) \cdot 180°$, одакле добијамо једначину

$$n \cdot 160° = (n - 2) \cdot 180°.$$

Њеним решавањем добијамо $n = 18$. Дакле, у питању је осамнаестоугао.

Приметимо да можемо израчунати и збир спољашњих углова. Означимо га са S_n'.

Како за сваки унутрашњи и њему одговарајући спољашњи угао важи $\alpha + \alpha_1 = 180°$, сабирајући све унутрашње и спољашње углове (којих има по n) добијамо:

$$S_n + S_n' = n \cdot 180°.$$

Већ знамо да је $S_n = (n - 2) \cdot 180° = n \cdot 180° - 360°$, одакле закључујемо да збир спољашњих углова не зависи од броја темена n и да је $S_n' = 360°$.

тврђење

Збир спољашњих углова n-тоугла је $S_n' = 360°$.

пример 5

Ако је сваки спољашњи угао n-тоугла 13°20′, одреди n.

Решење: $360° = S_n' = n \cdot 13°20'$, па је $n = \dfrac{360°}{13°20'} = \dfrac{3 \cdot 360°}{3 \cdot 13°20'} = \dfrac{1080°}{40°} = 27$.

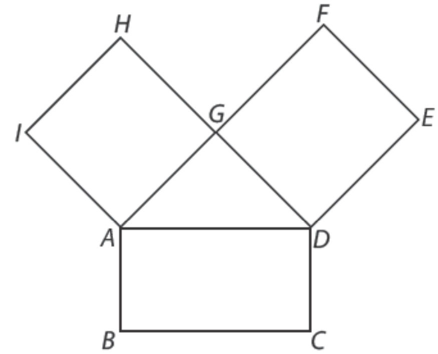
пример 6

У једном многоуглу збир унутрашњих углова је четири пута већи од збира спољашњих углова. Одреди број дијагонала тог многоугла.

Решење: Да бисмо одредили број дијагонала, морамо одредити број темена n. На основу услова задатка је $S_n = 4 \cdot S'_n$, тј. $(n-2) \cdot 180° = 4 \cdot 360°$. Одатле се лако рачуна да је $n = 10$. Тада је укупан број дијагонала $D_{10} = \dfrac{10 \cdot (10-3)}{2} = 35$.

пример 7

Израчунај збир унутрашњих углова неконвексног деветоугла $ABCDEFGHI$ на слици.



Решење: Ако са S означимо збир унутрашњих углова $\measuredangle IAB$, $\measuredangle ABC$, $\measuredangle BCD$, $\measuredangle CDE$, $\measuredangle DEF$, $\measuredangle EFG$, $\measuredangle FGH$, $\measuredangle GHI$ и $\measuredangle HIA$, видимо да је збир S једнак збиру углова три четвороугла и једног троугла, те добијамо

$$S = 3 \cdot S_4 + S_3 = 3 \cdot 360° + 180° = 1260°.$$

Пробај да нађеш одговор на следеће питање: Да ли је збир унутрашњих углова сваког неконвексног n-тоугла $(n-2) \cdot 180°$?

ЗАДАЦИ

9. Одреди збир унутрашњих углова n-тоугла ако је n: **а)** 3; **б)** 4; **в)** 6; **г)** 8.

10. Одреди n ако је збир унутрашњих углова n-тоугла:
а) 540°; **б)** 1260°; **в)** 1800°; **г)** 2340°.

11. Код ког многоугла је збир унутрашњих углова једнак збиру спољашњих углова? Код ког многоугла је три пута већи?

12. Одреди четврти угао четвороугла ако су позната три угла:
а) 100°, 110°, 80°; **б)** 60°, 90°, 90°.

13. Углови петоугла су 120°, 135° и 150°, а преостала два су једнака. Одреди њихову меру.

14. У шестоуглу три унутрашња угла су по 120°, а два спољашња по 50°. Одреди мере свих унутрашњих углова тог шестоугла.

15. Постоји ли многоугао чији је збир спољашњих углова већи од збира унутрашњих углова?

16. Ако је S_n збир унутрашњих углова n-тоугла, d_n број дијагонала из једног темена, а D_n укупан број дијагонала, попуни табелу.

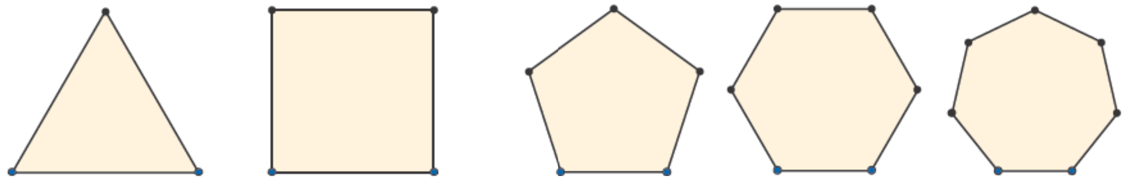
n	3				10			
d_n		3				10		
D_n			5				170	
S_n				360°				4320°

17. Постоји ли многоугао са збиром унутрашњих углова:
а) 1980°; **б)** 2610°; **в)** 1530°; **г)** 3960°?

Правилни многоуглови 4.3.

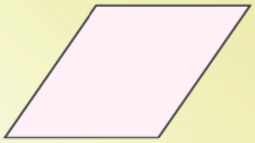
Правилни многоугао је многоугао чије су све странице међусобно једнаке и сви унутрашњи углови међусобно једнаки.

Једнакостранични троугао и квадрат су правилни многоуглови (правилни троугао и правилни четвороугао). На слици су, поред једнакостраничног троугла и квадрата, још и правилни петоугао, правилни шестоугао и правилни седмоугао.



Напоменимо да постоје многоуглови који имају само један испуњен услов, али не и други, па нису правилни. На сликама су правоугаоник, ромб и шестоугао који имају по један услов испуњен, али не и други, па нису правилни.

Сви углови су једнаки, али нису све странице једнаке.



Све странице су једнаке, али нису сви углови једнаки.

Сви углови су једнаки, али нису све странице једнаке.

Ако је многоугао правилан, сви унутрашњи углови су међусобно једнаки, као и сви спољашњи. Збир унутрашњих углова многоугла је $S_n = (n - 2) \cdot 180°$, а спољашњих $S'_n = 360°$.

Ако са α и α_1 означимо унутрашњи и спољашњи угао, важи:

$$(n - 2) \cdot 180° = n \cdot \alpha \quad \text{и} \quad 360° = n \cdot \alpha_1,$$

одакле добијамо $\alpha = \dfrac{(n-2)}{n} \cdot 180°$ и $\alpha_1 = \dfrac{1}{n} \cdot 360°$.

тврђење

Унутрашњи угао правилног n-тоугла је $\alpha = \dfrac{(n-2)}{n} \cdot 180°$.

Спољашњи угао правилног n-тоугла је $\alpha_1 = \dfrac{1}{n} \cdot 360°$.

пример 1

Одреди унутрашњи угао правилног n-тоугла за: **а)** $n = 9$; **б)** $n = 15$; **в)** $n = 25$.

Решење: а) $\alpha = \dfrac{(9-2)}{9} \cdot 180° = 140°$; **б)** $\alpha = \dfrac{(15-2)}{15} \cdot 180° = 156°$;

в) $\alpha = \dfrac{(25-2)}{25} \cdot 180° = 165{,}6° = 165°36'$.

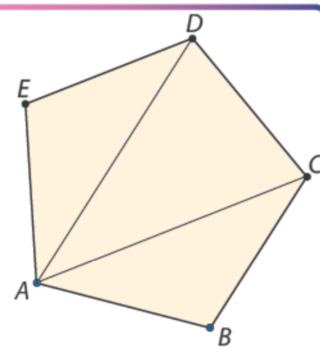
пример 2

Одреди унутрашњи угао правилног n-тоугла који има 44 дијагонале.

Решење: $44 = D_n = \frac{n \cdot (n-3)}{2}$. Следи да је $n \cdot (n-3) = 88 = 11 \cdot 8$, па је $n = 11$.

Тада је унутрашњи угао $\alpha = \frac{(11-2)}{11} \cdot 180° = \frac{1620°}{11} = \left(147\frac{3}{11}\right)^{\circ}$.

пример 3



Покажи да се дијагоналама из једног темена правилног петоугла унутрашњи угао у том темену дели на три једнака дела.

Решење: Унутрашњи угао правилног петоугла $ABCDE$

је $\alpha = \frac{(5-2)}{5} \cdot 180° = 108°$. Поделимо дијагоналама угао у темену A.

Троуглови ABC и AED су једнакокраки са углом од 108° при врху. Тада је

$$\measuredangle BAC = \measuredangle BCA = \measuredangle DAE = \measuredangle ADE = 36° \quad \text{и} \quad \measuredangle CAD = \measuredangle BAE - \measuredangle BAC - \measuredangle DAE = 36°,$$

одакле добијамо да су добијени углови у темену A једнаки.

Као што знамо, око троугла можемо описати кружницу. У троугао можемо и уписати кружницу. Да ли исто важи и код произвољног многоугла? Око ког многоугла можемо описати кружницу? У који можемо уписати кружницу?

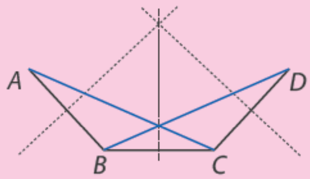
За разлику од троугла, не може се око сваког n-тоугла, где је $n \geq 4$, описати кружница, нити се може у сваки уписати. Довољно је посматрати случај $n = 4$, тј. посматрати четвороуглове. Око ромба (који није квадрат) не може се описати кружница, а у правоугаоник (који није квадрат) не може се уписати кружница. Зато се квадрат (који је правилни четвороугао) разликује од било ког другог четвороугла. Исто важи и за остале правилне многоуглове.

тврђење

Око сваког правилног многоугла може се описати кружница.

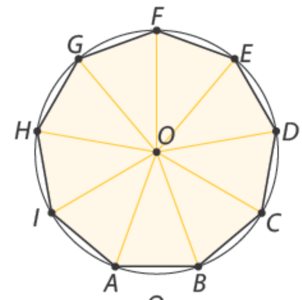
Доказ: Одраније знамо да се око троугла може описати кружница чији је центар пресек симетрала страница. Дакле, за специјалан случај $n = 3$ око једнакостраничног троугла се може описати кружница.

Докажимо да се и око правилног n-тоугла, где је $n \geq 4$, може описати кружница.

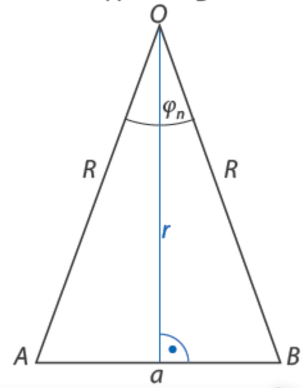


Нека су A, B, C и D четири узастопна темена правилног n-тоугла. Како је $\Delta ABC \cong \Delta BCD$ (по ставу СУС, $AB = BC = CD$ и $\measuredangle ABC = \measuredangle BCD$), полупречници кружница описаних око ΔABC и ΔBCD су једнаки. Центри тих кружница налазе се са исте стране на симетрали дужи BC, а како су оба на истом растојању од тачака B и C, они се поклапају. Дакле, кружнице описане око троуглова ABC и BCD се поклапају. Како су изабране тачке било која четири узастопна темена, ова кружница садржи сва темена тог правилног n-тоугла.

Како се око правилног многоугла може описати кружница, она се налази у пресеку симетрала страница тог многоугла. Центар описане кружнице називамо и **центром правилног многоугла**.



Посматрајмо троугао чије је једно теме O центар правилног n-тоугла, а друга два A и B су нека два суседна темена n-тоугла. Тај троугао назива се **карактеристични троугао**. Нека је R полупречник описане кружнице и a дужина странице правилног n-тоугла. Приметимо да су сви карактеристични троуглови једнакокраки и међусобно подударни (краци су једнаки R, а основица је једнака a, став ССС). Зато су и сви углови тих троуглова међусобно једнаки. Угао наспрам основице карактеристичног троугла назива се **централни угао** и означавамо га са φ_n. Како су сви централни углови једнаки, има их n, а збир им је пун угао, тј. 360°, добијамо да су сви једнаки $\varphi_n = \frac{360°}{n}$.



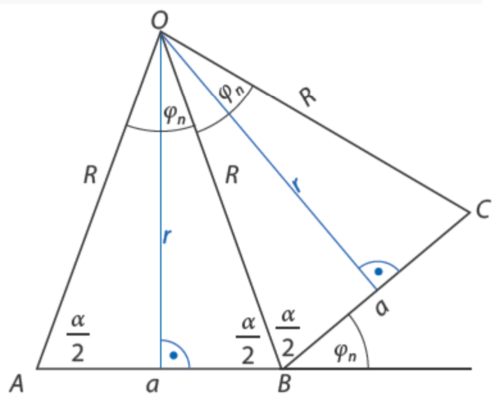
тврђење

Централни угао правилног n-тоугла је $\varphi_n = \frac{360°}{n}$.

Приметимо да су друга два угла карактеристичног троугла једнака $\frac{\alpha}{2}$, где је α унутрашњи угао правилног n-тоугла, и да због збира углова у карактеристичном троуглу важи:

$$\varphi_n + \frac{\alpha}{2} + \frac{\alpha}{2} = \varphi_n + \alpha = 180°.$$

Зато је спољашњи угао правилног n-тоугла једнак карактеристичном углу φ_n, а полуправа која полази из темена (нпр. из темена B) и садржи центар многоугла представља симетралу унутрашњег угла, нпр. $\measuredangle ABC$.



пример 4

Израчунај централни угао правилног шеснаестоугла.

Решење: $\varphi_{16} = \frac{360°}{16} = 22°30'$.

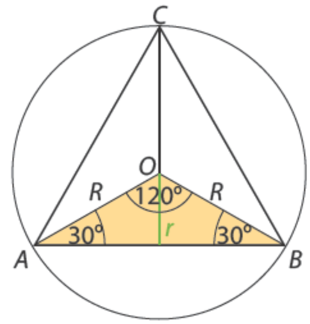
Посматрајмо висину карактеристичног троугла која одговара основици (на слици је означена са r). Она представља растојање од центра до странице n-тоугла. Како су сви карактеристични троуглови подударни, све странице n-тоугла налазе се на једнаком растојању од центра O, па се у правилни n-тоугао може уписати кружница са центром у тачки O полупречника r. Тачка O уједно представља пресек симетрала унутрашњих углова.

тврђење

У сваки правилни многоугао може се уписати кружница. Полупречник те кружнице је висина која одговара основици карактеристичног троугла.

пример 5

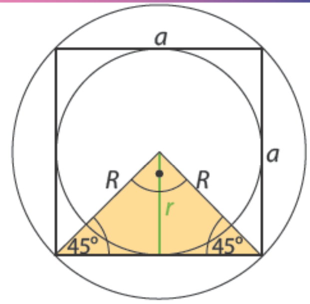
Израчунај полупречник r уписане и полупречник R описане кружнице једнакостраничног троугла странице $a = 12$ cm.



Решење: Подсети се да из Питагорине теореме произилази $r = \frac{a\sqrt{3}}{6}$ и $R = \frac{a\sqrt{3}}{3}$, па заменом $a = 12$ cm добијамо $r = 2\sqrt{3}$ cm и $R = 4\sqrt{3}$ cm.

пример 6

Израчунај полупречник r уписане и полупречник R описане кружнице квадрата странице $a = 12$ cm.



Решење: Карактеристични троугао је једнакокрако правоугли, чија је хипотенуза a, а крак $R = \frac{d}{2}$. Одатле је $r = \frac{a}{2} = 6$ cm и $R = \frac{d}{2} = \frac{a\sqrt{2}}{2} = 6\sqrt{2}$ cm.

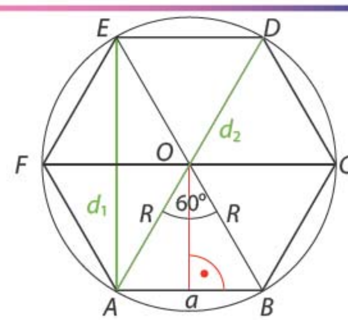
занимљивост

Правилни шестоугао у природи. Пчелиње саће сачињено је од (приближно) правилних шестоуглова повезаних заједничком страницом.

Погледајмо сада пример са правилним шестоуглом.

пример 7

Израчунај централни угао правилног шестоугла и одреди везу између странице правилног шестоугла и полупречника уписане и описане кружнице. Одреди дужине дијагонала преко дужине странице.



Решење: Централни угао је $\varphi_6 = \frac{360°}{6} = 60°$.

Зато је карактеристични троугао једнакостраничан, па је полупречник описане кружнице $R = a$, а уписане $r = \frac{a\sqrt{3}}{2}$.

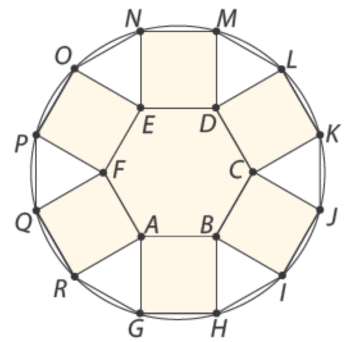
Шестоугао има $D_6 = 9$ дијагонала. Користећи подударност можемо уочити да је свака дијагонала подударна једној од дијагонала $AE = d_1$ или $AD = d_2$.

Дијагонала d_1 (мала дијагонала) представља дијагоналу ромба $AOEF$, која је два пута дужа од висине карактеристичног (једнакостраничног) троугла, па је $d_1 = 2r = a\sqrt{3}$.

Дијагонала d_2 (велика дијагонала) представља пречник описане кружнице, па је $d_2 = 2R = 2a$.

пример 8

Над сваком страницом правилног шестоугла конструисан је квадрат. Докажи да дванаест спољашњих темена тих квадрата представљају темена правилног дванаестоугла.

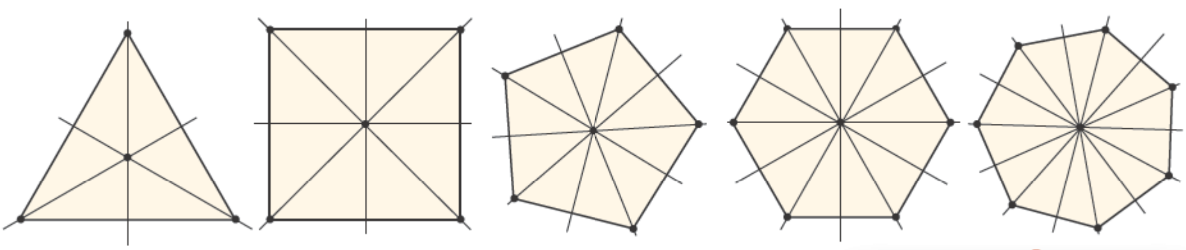


Решење: Нека је $ABCDEF$ правилни шестоугао странице a и нека су $ABHG$, $BCJI$, $CDLK$, $DENM$, $EFPO$, $FARQ$ квадрати (такође странице a).
Тада је $AR = AF = a = AB = AG$ и

$$\measuredangle GAR = 360^\circ - \measuredangle FAR - \measuredangle BAF - \measuredangle GAB = 360^\circ - 90^\circ - 120^\circ - 90^\circ = 60^\circ,$$

па је ΔARG једнакостранични странице a. Исто важи и за троуглове BHI, CJK, DLM, ENO, FPQ. Зато је $GH = HI = IJ = JK = KL = LM = MN = NO = OP = PQ = QR = RG = a$ и сви углови у теменима дванаестоугла су $60^\circ + 90^\circ = 150^\circ$. Дакле, све странице су једнаке и сви углови су једнаки, па је дванаестоугао правилан.

Правилни многоуглови имају још једну битну особеност – сви су симетричне фигуре. На слици су приказани неки правилни многоуглови и њихове осе симетрије.



Већ знамо да **једнакостранични троугао** има три осе симетрије – то су симетрале страница, које се уједно поклапају са правама које садрже симетрале углова.

Квадрат има четири осе симетрије – то су две симетрале страница и две праве које садрже симетрале углова.

Правилни шестоугао има шест оса симетрије – три праве које садрже симетрале углова и три које су симетрале страница.

Број оса симетрије једнак је броју темена n, али разликујемо два случаја: када је n непаран број и када је n паран број.

Осе симетрије су **симетрале страница** и праве које садрже **симетрале углова**.

Број оса симетрије једнак је броју темена n.

Када је реч о многоугловима са непарним бројем темена $n = 2k + 1$, где $k \in N$, симетрале страница су уједно и праве које садрже симетрале наспрамних унутрашњих углова, па је број оса симетрије једнак броју симетрала страница, тј. n.

Код правилних многоуглова са парним бројем темена $n = 2k$, где $k \in N$, $k > 1$, симетрале наспрамних страница се поклапају, али се поклапају и праве које садрже симетрале наспрамних углова, па је опет број оса симетрије једнак n. Приметимо и да је центар правилног многоугла уједно и центар симетрије када је у питању правилни многоугао са парним бројем темена.

ЗАНИМЉИВОСТ

Правилни полиедри су тела чије су стране подударни правилни многоуглови, а из сваког темена тела полази једнак број ивица.

Еуклид је доказао да постоји само пет типова правилних полиедара. Зову се још и Платонова тела. Имена су добила на основу броја страна. То су правилни тетраедар, правилни хексаедар (коцка), правилни октаедар, правилни додекаедар и правилни икосаедар. Око сваког се може описати лопта и у сваки се може уписати лопта.

ЗАДАЦИ

18. Колико оса симетрије има правилни многоугао ако му је број страница:

а) 3; **б)** 4; **в)** 6; **г)** 9; **д)** 2024; **ђ)** n (где је $n \geq 3$)?

19. Нацртај осе симетрије правилних многоуглова са три, односно четири странице.

20. Наведи пример четвороугла који није правилан:

а) чији су сви углови једнаки; **б)** чије су све странице једнаке.

21. Одреди меру спољашњег угла правилног:

а) троугла; **б)** петоугла; **в)** шестоугла; **г)** осамнаестоугла.

22. Одреди меру централног угла правилног:

а) четвороугла; **б)** осмоугла; **в)** деветоугла; **г)** десетоугла.

23. Одреди меру унутрашњег угла правилног:

а) петоугла; **б)** осмоугла; **в)** шеснаестоугла; **г)** двадесетоугла.

24. Постоји ли правилни n-тоугао у коме су једнаки унутрашњи, централни и спољашњи угао?

25. Ако је α унутрашњи, α_1 спољашњи, а φ_n централни угао правилног многоугла, одреди број оса симетрије ако је:

а) $\alpha = 175°$; **б)** $\alpha_1 = 2°30'$; **в)** $\varphi_n = 10°$;

г) $\alpha = \alpha_1$; **д)** $\alpha = \alpha_1 + \varphi_n$; **ђ)** $\alpha = 2\alpha_1 + \varphi_n$.

26. Постоји ли и ако постоји, колико има страница правилни многоугао код кога је:

а) $\alpha = 110°$; **б)** $\alpha_1 = 7°2'$; **в)** $\varphi_n = 7°$;

г) $\alpha = 108°$; **д)** $\alpha_1 = 22°30'$; **ђ)** $\varphi_n = 3°$?

27. Код ког правилног многоугла важи:

а) $\alpha_1 + 100° = \alpha$; **б)** $2\alpha_1 + 2\varphi_n = \alpha$;

в) $2\alpha = \alpha_1 + \varphi_n$; **г)** $\dfrac{\alpha}{\alpha_1 + \varphi_n} = \dfrac{3}{4}$?

Конструкција правилних многоуглова 4.4.

занимљивост

Најстарија цивилизација у којој се геометрија изучавала као наука је старогрчка цивилизација.

Најзначајније дело које се бавило геометријом у античком периоду јесте Еуклидов спис „Елементи“. У четвртој књизи овог дела Еуклид се бавио односом многоугла и круга и конструкцијама многоуглова. Еуклид је живео у Александрији (на територији данашњег Египта) око 300. године пре н. е. и сматра се оцем геометрије.

Еуклид

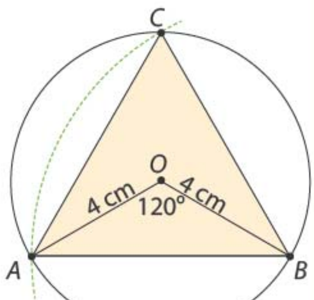
Напоменимо да није могуће конструисати лењиром и шестаром сваки правилни многоугао. На пример, могу се конструисати правилни n-тоуглови за $n \in \{3, 4, 5, 6, 8, 10, 12\}$, али не и за $n \in \{7, 9, 11\}$. Конструкције неких правилних n-тоуглова (као нпр. $n = 5$), иако могуће, нису лако изводљиве, док су за $n = 2^{k+1}$ или $n = 3 \cdot 2^{k-1}$ (где је $k \in N$) једноставне и своде се на поделе углова од 90° или 60° симетралама, па углавном конструишемо такве многоуглове. Другим речима, лако се конструишу правилни n-тоуглови за $n \in \{3, 4, 6, 8, 12, 16, 24, \ldots\}$.

Како се многоугао лако може конструисати уколико конструишемо његов карактеристични троугао, најчешће је задатак конструисати управо карактеристични троугао.

пример 1

Конструиши једнакостранични троугао ако је полупречник описане кружнице 4 cm.

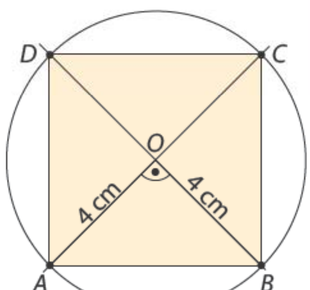
Решење: Карактеристични троугао је једнакокраки са крацима $R = 4$ cm и углом при врху од 120°. Конструишимо прво тај троугао, па онда и сам једнакостранични троугао.
Конструкција: Конструишимо једнакокраки ΔAOB тако да је $OA = OB = 4$ cm и да је $\measuredangle AOB = 120°$, а затим и кружницу са центром у O, полупречника 4 cm. Преношењем дужине AB на кружници одређујемо тачку C такву да је $AB = BC$ и добијамо тражени ΔABC.



пример 2

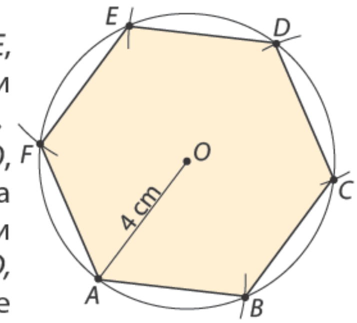
Конструиши квадрат $ABCD$ ако је полупречник описане кружнице 4 cm.

Решење: Карактеристични троугао је једнакокрако правоугли са крацима (катетама) $R = 4$ cm. Примети да се центар квадрата O налази у пресеку дијагонала.
Конструкција: Конструишимо једнакокрако правоугли ΔAOB тако да је $OA = OB = 4$ cm и да је $\measuredangle AOB = 90°$, а затим и кружницу са центром у O, полупречника 4 cm. У пресеку правих OA и OB са кружницом добијамо тачке C и D ($A \neq C$, $B \neq D$).



пример 3

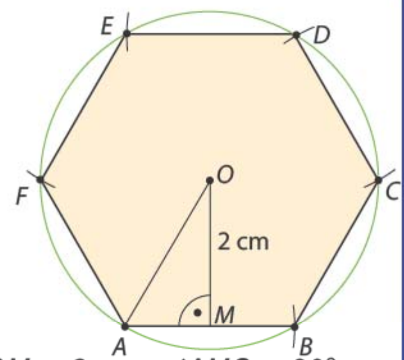
Конструиши правилни шестоугао *ABCDEF* странице $a = 4$ cm.



Решење: Карактеристични троуглови *AOB*, *BOC*, *COD*, *DOE*, *EOF* и *FOA* су једнакостранични, странице $a = 4$ cm, па је и полупречник описане кружнице тог шестоугла $a = 4$ cm.
Конструкција: Конструишимо кружницу са центром у *O*, полупречника $a = 4$ cm. Изаберимо произвољну тачку на њој и означимо је са *A*. Полазећи од те тачке и користећи шестар отвора 4 cm, одредимо на кружници тачке *B, C, D, E, F* такве да је $AB = BC = CD = DE = EF$. Спајајући добијене тачке лењиром добијамо тражени шестоугао *ABCDEF*.

пример 4

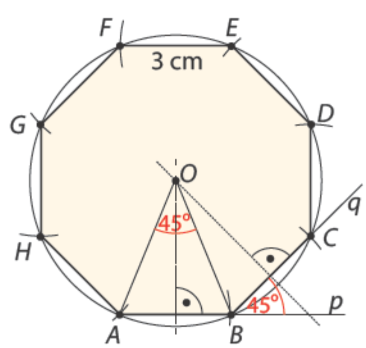
Конструиши правилни шестоугао *ABCDEF* ако је полупречник уписане кружнице у тај шестоугао $r = 2$ cm.



Решење: Висина *OM* карактеристичног троугла *AOB* представља полупречник уписане кружнице у тај шестоугао. $\measuredangle AOM = \measuredangle BOM = 30°$, $\measuredangle AMO = \measuredangle BMO = 90°$ и $OM = 2$ cm, па троуглове *AOM* и *BOM* можемо конструисати. Хипотенуза *OA* правоуглог ΔAOM је полупречник описане кружнице, а страница правилног шестоугла је $AB = OA$.
Конструкција: Конструишимо ΔAOM тако да је $OM = 2$ cm, $\measuredangle AMO = 90°$ и $\measuredangle AOM = 30°$, а затим кружницу са центром у *O*, полупречника *OA*. Полазећи од тачке *A* и преносећи шестаром растојање *OA*, одредимо на кружници тачке *B, C, D, E, F* такве да је $OA = AB = BC = CD = DE = EF$. Спајајући добијене тачке добијамо шестоугао *ABCDEF*.

пример 5

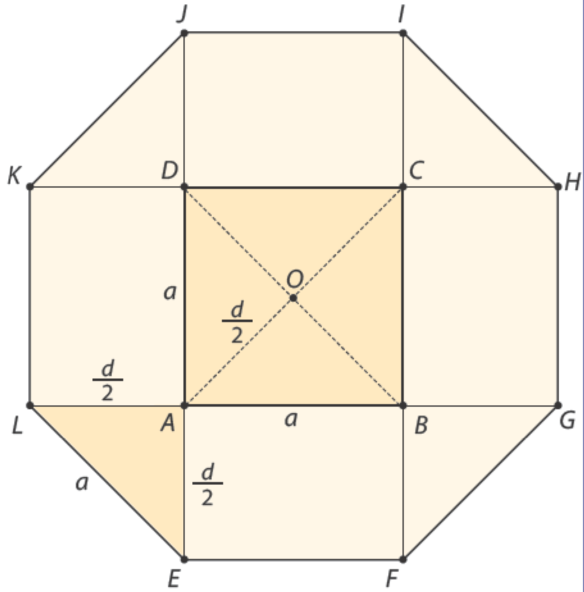
Конструиши правилни осмоугао странице $a = 3$ cm.



Решење: Спољашњи угао је $\alpha_1 = \varphi_8 = \dfrac{360°}{8} = 45°$, па две странице, нпр. *AB* и *BC*, можемо конструисати знајући спољашњи угао. Центар *O* добијамо у пресеку симетрала страница, па имамо све тачке карактеристичног ΔAOB.
Конструкција: Конструишимо $\measuredangle pBq = 45°$. На краку *Bq* одредимо тачку *C*, а у продужетку крака *Bp*, преко темена *B*, тачку *A* тако да је $AB = BC = 3$ cm.
Пресек симетрала страница *AB* и *BC* је центар *O*. Конструишимо кружницу са центром у *O*, полупречника *OA*. Полазећи од тачке *C* преносећи шестаром растојање $AB = 3$ cm, одредимо на кружници тачке *D, E, F, G, H* такве да је $AB = CD = DE = EF = FG = GH$. Спајајући добијене тачке, завршавамо конструкцију осмоугла *ABCDEFGH*.

пример 6

Решимо задатак из претходног примера на други начин. Дакле, потребно је конструисати правилни осмоугао странице $a = 3$ cm.



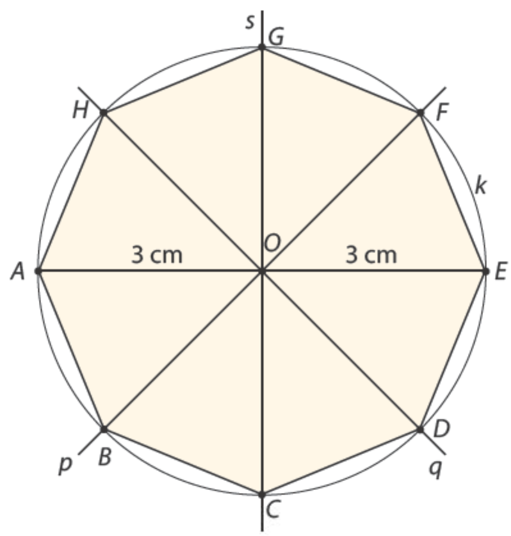
Решење 2: Нека је $ABCD$ квадрат странице $a = 3$ cm са дијагоналом $d = a\sqrt{2}$. Продужимо странице квадрата за $\frac{d}{2}$. Тиме добијамо нових осам тачака E, F, G, H, I, J, K и L. Покажимо да је тако добијени осмоугао $EFGHIJKL$ правилан, са дужином странице a.

Приметимо да су ΔLAE, ΔFBG, ΔHCI и ΔJDK међусобно подударни једнакокрако правоугли (имају по две странице једнаке $\frac{d}{2}$ и прав угао између њих), са хипотенузом $\frac{d}{2} \cdot \sqrt{2} = \frac{a\sqrt{2}}{2} \cdot \sqrt{2} = a$. Правоугаоници $AEFB$, $BGHC$, $CIJD$ и $DKLA$ су сви међусобно подударни, па је и $EF = GH = IJ = KL = a$. Тиме смо добили да су све странице осмоугла једнаке. Такође су и сви углови једнаки $90^\circ + 45^\circ = 135^\circ$, па је осмоугао $EFGHIJKL$ правилан.

Конструкција: Конструишимо квадрат $ABCD$ странице $a = 3$ cm и одредимо центар O тог квадрата у пресеку његових дијагонала. На продужецима страница квадрата конструишимо тачке E, F, G, H, I, J, K и L на удаљености OA од одговарајућих темена A, B, C и D као на слици. Добијене тачке E, F, G, H, I, J, K и L граде тражени осмоугао.

пример 7

Конструиши правилни осмоугао $ABCDEFGH$ најдуже дијагонале $d = 6$ cm.



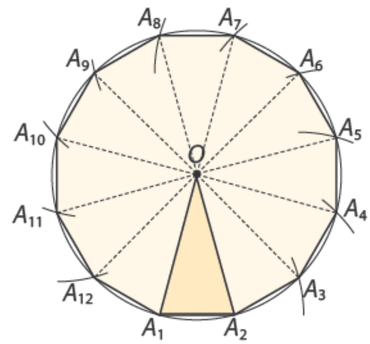
Решење: Приметимо да најдужа дијагонала спаја два наспрамна темена и да садржи центар описане кружнице, који је уједно и средиште те дијагонале. Како је централни угао $\varphi_8 = 45^\circ$, дијагонале AE и CG, односно BF и DH су међусобно нормалне.

Конструкција: Конструишимо дуж $AE = d = 6$ cm, а затим њену симетралу s. Означимо са O пресек те симетрале и саме дужи AE. Конструишимо праве p и q које деле углове одређене са s и AE на пола, као и кружницу k са центром у O, полупречника OA. У пресеку правих s, p и q са кружницом k добијамо преосталих шест тачака осмоугла.

пример 8

Конструиши правилни дванаестоугао

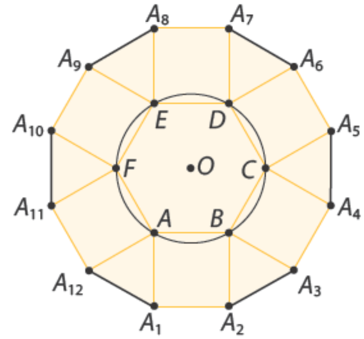
$A_1\,A_2\,A_3\,A_4\,A_5\,A_6\,A_7\,A_8\,A_9\,A_{10}\,A_{11}\,A_{12}$ странице $a = 1$ cm.



Решење 1: Углови карактеристичног троугла су $\varphi_{12} = 30°$ и $\dfrac{\alpha}{2} = \dfrac{180° - \varphi_{12}}{2} = 75°$. Како те углове можемо конструисати, можемо конструисати и карактеристични троугао, а тиме и сам дванаестоугао.

Конструкција: Конструишимо карактеристични троугао A_1OA_2 такав да је $A_1A_2 = 1$ cm и да је $\measuredangle OA_1A_2 = \measuredangle OA_2A_1 = 75°$. Потом конструишимо кружницу са центром O, полупречника OA_1 и на њој тачке A_3, A_4, ... , A_{12} такве да је $A_1A_2 = A_2A_3 = A_3A_4 = A_4A_5 = A_5A_6 = A_6A_7 = A_7A_8 = A_8A_9 = A_9A_{10} = A_{10}A_{11} = A_{11}A_{12}$.

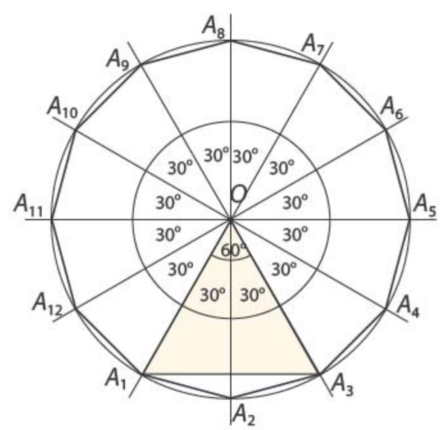
Решење 2: Користећи пример 8 у претходној лекцији, конструкција се може извршити и на следећи начин.
Конструкција: Конструишимо правилни шестоугао странице $a = 1$ cm, а затим над сваком страницом шестоугла конструишимо квадрат. Темена тих квадрата су темена правилног дванаестоугла странице $a = 1$ cm.



пример 9

Конструиши правилни дванаестоугао чија је најкраћа дијагонала $d = 3$ cm.

Решење: Нека је $A_1A_2A_3A_4A_5A_6A_7A_8A_9A_{10}A_{11}A_{12}$ тражени многоугао. Дужина сваке дијагонале је једнака некој од дужина дијагонала A_1A_3, A_1A_4, A_1A_5, A_1A_6 или A_1A_7. Најкраћа међу њима је A_1A_3. У троуглу A_1OA_3 је $\measuredangle A_1OA_3 = 2 \cdot \varphi_{12} = 60°$ и $OA_1 = OA_3$, па је троугао A_1OA_3 једнакостранични, странице $d = 3$ cm. Сада знамо полупречник описане кружнице OA_1, па користећи централни угао $\varphi_{12} = 30°$ и описану кружницу, лако можемо конструисати дванаестоугао (а можемо искористити и то да је O центар симетрије дванаестоугла).

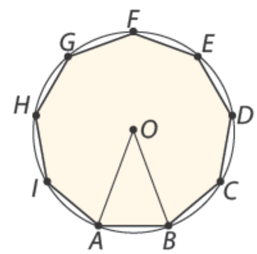


Конструкција: Конструишимо једнакостранични троугао A_1OA_3 странице $d = 3$ cm и кружницу k са центром у O, полупречника OA_1 и на њој тачке A_2, A_4, ... , A_{12} такве да је $\measuredangle A_1OA_2 = \measuredangle A_2OA_3 = \measuredangle A_3OA_4 = ... = \measuredangle A_{11}OA_{12} = 30°$.

Као што смо на почетку лекције нагласили, неке правилне многоуглове не можемо конструисати лењиром и шестаром али их можемо нацртати помоћу угломера.

пример 10

Нацртај правилни деветоугао странице $a = 1$ cm.



Решење: Централни угао правилног деветоугла је $\varphi_9 = \dfrac{360°}{9} = 40°$, а унутрашњи угао је $\alpha = 180° - \varphi_9 = 140°$, па су углови на основици карактеристичног троугла једнаки $\dfrac{\alpha}{2} = 70°$. Помоћу угломера нацртај карактеристични ΔAOB такав да је $AB = 1$ cm и $\measuredangle OAB = \measuredangle OBA = 70°$. Наставак је сличан претходним примерима. Конструишимо кружницу са центром у O, полупречника OA и на њој тачке C, D, E, F, G, H, I такве да је $AB = BC = CD = DE = EF = FG = GH = HI$.

ЗАДАЦИ

28. Конструиши правилни n-тоугао странице 5 cm ако је n:

а) 3; **б)** 4; **в)** 6; **г)** 8.

29. У круг полупречника 5 cm упиши:

а) једнакостранични троугао; **б)** квадрат;
в) правилни дванаестоугао; **г)** правилни шеснаестоугао.

30. Око круга полупречника 5 cm опиши:

а) једнакостранични троугао; **б)** квадрат;
в) правилни шестоугао; **г)** правилни осмоугао.

31. Конструиши правилни шестоугао $ABCDEF$ са центром у O, у коме је M средиште странице AB, ако је:

а) $AB = 5$ cm; **б)** $AC = 5$ cm; **в)** $AD = 8$ cm;
г) $AO = 4{,}5$ cm; **д)** $MO = 4$ cm.

32. Дате су тачке A и O. Конструиши једнакостранични ΔABC чији је центар у O.

33. Дате су права p и тачка A ван ње. Конструиши једнакостранични ΔABC коме је права p симетрала странице AB.

34. Дате су права p и тачка A ван ње. Конструиши квадрат $ABCD$ такав да се тачке B и D налазе на правој p.

35. За две дате тачке конструиши квадрат чије су те тачке несуседна темена.

36. Дате су права p и тачка A ван ње. Конструиши квадрат $ABCD$ такав да је права p симетрала странице CD.

37. Дате су тачке A и O. Конструиши правилни шестоугао $ABCDEF$ коме је тачка O центар.

38. Дате су тачке A и C. Конструиши правилни шестоугао $ABCDEF$.

39. Дате су права p и тачка A ван ње. Конструиши правилни шестоугао $ABCDEF$ такав да права p садржи тачке:

а) B и D; **б)** C и F; **в)** E и C; **г)** E и D.

40. Ако је дат правилни n-тоугао уписан у круг, опиши конструкцију правилног многоугла са два пута више страница уписаног у исти круг.

41. Ако је дат правилни многоугао са $2n$ страница уписан у круг, опиши конструкцију правилног n-тоугла уписаног у исти круг.

4.5. Обим и површина многоугла

Са појмовима обима и површине појединих фигура упознали смо се још у млађим разредима, нпр. обим правоугаоника чије су странице дужина a и b је $O=2(a+b)$, а површина $P=ab$.

Када је реч о троуглу чије су странице дужина a, b и c, а одговарајуће висине h_a, h_b и h_c, обим је $O=a+b+c$, а површина $P=\frac{a\cdot h_a}{2}=\frac{b\cdot h_b}{2}=\frac{c\cdot h_c}{2}$.

Обим произвољног n-тоугла $A_1A_2A_3...A_{n-1}A_n$ једнак је збиру дужина његових страница:

$$O=A_1A_2+A_2A_3+...+A_{n-1}A_n+A_nA_1.$$

Специјално, обим правилног n-тоугла странице a је $O=na$.

пример 1

Странице петоугла су $a=1$ cm, $b=2{,}2$ cm, $c=1{,}4$ cm, $d=0{,}2$ dm и $e=19$ mm. Одреди његов обим.

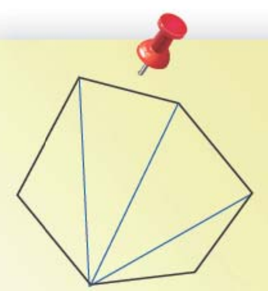
Решење: $d=0{,}2$ dm $=2$ cm и $e=19$ mm $=1{,}9$ cm, па је обим $O=a+b+c+d+e=8{,}5$ cm.

пример 2

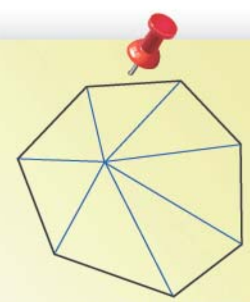
Колико метара жице је потребно да би се оградио плац облика правилног дванаестоугла странице 15,5 m ако се ограда поставља са осам редова жице?

Решење: Нека је O_{12} обим дванаестоугаоног плаца странице $a=15{,}5$ m. Како је број редова 8, то је потребно $8\cdot 12a=8\cdot 12\cdot 15{,}5$ m $=1488$ m жице.

Када је посреди површина произвољног многоугла, не можемо дати неку уопштену формулу (осим у специјалним ситуацијама), али можемо уочити да сваки конвексан многоугао можемо поделити на троуглове, нпр. користећи дијагонале из једног темена или спајањем произвољне унутрашње тачке са теменима многоугла. Тако површину многоугла можемо израчунати сабирањем површина добијених троуглова. На цедуљама су примери подела на троуглове.



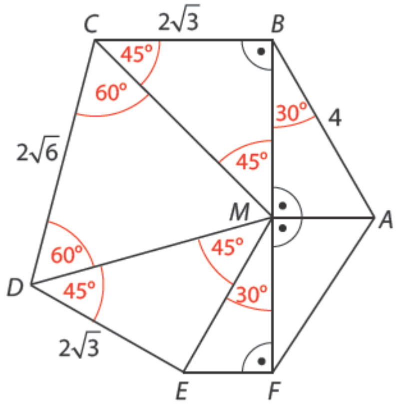
подела на троуглове дијагоналама из једног темена



подела на троуглове спајањем тачке унутар многоугла са теменима

пример 3

Нађи површину шестоугла *ABCDEF* са слике.

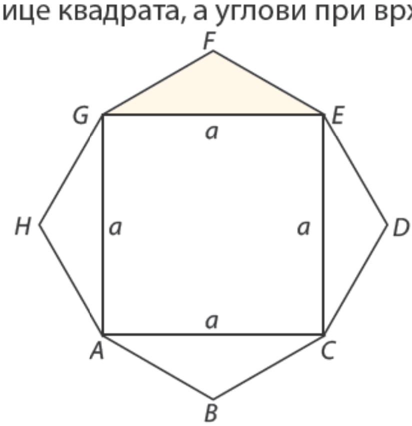


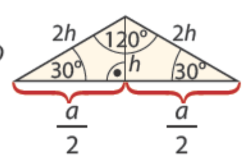
Решење: Шестоугао са слике је подељен на пет правоуглих троуглова и један једнакостраничан троугао странице $2\sqrt{6}$. Правоугли троуглови *ABM* и *EFM* имају један оштар угао 30°. Зато су катете троугла *ABM* једнаке $AM=\dfrac{AB}{2}=2$ и $BM=2\sqrt{3}$, док је хипотенуза троугла *EFM* једнака $EM=ED=2\sqrt{3}$, а катете $EF=\dfrac{EM}{2}=\sqrt{3}$ и $FM=\dfrac{EM\sqrt{3}}{2}=3$.
Површина шестоугла једнака је збиру површина појединачних троуглова:

$$P=P_{ABM}+P_{MBC}+P_{CDM}+P_{DEM}+P_{EFM}+P_{FMA}$$
$$=2\sqrt{3}+6+6\sqrt{3}+6+\frac{3\sqrt{3}}{2}+3=15+\frac{19\sqrt{3}}{2}.$$

пример 4

Израчунај обим и површину осмоугла *ABCDEFGH* који се добија када на квадрат *ACEG* странице $a=6$ cm споља конструишемо једнакокраке троуглове *ABC*, *CDE*, *EFG* и *GHA* чије су основице странице квадрата, а углови при врху 120°.





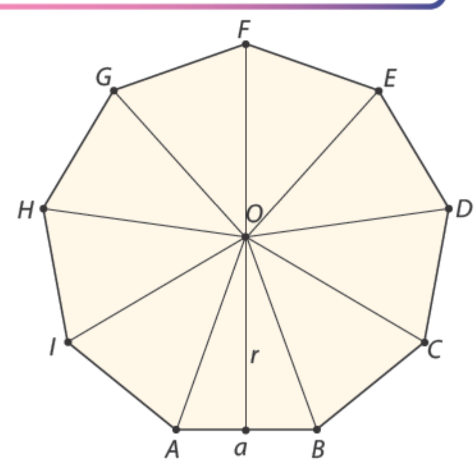
Решење: Једнакокраки троуглови су међусобно подударни. Због углова од 30° на основици једнакокраког троугла, користећи Питагорину теорему, добијамо да су краци једнакокраког троугла два пута дужи од висине која одговара основици и да је $h=\dfrac{a\sqrt{3}}{6}=\sqrt{3}$ cm.

Обим је $O=AB+BC+CD+DE+EF+FG+GH+HA=8\cdot 2h=16h=16\sqrt{3}$ cm,

а површина $P=P_{ABC}+P_{CDE}+P_{EFG}+P_{GHA}+P_{ACEG}=4\cdot\dfrac{ah}{2}+a^2=\left(12\sqrt{3}+36\right)$ cm².

Напомена: Све странице овог осмоугла су једнаке, али углови нису, па он није правилан.

Код правилних многоуглова, приликом поделе на троуглове, најједноставније је користити центар многоугла и поделу на карактеристичне троуглове. Како су карактеристични троуглови међусобно подударни, то је површина правилног *n*-тоугла $P=n\cdot P_1$, где је P_1 површина једног карактеристичног троугла.



Висина која одговара основици *a* тог троугла једнака је полупречнику *r* уписане кружнице многоугла, па је $P_1=\dfrac{ar}{2}$.

Зато је $P=\dfrac{nar}{2}$.

тврђење

Површина правилног n-тоугла странице a и полупречника уписане кружнице r је

$$P = \frac{nar}{2}.$$

пример 5

Површина правилног шестоугла је $6\sqrt{3}$ cm². Одреди дужину странице тог шестоугла.

Решење: Како је правилни шестоугао састављен од шест једнакостраничних троуглова странице a и површине $\frac{a^2\sqrt{3}}{4}$, површина шестоугла је

$$P = 6 \cdot \frac{a^2\sqrt{3}}{4} = \frac{3a^2\sqrt{3}}{2}.$$

Заменом вредности $P = 6\sqrt{3}$ cm² у претходну једнакост добијамо једначину $\frac{3a^2\sqrt{3}}{2} = 6\sqrt{3}$ cm², чије је решење $a = 2$ cm.

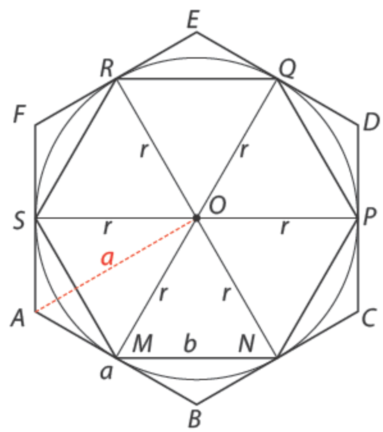
пример 6

Око круга полупречника r описан је правилни шестоугао $ABCDEF$ и у круг је уписан правилни шестоугао $MNPQRS$. Одреди однос обима и однос површина шестоуглова $ABCDEF$ и $MNPQRS$.

Решење: Ако са a означимо страницу шестоугла $ABCDEF$, а са b страницу шестоугла $MNPQRS$, тада је $r = \frac{a\sqrt{3}}{2}$ и $b = r$.

$$\frac{O_1}{O_2} = \frac{6a}{6b} = \frac{a}{b} = \frac{\frac{2r}{\sqrt{3}}}{r} = \frac{2}{\sqrt{3}}$$

$$\frac{P_1}{P_2} = \frac{\frac{3a^2\sqrt{3}}{2}}{\frac{3b^2\sqrt{3}}{2}} = \frac{a^2}{b^2} = \left(\frac{a}{b}\right)^2 = \left(\frac{2}{\sqrt{3}}\right)^2 = \frac{4}{3}$$

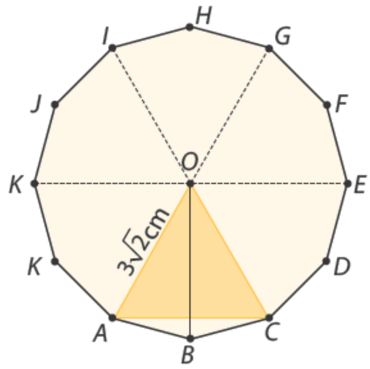


Дакле, однос обима је $2 : \sqrt{3}$, а однос површина $4 : 3$.

Напомена: Примети да је однос обима једнак односу страница $a : b$, а однос површина једнак односу квадрата страница $a^2 : b^2$. Слично важи и за односе обима и површина карактеристичних троуглова ABO и MNO, па смо ове односе могли директно да израчунамо и из карактеристичних троуглова.

пример 7

Израчунај површину правилног дванаестоугла уписаног у круг пречника $6\sqrt{2}$ cm.



Решење: Пречник описане кружнице дванаестоугла је $6\sqrt{2}$ cm, па је полупречник $3\sqrt{2}$ cm. Четвороугао $OABC$ је делтоид (јер је $OA = OC$ и $AB = BC$), а дванаестоугао можемо поделити на шест подударних делтоида. Зато је површина дванаестоугла $P = 6P_{OABC}$, где је P_{OABC} површина делтоида $OABC$. Једнакокраки ΔOAC има угао при врху $\measuredangle AOC = 2\varphi_{12} = 60°$, па је зато и једнакостранични. Следи $AC = OA = OB = OC$, тј. делтоид $OABC$ има једнаке дијагонале $AC = OB = 3\sqrt{2}$ cm.

Подсетник: Површина делтоида чије су дијагонале d_1 и d_2, је $\dfrac{d_1 \cdot d_2}{2}$.

Површина делтоида је $P_{OABC} = \dfrac{AC \cdot OB}{2} = \dfrac{3\sqrt{2} \cdot 3\sqrt{2}}{2}$ cm^2 = 9 cm^2, па је $P = 6P_{OABC} = 54$ cm^2.

ЗАДАЦИ

42. Израчунај обим петоугла чије су дужине страница (у cm): 1; 2,3; $\dfrac{6}{5}$; 1,8; $1\dfrac{3}{4}$.

43. Обим шестоугла је 14 cm. Три странице су дужине 2,5 cm, а две странице су дужине 2 cm. Одреди дужину шесте странице.

44. Напиши формулу за обим правилног n-тоугла који има 14 дијагонала и дужину странице x.

45. Напиши формулу за обим правилног n-тоугла који има збир унутрашњих углова 1620° и дужину странице y.

46. Дужина најдуже дијагонале правилног шестоугла је $\sqrt{2025}$ cm. Колики је обим?

***47.** Два правилна многоугла имају исту дужину странице, а један има две странице и 19 дијагонала више. Ако је обим мањег многоугла 49 cm, одреди обим већег многоугла.

***48.** У облику продужене пропорције запиши однос дужина страница правилног троугла, четвороугла и шестоугла уписаних у исти круг.

49. Напиши формулу за површину правилног многоугла са n страница изражену преко дужине странице a и полупречника уписаног круга r ако је:

а) $S_n = 1800°$; **б)** $D_n = 44$; **в)** $d_n = 357$;
г) централни угао 22°30'; **д)** спољашњи угао 15°.

50. Израчунај обим и површину једнакостраничног троугла ако је:

а) $a = 3$ cm; **б)** $R = \sqrt{3}$ cm; **в)** $r = \sqrt{6}$ cm.

51. Израчунај обим и површину квадрата ако је:

а) $a = 2$ cm; **б)** $d = 2$ cm; **в)** $R = \sqrt{2}$ cm; **г)** $r = \sqrt{2}$ cm.

52. Израчунај обим и површину правилног шестоугла ако је:

а) $a = 5$ cm; **б)** $R = 4$ cm; **в)** $r = \sqrt{3}$ cm;

г) краћа дијагонала $3\sqrt{3}$ cm; **д)** дужа дијагонала 12 cm.

4.6. Ортоцентар и тежиште троугла

У геометрији троугла (а самим тим и у њеној примени), постоје четири значајне тачке. Са две смо се већ упознали у шестом разреду – то су центар уписане и центар описане кружнице троугла. Друге две су ортоцентар и тежиште, које обрађујемо у овој лекцији.

подсетник

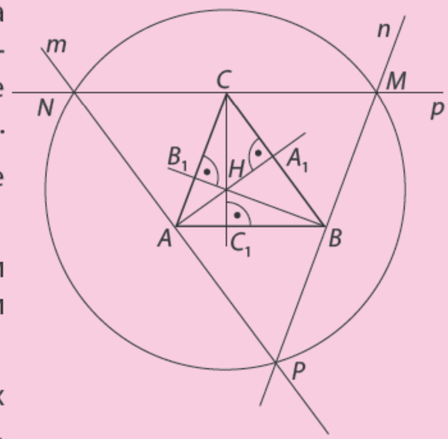
Пресек симетрала унутрашњих углова троугла је **центар уписане кружнице**. Он се увек налази у унутрашњости троугла.

Пресек симетрала страница троугла је **центар описане кружнице**. Ако је троугао оштроугли, он се налази у унутрашњости троугла, уколико је троугао тупоугли, налази се у спољашњости троугла, а ако је троугао правоугли, центар описане кружнице је средиште хипотенузе.

Висина троугла је дуж чији су крајеви теме троугла и подножје нормале из тог темена на праву која садржи наспрамну страницу.

тврђење

Праве одређене висинама троугла секу се у једној тачки.



Доказ: Нека је дат троугао ABC. Означимо са AA_1, BB_1 и CC_1 висине из темена A, B и C троугла ABC. Треба доказати да се три праве које садрже дужи AA_1, BB_1 и CC_1 секу у једној тачки.

Кроз тачку A повуцимо праву m такву да је $m \parallel BC$. Како је $BC \perp AA_1$, то је $m \perp AA_1$.

Слично, кроз тачке B и C повуцимо праве n и p такве да је $n \parallel CA$ и $p \parallel AB$. Тада је $n \perp BB_1$ и $p \perp CC_1$.

Означимо са M, N и P заједничке тачке правих n и p, m и p, односно m и n. Дужи AA_1, BB_1 и CC_1 су нормалне на странице троугла MNP, тј. $NP \perp AA_1$, $PM \perp BB_1$ и $MN \perp CC_1$.

$ABCN$, $APBC$ и $ABMC$ су паралелограми јер су им паралелне наспрамне странице, па су одговарајуће наспрамне странице једнаке, тј. $BC = PA = AN$, $AC = PB = BM$ и $AB = NC = CM$. Другим речима, A, B и C су средишта страница ΔMNP јер је $PA = AN$, $PB = BM$ и $NC = CM$.

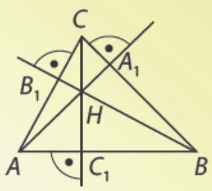
Резимирајмо шта смо доказали:

$$\left.\begin{array}{l} A \text{ је средиште странице } NP \text{ и } AA_1 \perp NP; \\ B \text{ је средиште странице } PM \text{ и } BB_1 \perp PM; \\ C \text{ је средиште странице } MN \text{ и } CC_1 \perp MN. \end{array}\right\}$$

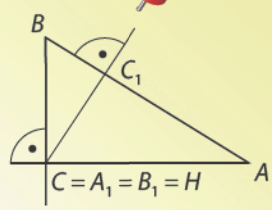
Следи да су праве које садрже висине AA_1, BB_1 и CC_1 троугла ABC уједно и симетрале страница ΔMNP, па се оне секу (у центру описане кружнице ΔMNP). Пресечну тачку правих које садрже висине троугла обично означавамо словом H.

Тачка H, која се добија као пресек правих одређених висинама троугла, назива се **ортоцентар** троугла.

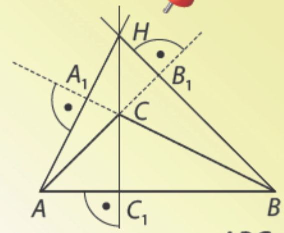
Уколико је троугао оштроугли, ортоцентар се налази унутар троугла, ако је правоугли, ортоцентар је теме правог угла, а уколико је тупоугли, ортоцентар се налази ван троугла.



оштроугли троугао ABC



правоугли троугао ABC



тупоугли троугао ABC

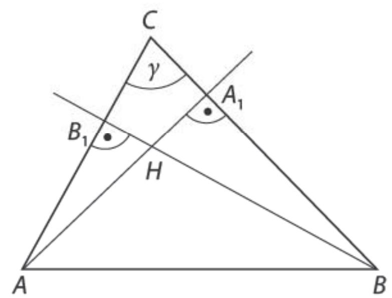
пример 1

Нека је H ортоцентар оштроуглог троугла ABC. Докажи да су углови $\measuredangle HAC$ и $\measuredangle HBC$ једнаки, а да су углови $\measuredangle ACB$ и $\measuredangle AHB$ суплементни.

Решење: Нека су A_1, B_1 подножја висина из темена A, B и нека γ означава угао код темена C. Како је збир углова у троуглу 180°, посматрајући правоугле троуглове CAA_1 и CBB_1, важи

$$\measuredangle HAC = \measuredangle A_1AC = 90^\circ - \gamma = \measuredangle B_1BC = \measuredangle HBC.$$

Како је збир углова у четвороуглу 360°, посматрајући четвороугао CA_1HB_1 са два права угла и углом $\measuredangle A_1HB_1 = \measuredangle AHB$, важи



$$\measuredangle ACB = \gamma = 360^\circ - 90^\circ - 90^\circ - \measuredangle A_1HB_1 = 360^\circ - 90^\circ - 90^\circ - \measuredangle AHB = 180^\circ - \measuredangle AHB,$$

па су $\measuredangle ACB$ и $\measuredangle AHB$ суплементни.

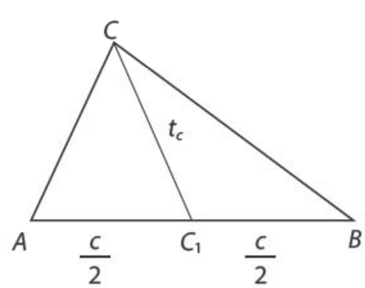
Остало је још да се упознамо и са четвртом значајном тачком троугла. Како бисмо је дефинисали, потребно је да се прво упознамо са појмом тежишне дужи.

Дуж која спаја теме троугла са средиштем наспрамне странице назива се **тежишна дуж** (тежишна линија).

На слици је приказана тежишна дуж

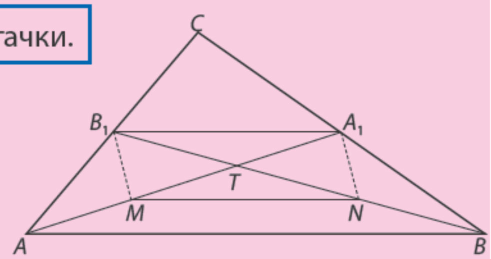
$$t_c = CC_1,$$

где је C_1 средиште дужи AB.



тврђење

Тежишне дужи троугла секу се у једној тачки.



Доказ: Нека су A_1 и B_1 средишта страница BC и AC троугла ABC. Тада су AA_1 и BB_1 тежишне дужи, а A_1B_1 представља средњу линију троугла ABC, па је $A_1B_1 \parallel AB$ и $A_1B_1 = \frac{1}{2}AB$.

Означимо са T пресек тежишних дужи AA_1 и BB_1, а са M и N средишта дужи AT и BT. Тада је MN средња линија троугла ABT, па је $MN \parallel AB$ и $MN = \frac{1}{2}AB$.

Одатле добијамо да је $MN \parallel A_1B_1$ и $MN = A_1B_1$, па је MNA_1B_1 паралелограм. У паралелограму се дијагонале полове, па важи $TA_1 = MT$ и $TB_1 = NT$, а како су M и N средишта дужи AT и BT, важи и $AM = MT$ и $BN = NT$.

Резимирајмо шта смо доказали:

$$\left.\begin{array}{l} TA_1 = MT = AM;\ \text{тј. } AT = 2 \cdot TA_1 \text{ или } AT : TA_1 = 2:1; \\ TB_1 = NT = BN;\ \text{тј. } BT = 2 \cdot TB_1 \text{ или } BT : TB_1 = 2:1. \end{array}\right\}$$

Следи да тежишна дуж BB_1 сече тежишну дуж AA_1 у тачки T, која дели AA_1 у односу $2:1$.

На исти начин доказујемо да тежишна дуж CC_1 такође сече тежишну дуж AA_1 у тачки која дели AA_1 у односу $2:1$. Та тачка онда мора бити тачка T, за коју смо већ установили да дели AA_1 у односу $2:1$. Следи да се све тежишне дужи AA_1, BB_1 и CC_1 секу у тој истој тачки T и важи

$$AT : TA_1 = BT : TB_1 = CT : TC_1 = 2:1.$$

Тачка T, која се добија као пресек тежишних дужи, назива се **тежиште троугла**.

Тежиште троугла налази се **унутар троугла** и дели сваку тежишну дуж у односу

$$2:1,$$

где је дужи део од темена до тежишта.

У **једнакостраничном троуглу** се поклапају све четири значајне тачке:

1) тежиште,
2) ортоцентар,
3) центар уписане кружнице,
4) центар описане кружнице.

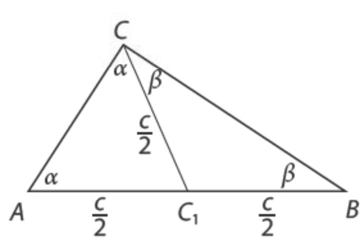
пример 2

Ако је тежишна линија троугла једнака половини странице којој одговара, тада је тај троугао правоугли. Докажи.

Решење: Нека је CC_1 тежишна линија која задовољава услов задатка, тј. нека је $CC_1 = AC_1 = BC_1 = \frac{c}{2}$.

Тада су ΔAC_1C и ΔBC_1C једнакокраки, па је

$\measuredangle ACC_1 = \measuredangle CAC_1 = \alpha$ и $\measuredangle BCC_1 = \measuredangle CBC_1 = \beta$.
Одатле је $\gamma = \measuredangle ACB = \measuredangle ACC_1 + \measuredangle BCC_1 = \alpha + \beta$, па због збира углова у троуглу, $\gamma + (\alpha + \beta) = 180°$, имамо $\gamma + \gamma = 180°$, тј. $\gamma = 90°$. Дакле, троугао ABC је правоугли.



53. Израчунај површину правоуглог троугла ABC ($\measuredangle BCA = 90^\circ$) са тежиштем T ако је:

а) $t_c = 5$ cm, $BC = 6$ cm; **б)** $h_c = 12$ cm, $t_c = 15$ cm;
в) $TC = 5$ cm, $h_a = 12$ cm; **г)** $h_b = 5$ cm, $t_c = 6{,}5$ cm.

54. За свако поље у табели одреди међусобни положај тачке и троугла уписивањем „у”, „на” или „ван”:

Тип троугла	Центар описане кружнице	Центар уписане кружнице	Ортоцентар	Тежиште
оштроугли				
правоугли				
тупоугли				

55. Конструиши троугао, а затим ортоцентар и тежиште ако су странице (у cm):

а) 5, 6 и 7; **б)** 6, 8 и 10; **в)** 3, 4 и 6.

56. CD је тежишна дуж ΔABC. Одреди површину ΔABC ако је површина ΔCDA 23 cm^2.

57. Тачка T је тежиште троугла ABC, а тачке A_1, B_1 и C_1 су редом средишта страница BC, CA и AB. Одреди дужине тежишних дужи троугла ако је $TA = 14$ cm, $TB_1 = 8$ cm, $C_1T = 9$ cm.

58. У правоуглом ΔABC тачка B_1 је средиште катете AC, а тачка A_1 је средиште катете BC. Одреди дужине тежишне дужи која одговара хипотенузи AB и дужи A_1B_1 ако је полупречник описане кружнице 5 cm.

59. У правоуглом троуглу хипотенузина тежишна дуж је дужине 13 cm, а дужина краће катете је 10 cm. Одреди дужину тежишне дужи која одговара краћој катети.

60. Одреди дужину хипотенузе правоуглог троугла у коме је растојање тежишта и ортоцентра 4 cm.

61. У правоуглом троуглу дужина хипотенузе је $\sqrt{12}$ cm, а дужина једне катете 3 cm. Израчунај меру угла који одређују тежишна дуж и висина које одговарају хипотенузи.

62. Нађи растојање ортоцентра од темена угла од 120° у једнакокраком троуглу основице $\sqrt{3}$ cm.

63. У једнакокраком троуглу тежишна дуж која одговара краку гради угао од 30° са основицом. Ако је висина која одговара основици дужине 9 cm, нађи растојање тежишта од темена основице.

***64.** Одреди дужину тежишне дужи која одговара хипотенузи ако су дужине тежишних дужи које одговарају катетама $\sqrt{73}$ cm и $2\sqrt{13}$ cm.

65. Одреди обим правоуглог троугла ако је познато да су дужине висине и тежишне дужи које одговарају хипотенузи 50 cm и 48 cm. (Помоћ: прво утврди која од ових дужи је краћа!)

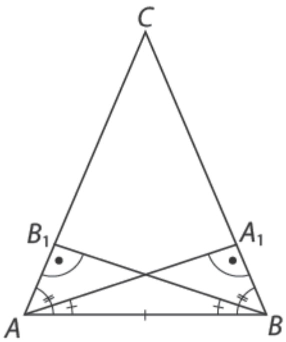
4.7. Сложеније примене ставова подударности

У шестом разреду смо конструисали троуглове, али и четвороуглове као што су паралелограм, ромб и трапез, и доказали неке њихове важне особине применом ставова подударности. Сада смо се упознали и са висинама и тежишним линијама троугла, па стечено знање о њима можемо, заједно са ставовима подударности, искористити приликом конструкција троуглова и четвороуглова или доказивања још неких њихових особина.

пример 1

Ако су A_1 и B_1 подножја висина из темена A и B једнакокраког троугла ABC са основицом AB, докажи да су дужине висина AA_1 и BB_1 једнаке.

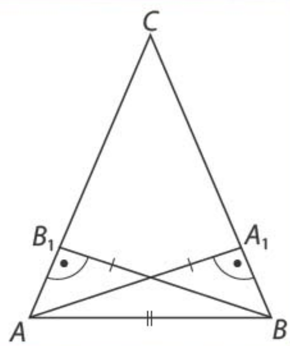
Решење: Како је троугао једнакокрак, углови на основици тог троугла су једнаки, па је $\measuredangle BAB_1 = \measuredangle ABA_1 = \alpha$, а тачке A_1 и B_1 су подножја висина, па је $\measuredangle AA_1B = \measuredangle BB_1A = 90^\circ$. Тада је и $\measuredangle ABB_1 = \measuredangle BAA_1 = 90^\circ - \alpha$. Троуглови ABB_1 и BAA_1 имају и заједничку страницу AB, па важи $\Delta ABB_1 \cong \Delta BAA_1$ (став УСУ). Одатле је $AA_1 = BB_1$.



пример 2

Ако су дужине висина AA_1 и BB_1 троугла ABC једнаке, докажи да је троугао једнакокрак.

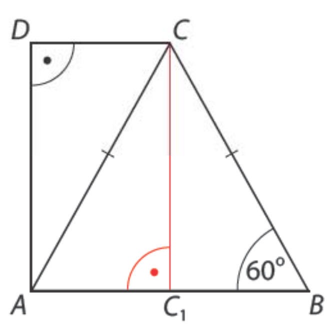
Решење: Троуглови ABB_1 и BAA_1 су правоугли, имају заједничку хипотенузу AB и $AA_1 = BB_1$, па на основу става ССУ важи $\Delta ABB_1 \cong \Delta BAA_1$. Одатле је $\measuredangle B_1AB = \measuredangle A_1BA$, па је и $\measuredangle CAB = \measuredangle CBA$, што значи да је троугао ABC једнакокрак.



пример 3

У правоуглом трапезу $ABCD$, оштар угао на основици AB једнак је $\measuredangle ABC = 60^\circ$. Ако је дијагонала AC једнака краку BC, докажи да је $AB = BC = 2 \cdot CD$.

Решење: Како је $AC = BC$, закључујемо да је $\measuredangle CAB = \measuredangle ABC = 60^\circ$, па је ΔABC једнакостраничан. Нека је C_1 подножје висине из темена C на основицу AB. Тачка C_1 је уједно и средиште странице AB. Четвороугао AC_1CD је правоугаоник, па је $CD = C_1A = \dfrac{AB}{2}$, одакле је $AB = BC = 2 \cdot CD$.



пример 4

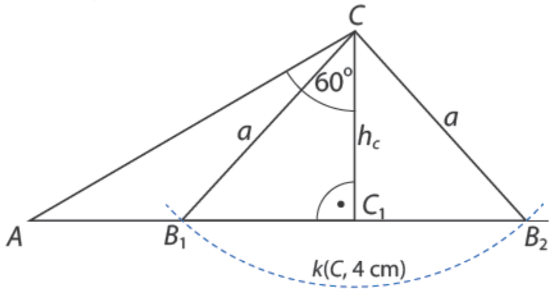
Конструиши троугао чија су два темена A и C, ако је $\measuredangle A = 30°$, страница наспрам темена A једнака $a = 4$ cm, а висина из темена C једнака $CC_1 = h_c = 3$ cm.

Решење: ΔAC_1C је правоугли, са угловима $\measuredangle AC_1C = 90°$, $\measuredangle C_1AC = 30°$, $\measuredangle ACC_1 = 60°$ и катетом $CC_1 = h_c = 3$ cm, па можемо конструисати ΔAC_1C, а затим и тражени троугао, јер се треће теме троугла налази на полуправој AC_1 на удаљености $a = 4$ cm од темена C.

Конструишимо дуж $CC_1 = h_c = 3$ cm и тачку A такву да је $\measuredangle ACC_1 = 60°$ и $\measuredangle AC_1C = 90°$. На полуправој AC_1 конструишимо тачку чије је одстојање од темена C једнако $a = 4$ cm. Како кружница $k(C, 4\text{ cm})$ сече полуправу AC_1 у двема тачкама B_1 и B_2, то обе тачке задовољавају услов $CB_1 = CB_2 = a$.

Дакле, постоје два решења.

Једно решење је ΔAB_1C, а друго ΔAB_2C.



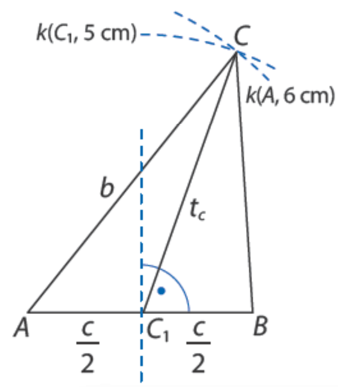
пример 5

Конструиши ΔABC, ако су познате тежишна дуж t_c и странице $AC = b$ и $AB = c$:

а) $b = 6$ cm, $c = 4$ cm и $t_c = 5$ cm; б) $b = 6$ cm, $c = 24$ cm и $t_c = 5$ cm.

Решење: а) Ако је C_1 средиште странице AB, тада је $CC_1 = t_c = 5$ cm и $AC_1 = C_1B = \frac{c}{2} = 2$ cm, па можемо конструисати ΔAC_1C јер знамо дужине свих страница тог троугла, а затим и тражени ΔABC.

Конструишемо дуж $AB = c = 4$ cm, а затим и њено средиште C_1 (помоћу симетрале дужи). Конструишемо тачку C, тако да је $CC_1 = t_c = 5$ cm и $AC = b = 6$ cm. Спајањем тачака B и C довршавамо конструкцију.



б) Није могуће конструисати ΔAC_1C, чије су дужине страница 12 cm, 5 cm и 6 cm (јер је $5 + 6 < 12$, тј. такав троугао не постоји зато што у њему не би важила неједнакост троугла).

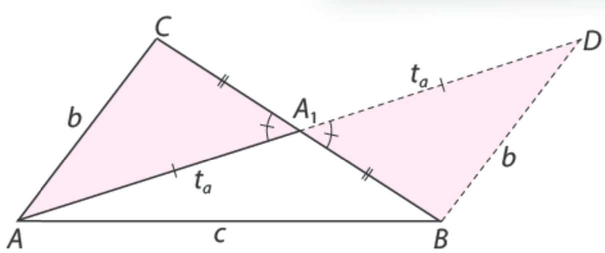
неједнакост троугла

Збир дужина две странице троугла већи је од дужине треће странице.

пример 6

Докажи да је дужина тежишне дужи троугла мања од полузбира дужина суседних страница.

Решење: Нека је A_1 средиште странице BC и нека је D тачка полуправе AA_1 таква да је $AA_1 = A_1D$. Приметимо да на основу става СУС важи $\Delta AA_1C \cong \Delta DA_1B$ јер је $\measuredangle CA_1A = \measuredangle BA_1D$ (унакрсни углови), $A_1A = A_1D = t_a$ и $A_1C = A_1B$, па је $BD = AC = b$. У ΔABD

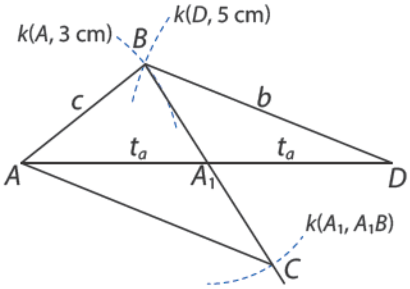


важи $AD < BD + AB$, због неједнакости троугла.

Заменом $AD = 2t_a$, $BD = b$, $AB = c$, добијамо $2t_a < b + c$, тј. $t_a < \frac{b+c}{2}$.

Пример 7

Конструиши ΔABC ако су дате странице $AC = b = 5$ cm и $AB = c = 3$ cm, и тежишна дуж $t_a = 3{,}5$ cm.



Решење: У претходном примеру смо продужавањем тежишне дужи AA_1 до тачке D (тако да је $AA_1 = A_1D$), добили подударност $\Delta AA_1C \cong \Delta DA_1B$. Тиме смо показали да је $BD = AC = b$. Искористимо тај податак како бисмо конструисали ΔABD јер сада знамо дужине свих страница троугла ABD ($AB = c$, $BD = b$ и $AD = 2t_a$).

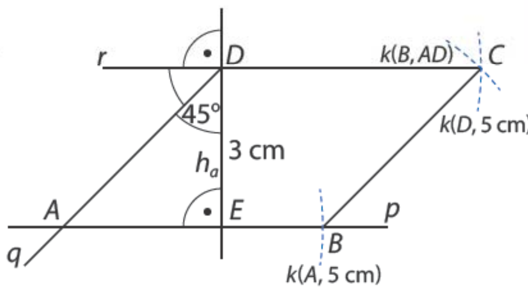
Конструишемо колинеарне тачке A, A_1 и D, тако да је $AA_1 = A_1D = t_a = 3{,}5$ cm, а затим и тачку B тако да је $BD = b = 5$ cm и $AB = c = 3$ cm. Тачку C конструишемо на правој A_1B, тако да је A_1 између B и C и $A_1B = A_1C$. Спајањем тачака A и C, довршавамо конструкцију троугла ABC.

Пример 8

Конструиши паралелограм $ABCD$ ако је дата страница $a = AB = 5$ cm, висина $h_a = 3$ cm и $\measuredangle BAD = 45°$.

Решење: $ABCD$ је паралелограм, па важи $AB = DC$ и $AD = BC$. Ако је E подножје висине из D на AB, троугао AED је правоугли са углом $\measuredangle EAD = 45°$. Одатле је $\measuredangle ADE = 90° - 45° = 45°$.

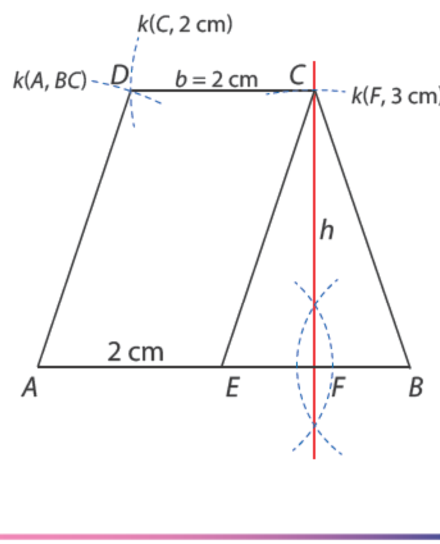
Конструишемо дуж $DE = h_a = 3$ cm, праву p нормалну на DE у тачки E, и полуправу Dr нормалну на DE, па затим полуправу Dq као симетралу $\measuredangle EDr = 90°$. У пресеку p и Dq добијамо тачку A. На правој p конструишемо тачку B, тако да је $AB = 5$ cm и да су тачке B и E са исте стране тачке A. Тачку C добијамо тако да је $DC = 5$ cm и $BC = AD$, а $DC \| p$.



Пример 9

Конструиши једнакокраки трапез висине $h = 3$ cm, ако је краћа основица $b = 2$ cm једнака половини дуже основице.

Решење: Нека је $ABCD$ тражени трапез. Ако је E средиште дуже основице AB, тада је $AE = EB = DC = b = 2$ cm, а како су основице паралелне, то је четвороугао $AECD$ паралелограм. Зато је и $BC = AD = EC$, па је ΔEBC једнакокрак и висина која одговара основици EB је управо висина трапеза $h = 3$ cm.



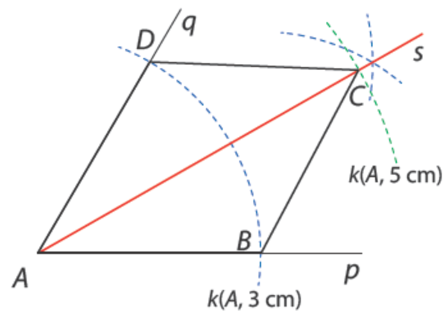
Конструишемо колинеарне тачке A, E и B, такве да је $AE = EB = b = 2$ cm, а затим и симетралу дужи EB. Нека је F пресек те симетрале и дужи EB (F је средиште дужи EB). На симетрали конструишемо тачку C тако да је $CF = h = 3$ cm. Тачку D добијамо тако да је $CD = b = 2$ cm и $AD = BC$.

пример 10

Конструиши делтоид $ABCD$ ако су дате дужине две суседне странице $AB = AD = 3$ cm, угао између њих $\measuredangle DAB = 60°$ и дијагонала $AC = 5$ cm која припада оси симетрије делтоида.

Решење: Дијагонала AC представља симетралу угла $\measuredangle DAB$ (јер припада оси симетрије делтоида).

Конструишемо $\measuredangle pAq = 60°$ и симетралу s тог угла. На крацима p и q конструишемо тачке B и D, тако да је $AB = AD = 3$ cm, а на симетрали s тачку C такву да је $AC = 5$ cm. Спајањем тачке C са B и D, довршавамо конструкцију.



ЗАДАЦИ

66. Над страницама AB и BC паралелограма $ABCD$ (где је $AB > BC$) споља су конструисани квадрати $ABEF$ и $BCPQ$. Докажи да је $EQ = BD$.

67. У једнакокраком ΔABC тачка D припада краку AC, а тачка E правој AB тако да је B између A и E и важи $BE = DC$. Докажи да основица BC дели дуж DE на једнаке делове.

68. Докажи да је у делтоиду са два права угла дужа дијагонала симетрала наспрамних углова.

69. Тачке A, B, C и D припадају једној правој у наведеном распореду. Ако је E тачка која припада краковима једнакокраких троуглова ADE и BCE, докажи да је $AB = CD$.

70. Ако су у троуглу ортоцентар и тежиште иста тачка, докажи да је троугао једнакостраничан.

71. У правоугаонику $ABCD$ тачка E је симетрична тачки A у односу на дијагоналу BD. Тачка F је пресечна тачка правих BE и CD. Докажи да је ΔBFD једнакокрак.

72. Конструиши паралелограм $ABCD$ где је $AB = a$ и $BC = b$, ако је:

а) $a = 5$ cm, $b = 3$ cm, $\measuredangle ABC = 120°$; б) $a = 6$ cm, висина $h_a = 3$ cm, $\measuredangle DAB = 60°$;

*в) $h_a = 2$ cm, $h_b = 3$ cm, $\measuredangle ABC = 135°$.

73. Конструиши једнакокраки трапез $ABCD$ где је $AB = a$, $CD = b$ и $BC = DA = c$ ако је:

а) $a = 6$ cm, $b = 3$ cm, $c = 4$ cm; б) $a = 7$ cm, $b = 4$ cm, висина $h = 3$ cm;

*в) средња линија дужине 6 cm, крак $c = 4$ cm и $\measuredangle ABC = 60°$.

74. У ΔABC, тежишне дужи AA_1 и BB_1 једнаких су дужина. Докажи да је $AC = BC$.

75. Конструиши трапез у коме су дужине основица 7 cm и 5 cm, један крак дужине 4 cm, а висина дужине 3 cm.

76. Конструиши делтоид ако су:

а) странице дужина 4 cm и 6 cm, а угао који граде две краће странице прав;

*б) странице дужине 3 cm и 7 cm, а једна дијагонала дужине 4 cm.

Сажетак: МНОГОУГАО

Многоугао; n-тоугао (са n темена, tj. n страница, $n \geq 3$):

Дијагонала: дуж која спаја два несуседна темена многоугла

Конвексан многоугао: многоугао у коме било које две тачке многоугла одређују дуж која је у целости садржана у многоуглу

$d_n = n - 3$ број дијагонала из сваког темена конвексног многоугла

$D_n = \dfrac{n(n-3)}{2}$ укупан број дијагонала конвексног многоугла

$S_n = (n-2) \cdot 180°$ збир унутрашњих углова многоугла

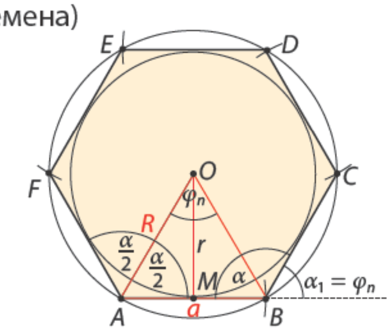
$S'_n = 360°$ збир спољашњих углова многоугла

Правилни n-тоугао:

Правилни многоугао: многоугао чије су све странице међусобно једнаке и чији су сви унутрашњи углови међусобно једнаки

Центар: центар уједно и описане и уписане кружнице

n број оса симетрије (број темена)



$\alpha = \dfrac{n-2}{n} \cdot 180°$ унутрашњи угао

$\alpha_1 = \dfrac{360°}{n}$ спољашњи угао

$O = na$ обим

$P = \dfrac{nar}{2}$ површина

Карактеристични троугао: троугао чија су темена центар и два суседна темена многоугла

$\varphi_n = \dfrac{360°}{n}$ централни угао (угао наспрам основице карактеристичног троугла)

Троугао:

Тежишна дуж: дуж која спаја теме троугла и средиште наспрамне странице

Тежиште: пресек тежишних дужи троугла

2 : 1 однос у ком тежиште дели тежишну дуж (дужи део је код темена)

Ортоцентар: пресек правих које садрже висине троугла

Центар описане кружнице: пресек симетрала страница

Центар уписане кружнице: пресек симетрала углова

77. Ако је d_n број дијагонала из једног темена, а D_n укупан број дијагонала многоугла са n темена, одреди D_n ако је:

а) $d_n = 4$; б) $d_n = 8$; в) $d_n = 0$; г) $d_n = 1$.

78. Одреди број темена многоугла ако је:

а) $D_n = 5$; б) $D_n = 35$;
в) $D_n = 170$; г) $D_n = 19700$.

79. Попуни табелу.

n	3	7	10						
d_n				5	6	9			
D_n							2	54	90

80. Докажи да је збир броја страница и дијагонала у многоуглу са n страница $\frac{n(n-1)}{2}$.

81. Збир броја дијагонала и страница многоугла је 55. Колико темена има тај многоугао?

82. У многоуглу $A_1A_2 \ldots A_n$ број свих дијагонала изузев оних које садрже теме A_1 је 15. Одреди n.

83. У многоуглу $A_1A_2 \cdots A_n$ збир броја страница које садрже теме A_1 и дијагонала које садрже теме A_1 је 19. Колико укупно дијагонала има тај многоугао?

84. Да ли постоји многоугао код кога је:
а) $D_n < n$; б) $D_n = n$?

85. Код ког многоугла је однос укупног броја дијагонала и броја дијагонала из једног темена:

а) 3 : 1; б) 5 : 1; в) 7 : 1?

86. Код ког многоугла је однос броја дијагонала и броја страница:

а) 3 : 1; б) 5 : 1; в) 7 : 1?

87. Када се број страница многоугла повећа за 4, укупан број дијагонала се повећа за 50. Колико страница има тај многоугао?

88. Када се број страница многоугла смањи за 1 добијамо нови многоугао који има 4 дијагонале мање од старог. Колико темена има нови многоугао?

89. Да ли укупан број дијагонала у произвољном многоуглу може бити дељив са 3, али не са 9?

***90.** Да ли је могуће у унутрашњости конвексног десетоугла изабрати 5 тачака тако да свих 10 темена десетоугла припада некој од правих које образују ове тачке?

91. Четвороугао има 2 пара једнаких унутрашњих углова. Ако знамо да је један унутрашњи угао два пута већи од другог унутрашњег угла, одреди све спољашње углове тог четвороугла.

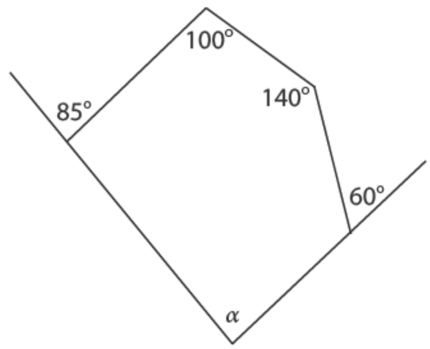
92. Да ли постоји многоугао у коме су сви унутрашњи и сви спољашњи углови једнаки? Наведи пример таквог многоугла ако постоји.

93. Да ли постоји шестоугао у коме су сви унутрашњи углови мањи од 120°?

94. Унутрашњи углови шестоугла су у размери 9 : 10 : 11 : 12 : 14 : 16. Одреди размеру спољашњих углова.

95. Спољашњи углови осмоугла одређују размеру 2 : 3 : 4 : 4 : 5 : 5 : 6 : 7. Израчунај меру унутрашњих углова осмоугла.

96. Одреди меру угла α у петоуглу на слици.



97. Углови шестоугла имају мере $\alpha - 20°$, $\alpha - 12°$, α, $\alpha + 3°$, $\alpha + 21°$ и $\alpha + 26°$. Израчунај мере свих спољашњих углова тог шестоугла.

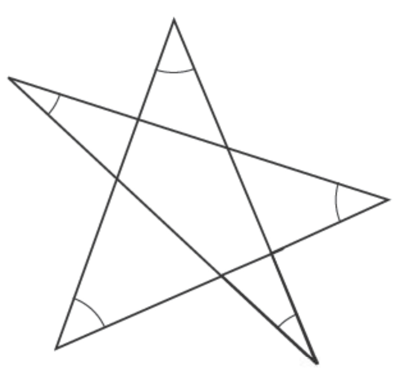
***98.** Колико највише правих углова може имати конвексан осмоугао?

99. Да ли постоји четвороугао без оштрих углова? Да ли постоји четвороугао чији су сви углови тупи?

100. На које многоуглове једна дијагонала може поделити осмоугао?

***101.** Дванаестоугао је дијагоналом подељен на два многоугла чија је разлика збира унутрашњих углова 720°. Колика је разлика броја дијагонала ова два многоугла?

102. Одреди збир обележених углова на слици.



103. Када се број страница многоугла удвостручи, збир унутрашњих углова се повећа x пута. Који је то многоугао ако је:

а) $x = 3$; **б)** $x = 4$.

***104.** Да ли постоји конвексни многоугао са 2025 страница код кога су мере свих унутрашњих углова природни бројеви (у степенима)?

***105.** Одреди број страница многоугла ако ниједан угао многоугла:

а) није већи од 146° и није мањи од 143°;

б) није већи од 153° и није мањи од 151°.

106. Попуни табелу за правилни многоугао.

n	3						
d_n		2					
D_n			5				
α				120°			
α_1					45°		
φ_n						40°	
S_n							1440°

107. Код ког се многоугла збир унутрашњих углова и збир спољашњих углова односи као 5 : 2?

***108.** Који правилни многоугао се конструкцијом:

а) свих симетрала страница може поделити на правилне многоуглове;

б) свих симетрала углова може поделити на правилне многоуглове?

***109.** Код ког правилног многоугла производ мерних бројева (у степенима) спољашњих углова износи:

а) 1; **б)** 10^{36}; **в)** $27^4 \cdot 10^{12}$?

110. Колики је унутрашњи угао правилног многоугла који има укупно 54 дијагонале?

111. Одреди број дијагонала правилног многоугла $A_1A_2 \dots A_n$ у коме симетрале страница:

а) A_1A_2 и A_2A_3 граде угао од $18°$;
б) A_1A_2 и A_3A_4 граде угао од $60°$;
в) A_1A_2 и A_4A_5 граде угао од $120°$.

112. Одреди број дијагонала које садрже теме A_2 правилног многоугла $A_1A_2 \dots A_n$ ако симетрале углова код темена:

а) A_1 и A_2 граде угао од $20°$;
б) A_1 и A_3 граде угао од $45°$;
в) A_1 и A_4 граде угао од $180°$.

113. Докажи да је унутрашњи угао правилног n-тоугла $\alpha = 180° - \dfrac{360°}{n}$.

114. У једнакостраничном троуглу полупречник уписане кружнице је дужине 1 cm. Одреди дужину странице и полупречника описане кружнице.

115. У правилном четвороуглу збир дужина дијагонала износи 10 cm. Одреди дужине страница, полупречника уписаног и описаног круга тог четвороугла.

116. У правилном шестоуглу $ABCDEF$ одреди меру угла:

а) $\measuredangle ABC$; **б)** $\measuredangle ADB$; **в)** $\measuredangle AED$;
г) $\measuredangle ACE$; **д)** $\measuredangle AFC$.

117. Правилни шестоугао $ABCDEF$ има страницу дужине 2 cm. Израчунај дужине:

а) дужи AB; **б)** дужи AE;

в) полупречника описане кружнице;

г) полупречника уписане кружнице.

***118.** У правилном шестоуглу збир дужина свих дијагонала једнак је $18 \cdot \left(1+\sqrt{3}\right)$ cm. Израчунај збир дужина полупречника уписане и описане кружнице.

119. У правилном осмоуглу $ABCDEFGH$ одреди меру угла:

а) $\measuredangle ABC$; **б)** $\measuredangle ADB$; **в)** $\measuredangle AEB$;
г) $\measuredangle ACF$; **д)** $\measuredangle AFB$; **ђ)** $\measuredangle ADF$.

120. Да ли већи обим има правилни многоугао са n страница дужине $\sqrt{20}$ cm или правилни многоугао са $2n$ страница дужине $\sqrt{5}$ cm?

121. У круг пречника 8 cm уписан је правилни n-тоугао, а око истог круга је описан други правилни n-тоугао. Одреди однос површина ова два n-тоугла ако је број темена:

а) $n = 3$; **б)** $n = 4$; **в)** $n = 6$;
***г)** $n = 8$; ***д)** $n = 12$.

122. Петоугао је уписан у круг полупречника 10 cm. Ако центар круга O спојимо са теменима петоугла, добијамо пет троуглова чији су углови код темена O редом 90°, 90°, 60°, 60° и 60°. Израчунај обим и површину петоугла.

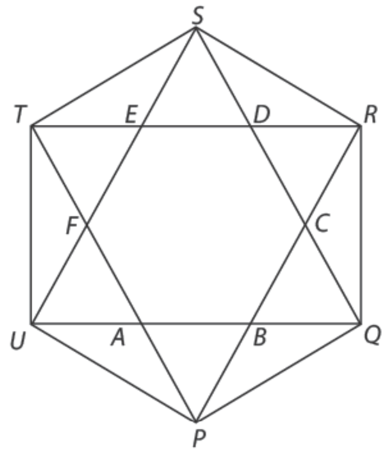
***123.** Шестоугао је уписан у круг полупречника 8 cm. Ако центар круга O спојимо са теменима шестоугла, добијамо шест троуглова чији су углови код темена O редом 90°, 45°, 45°, 60°, 60° и 60°. Израчунај обим и површину шестоугла.

124. Ако је n број страница, O обим, а P површина правилног многоугла, попуни табелу.

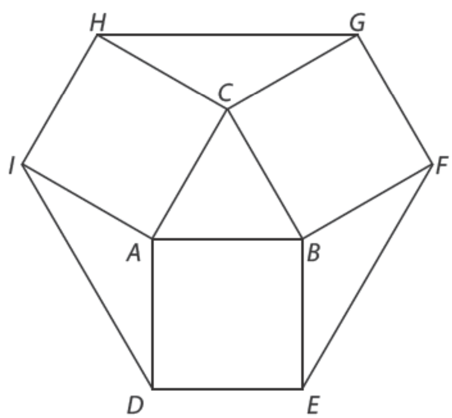
n	3	3	4	4	6	6
O	24		18		6,6	
P		$9\sqrt{3}$		5		$\dfrac{3\sqrt{3}}{8}$

125. Правилни многоуглови са n страница и m страница имају једнаке обиме. Одреди однос њихових страница.

126. Одреди обим и површину шестоугла *PQRSTU* ако је површина правилног многоугла *ABCDEF* са слике $96\sqrt{3}\ \text{cm}^2$.



***127.** Над страницама једнакостраничног троугла *ABC* споља су конструисани квадрати. Одреди површину шестоугла *DEFGHI* ако је $CD = \left(2+\sqrt{3}\right)$ cm.

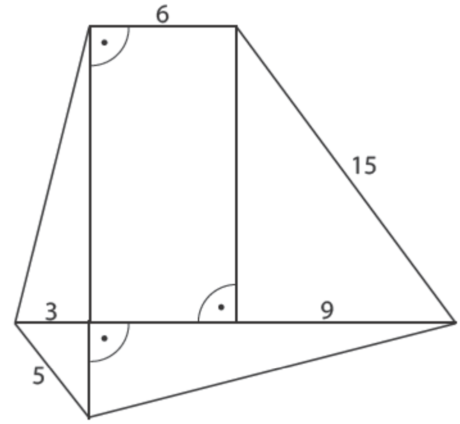


***128.** Над страницама квадрата *ABCD* странице *a* споља су конструисани једнакостранични троуглови *ABP*, *BCQ*, *CDR* и *DAS*. Одреди обим и површину четвороугла *PQRS*.

***129.** Изрази површину правилног многоугла са *n* страница (где је $n \geq 4$) у зависности од дужине најкраће дијагонале *d* и полупречника описане кружнице *R*.

130. Одреди површину правилног дванаестоугла и осмоугла уписаних у исту кружницу пречника 16 cm.

131. Одреди површину петоугла на слици.



132. Конструиши једнакостранични троугао *ABT*, а затим конструиши тачку *C* тако да је тачка *T* тежиште троугла *ABC*.

133. У једнакокраком троуглу основице $2\sqrt{2}$ cm тежишне дужи које одговарају крацима су узајамно нормалне. Одреди дужину тежишне дужи која одговара краку.

134. Израчунај површину једнакокраког троугла основице 10 cm ако је растојање тежишта од основице 2 cm.

135. Израчунај обим једнакокрако правоуглог троугла код кога је растојање темена правог угла до тежишта 6 cm.

***136.** У правоугаонику *ABCD* тачке *E* и *F* су редом средишта страница *AB* и *AD*. Докажи да се дужи *AC*, *DE* и *BF* секу у једној тачки.

***137.** Две странице троугла су 3 cm и 4 cm, а тежишне дужи које одговарају тим страницама граде прав угао. Одреди дужину треће странице троугла.

138. Докажи да се у правоуглом троуглу збир квадрата страница и збир квадрата тежишних дужи налазе у односу 4 : 3.

139. Конструиши ΔABH тако да је $\measuredangle BHA = 150°$, $AH = 3$ cm и $BH = 4$ cm. Затим конструиши тачку C тако да је H ортоцентар троугла ABC.

140. Да ли постоји троугао у коме су тежишне дужи из темена A и B редом 9 cm и 12 cm, а страница $AB = 14$ cm?

141. У правоуглом троуглу ABC дуж CD је висина која одговара хипотенузи, а тачка E је средиште дужи AD. Докажи да је средиште дужи CD ортоцентар троугла BCE.

142. Шестоугао има три пара наспрамних паралелних страница, а две наспрамне странице су једнаких дужина. Докажи да онда сваке две наспрамне странице шестоугла имају једнаке дужине.

143. Конструиши једнакокраки троугао са основицом AB ако је $h_c = 9$ cm и $t_a = 6$ cm.

Питалице

1.	Ако крајеви неке дужи припадају конвексном многоуглу, тада све тачке исте дужи припадају многоуглу.	Тачно	Нетачно
2.	Конвексни многоугао може имати угао већи од 180°.	Тачно	Нетачно
3.	Десетоугао има два пута већи збир углова од петоугла.	Тачно	Нетачно
4.	Не постоји правилни многоугао чији је унутрашњи угао 100°.	Тачно	Нетачно
5.	Постоји правилни многоугао код кога је централни угао већи од спољашњег.	Тачно	Нетачно
6.	У правилном n-тоуглу број дијагонала из сваког темена је $n - 3$.	Тачно	Нетачно
7.	У сваком правилном многоуглу са четири или више страница постоји дијагонала исте дужине као пречник описане кружнице.	Тачно	Нетачно
8.	Деветоугао има три пута више дијагонала него шестоугао.	Тачно	Нетачно
9.	Ако многоугао има уписан круг полупречника r, површину P и обим O, тада важи $2P = r \cdot O$.	Тачно	Нетачно
10.	Површина правилног шестоугла странице a је $P = \frac{2a^2\sqrt{3}}{2}$.	Тачно	Нетачно

Предлог теста знања

1. Ако је збир унутрашњих углова многоугла 1980°, онда је број страница тог многоугла:

   а) 18; б) 13; в) 11; г) 10; д) 9.

2. Централни угао правилног многоугла са 36 страница је:

   а) 10°; б) 20°; в) 30°; г) 160°; д) 170°.

3. Разлика унутрашњег и спољашњег угла правилног осмоугла је:

   а) 0°; б) 45°; в) 90°; г) 135°; д) 180°.

4. Збир броја дијагонала, броја страница и броја темена правилног десетоугла је:

   а) 15; б) 25; в) 35; г) 45; д) 55.

5. Колико различитих дужина дијагонала постоји у правилном осмоуглу:

   а) 1; б) 2; в) 3; г) 5; д) 20?

6. Однос површина правилног шестоугла странице a и једнакостраничног троугла странице $2a$ је:

   а) 1 : 1; б) 3 : 2; в) 2 : 3; г) 3 : 1; д) 1 : 3.

7. Обим квадрата дијагонале $2\sqrt{2}$ cm је:

   а) $8\sqrt{2}$ cm; б) $4\sqrt{2}$ cm; в) 4 cm; г) 8 cm; д) 16 cm.

8. Однос дужина најкраће дијагонале и полупречника уписане кружнице правилног шестоугла је:

   а) 2; б) 1; в) $\sqrt{3}$; г) $\frac{\sqrt{3}}{3}$; д) $\frac{1}{2}$.

Кључни појмови

Многоугао

Број дијагонала

Спољашњи угао многоугла

Збир спољашњих углова многоугла

Осе симетрије правилног многоугла

Карактеристични троугао

Ортоцентар троугла

Тежиште троугла

Дијагонала

Унутрашњи угао многоугла

Збир унутрашњих углова многоугла

Правилни многоугао

Центар правилног многоугла

Централни угао

Тежишна дуж

Предлог контролне вежбе

1.1.	Одреди број страница многоугла чији је збир унутрашњих углова 3240°.	**15**
1.2.	Када се број страница правилног многоугла повећа за 1, мера централног угла се смањи за 5°. Који је то многоугао?	**20**
1.3.	Ниједан спољашњи угао многоугла није већи од 25°, нити мањи од 23°. Колико темена има тај многоугао?	**25**
2.1.	Одреди разлику броја дијагонала десетоугла и броја дијагонала седмоугла.	**15**
2.2.	Који многоугао има 5 пута више дијагонала него страница?	**20**
2.3.	Колико дијагонала у правилном седамнаестоуглу $A_1A_2...A_{17}$ садржи бар једно од темена A_1, A_3 и A_{17}?	**25**
3.1.	Конструиши квадрат дијагонале 6 cm.	**15**
3.2.	Конструиши правилни шестоугао чија је најкраћа дијагонала дужине 5 cm.	**20**
3.3.	Конструиши ΔABC ако је $BC = 5$ cm, $AC = 3$ cm, а тежишна дуж која одговара страници AB дужине 2,5 cm.	**25**
4.1.	Израчунај површину правилног шестоугла ако је полупречник описаног круга 3 cm.	**15**
4.2.	Израчунај површину правилног осмоугла ако је полупречник описаног круга $2\sqrt{2}$ cm.	**20**
4.3.	Израчунај површину правилног дванаестоугла ако је полупречник описаног круга $\sqrt{7}$ cm.	**25**

5 КРУГ

ЗАНИМЉИВОСТ

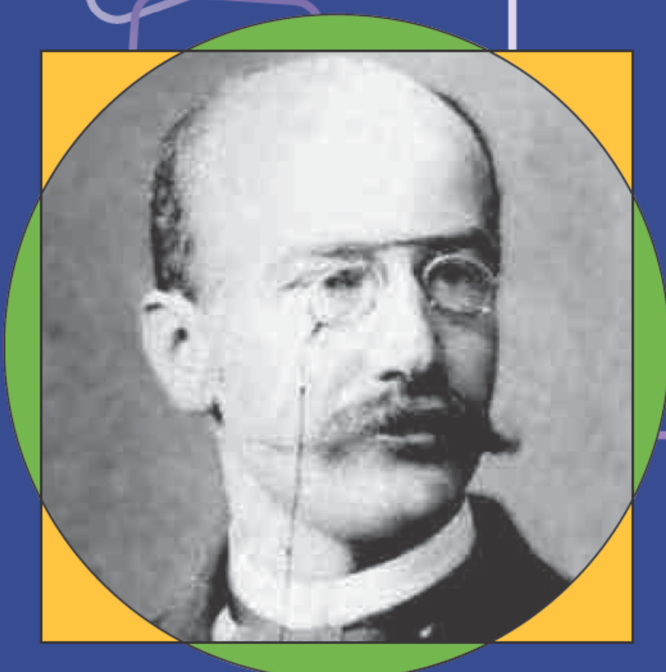
Квадратура круга је један од античких математичких проблема. Задатак гласи прилично једноставно:

„Користећи само лењир и шестар, конструиши квадрат који има исту површину као дати круг."

У историји науке нема много проблема које је покушао да реши велики број научника, али и аматера. Постоје квадратуре које су изведене помоћу додатних механичких направа, као и приближне конструкције у којима се користи нека приближна вредност ирационалног броја π (о коме ћемо учити у овој области), али ниједна од њих није тачна конструкција за коју се користи само лењир и шестар.

Тек крајем 19. века доказано је да је проблем квадратуре круга нерешив, односно да тражену конструкцију није могуће извести лењиром и шестаром. За то је заслужан немачки математичар Линдеман, који је 1882. године доказао својства ирационалног броја π, због којих конструкција лењиром и шестаром није могућа.

Израз „квадратура круга" се у данашње време користи за опис неког нерешивог животног проблема.



Линдеман

занимљивост

„Не дирајте моје кругове!”

Сматра се да су ово биле последње речи Архимеда из Сиракузе, највећег античког математичара.

Архимед је живео у 3. веку пре н. е. и још за живота је био изузетно цењен, како због својих достигнућа у математици, физици и астрономији, тако и због бројних практичних проналазака. Његове идеје и методе биле су знатно испред времена у коме је живео. Неке од њих представљају темељ математичке анализе, важне дисциплине која је настала скоро две хиљаде година после Архимедовог рођења. Први је израчунао однос обима и пречника круга, површину круга, приближну вредност ирационалног броја π коју и данас користимо, однос површине и запремине лопте и ваљка. Ово последње сматрао је својим највећим открићем, па су му Сиракужани на надгробни споменик поставили ваљак у који је уписана лопта.

Чувена је анегдота о открићу Архимедовог закона о деловању силе потиска, због кога је био толико узбуђен да је право из каде истрчао на улицу и викао: „Еурека!”. Открио је и закон полуге, бавио се астрономским истраживањима и прилично прецизно измерио дужину календарске године.

Giulio Parigi, Public domain, via Wikimedia Commons

Архимедова генијалност и његово интересовање за геометрију и механику имали су велики утицај на живот у Сиракузи. Изумео је Архимедов вијак, коришћен за наводњавање и пренос воде. Његови проналасци катапулта, канџи за подизање бродова из воде и других механичких направа омогућили су да град дуго одолева Римљанима. Прича о Архимедовим топлотним зрацима, систему огромних и прецизно постављених огледала, који је палио римске бродове тако што је на њих усмеравао Сунчеве зраке, и у данашње време представља изазов за све који покушају да га реконструишу.

Крајем 3. века пре н. е. Сиракуза је ипак покорена од стране Римљана. Када су римски војници дошли по славног Архимеда, он је седео удубљен у решавање неког геометријског проблема, анализирајући скицу коју је направио на земљи. Не дижући поглед, изговорио је чувене речи о круговима непосредно пре него што је убијен: „Не дирајте моје кругове!”

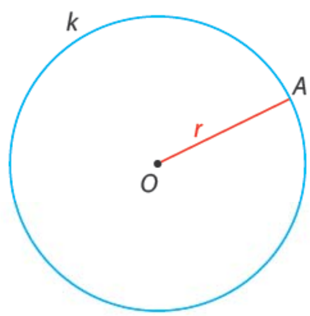
На Филдсовој медаљи (слика десно), најзначајнијем признању у области математике, стоји Архимедова слика и његове речи „Уздигни се изнад себе и схвати свет” (Transire suum pectus mundoque potiri).

Stefan Zachow for the International Mathematical Union; retouched by King of Hearts, Public domain, via Wikimedia Commons

Круг и кружница 5.1.

Кружница (кружна линија) је затворена линија у равни чије су све тачке једнако удаљене од једне тачке те равни. Ту тачку називамо **центром**.

Растојање произвољне тачке кружнице до центра називамо **полупречником** те кружнице. На слици је приказана кружница k. Центар кружнице k је тачка O, а полупречник је r. За произвољну тачку A која припада кружници k важи:

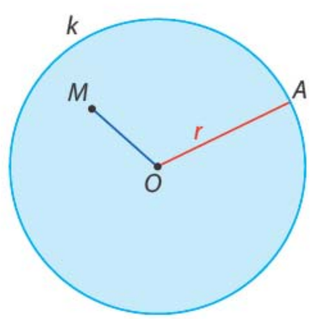


$$OA = r.$$

Свака кружница је одређена својим центром и полупречником. Кружницу на слици означавамо са $k(O, r)$.

Круг $K(O, r)$ са центром у тачки O и полупречником r је скуп свих тачака које припадају кружници $k(O, r)$ и свих тачака равни које припадају унутрашњој области ограниченој том кружницом.

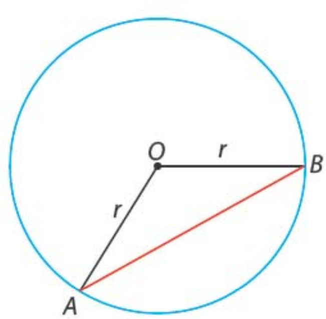
За све тачке које припадају кружници $k(O, r)$ важи да је њихово растојање од центра O једнако r, док за тачке које припадају унутрашњој области одређеној кружницом $k(O, r)$ важи да је њихово растојање од тачке O мање од r. За произвољну тачку M која припада кругу $K(O, r)$ важи:



$$OM \leq r.$$

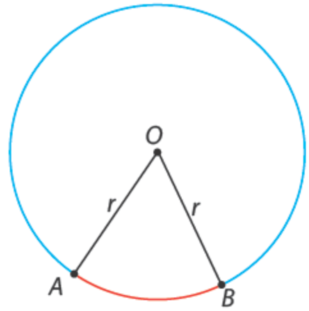
Ако су A и B две различите тачке кружнице $k(O, r)$, онда кажемо да је дуж AB **тетива** круга. Најдужа тетива круга је она која садржи центар O. Та тетива је **пречник** круга и њена дужина износи $2r$.

Ако тетива AB не садржи центар O, онда је троугао ABO једнакокраки са основицом AB и крацима $OA = OB = r$.



Нека су A и B тачке на кружници $k(O, r)$. **Кружни лук** $\widehat{AB}$ је део кружнице који садржи тачке A и B и све тачке кружнице између тачака A и B.

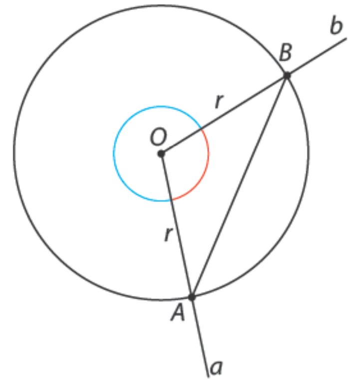
Тачке A и B одређују два кружна лука на кружници $k(O, r)$, који су на слици приказани различитим бојама. Ако је AB пречник круга, онда су оба кружна лука одређена тим тачкама једнака.



Нека су у истој равни дате кружница $k(O, r)$ и полуправе Oa и Ob. Угао $\measuredangle aOb$ је **централни угао** кружнице k.

Краци Oa и Ob централног угла секу кружницу у тачкама A и B редом, чиме је одређена тетива AB.

Приметимо да полуправе Oa и Ob одређују два централна угла (обележена на слици различитим бојама), која одговарају кружним луковима одређеним тачкама A и B. Један од тих углова је конвексан, а други конкаван. У случају када је тетива AB пречник круга оба централна угла су једнака опруженом углу.

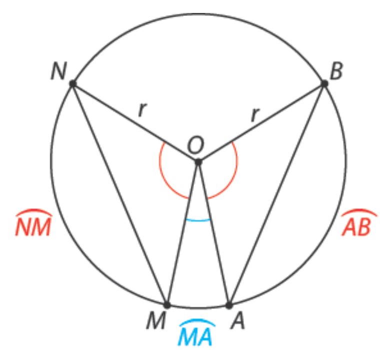


У петом разреду смо научили да **једнаким кружним луковима истог круга одговарају једнаки централни углови и обрнуто**, једнаким централним угловима одговарају једнаки лукови. Већем централном углу круга одговара већи лук, а мањем централном углу одговара мањи лук. Посматрајмо кружницу са центром у тачки O на којој су изабране тачке A, B, M и N тако да је:

$$\widehat{AB} = \widehat{NM} \quad \text{и} \quad \widehat{NM} > \widehat{MA}.$$

За одговарајуће централне углове важи:

$$\measuredangle AOB = \measuredangle NOM > \measuredangle MOA.$$

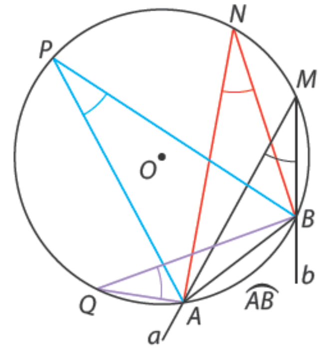


Посматрајмо ΔONM и ΔOAB. Важи $\measuredangle AOB = \measuredangle NOM$, $ON = OA = r$ и $OM = OB = r$, одакле закључујемо да је $\Delta ONM \cong \Delta OAB$ (СУС)). Због подударности троуглова је и $NM = AB$.

Ово значи да **једнаким централним угловима истог круга одговарају једнаке тетиве**. На сличан начин доказујемо да важи и обрнуто, једнаким тетивама одговарају једнаки централни углови. Како једнаким луковима одговарају једнаки централни углови, онда и **једнаким луковима истог круга одговарају једнаке тетиве**.

Такође, ако су два круга подударна, онда једнаким тетивама одговарају једнаки централни углови и обрнуто, једнаким централним угловима одговарају једнаке тетиве.

За конвексни $\measuredangle aMb$ чије теме припада кружници $k(O, r)$, а чији краци секу кружницу k, кажемо да је **периферијски угао** те кружнице. Ако краци Ma и Mb секу кружницу редом у тачкама A и B, а кружни лук $\overset{\frown}{AB}$ се налази у углу $\measuredangle aMb$, онда је тај угао периферијски над луком $\overset{\frown}{AB}$. Теме периферијског угла над луком $\overset{\frown}{AB}$ може бити произвољна тачка кружнице која не припада кружном луку $\overset{\frown}{AB}$. На слици су приказани периферијски углови $\measuredangle AMB$, $\measuredangle ANB$, $\measuredangle APB$ и $\measuredangle AQB$ над луком $\overset{\frown}{AB}$ и они представљају само неке од периферијских углова које можемо нацртати над овим луком.



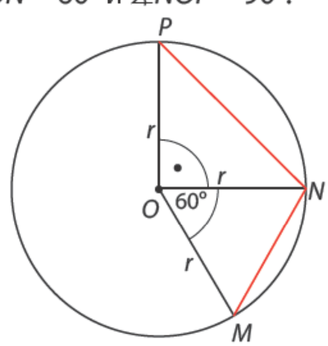
Напомена: Тачкама A и B одређена су два кружна лука. Приказани углови су периферијски над краћим луком $\overset{\frown}{AB}$ који је означен на слици, али не и над дужим луком чији су крајеви такође тачке A и B јер се он налази ван ових углова.

пример 1

На кружници $k(O, r)$ дате су тачке M, N и P такве да је $\measuredangle MON = 60^\circ$ и $\measuredangle NOP = 90^\circ$.

Ако је $r = 4$ cm, израчунај дужине тетива MN и NP.

Решење: У троуглу MNO је $OM = NO = r$ и $\measuredangle MON = 60^\circ$, па је ΔMON једнакостранични и важи:



$$OM = NO = MN = 4 \text{ cm}.$$

ΔONP је једнакокрако правоугли са катетама $ON = OP = r$ и хипотенузом NP, па је:

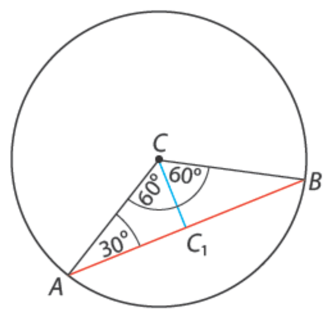
$$NP = r \cdot \sqrt{2} = 4\sqrt{2} \text{ cm}.$$

пример 2

На кружници $k(C, r)$ дате су тачке A и B такве да је $\measuredangle ACB = 120^\circ$.

Ако је $AB = 6$ cm, одреди полупречник r.

Решење: ΔABC је једнакокраки са крацима $CA = BC = r$ и $\measuredangle BCA = 120^\circ$, па је $\measuredangle CAB = \measuredangle ABC = (180^\circ - 120^\circ) : 2 = 30^\circ$. Ако је CC_1 висина из темена C, онда је троугао AC_1C правоугли троугао са угловима 30°, 60° и 90° и хипотенузом $AC = r$. Дужина катете наспрам угла од 30° једнака је половини хипотенузе, па је $CC_1 = \frac{r}{2}$. Како је



$AC_1 = C_1B = AB : 2 = 3$ cm, онда је $r^2 = 3^2 + \left(\frac{r}{2}\right)^2$, па је

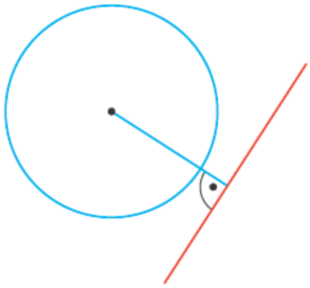
$r^2 - \frac{r^2}{4} = 9 \text{ cm}^2$, тј. $\frac{3r^2}{4} = 9 \text{ cm}^2$ или $r^2 = 12 \text{ cm}^2$,

одакле добијамо да је $r = \sqrt{12} \text{ cm} = 2\sqrt{3}$ cm.

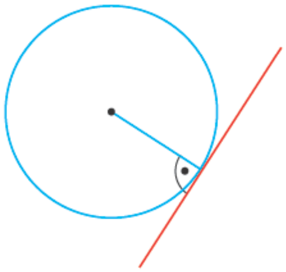
Однос праве и круга

Могућа су три положаја праве у односу на круг у истој равни. Конструисаћемо нормалу из центра круга на праву. Дужина дужи чији је један крај центар круга, а други пресечна тачка нормале и дате праве представља растојање центра круга од те праве.

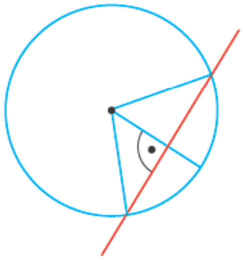
У првом случају, права и круг немају заједничких тачака. Примећујемо да је растојање центра круга од праве веће од полупречника круга.



У другом случају, права додирује дати круг, тј. пресек праве и круга садржи само једну тачку. За праву која додирује круг кажемо да је **тангента** тог круга. Растојање центра круга од тангенте једнако је полупречнику круга.

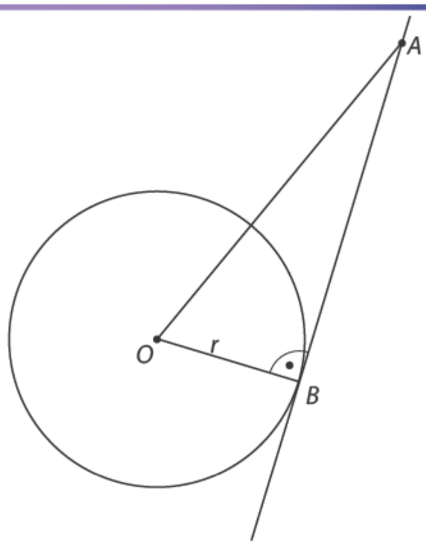


У трећем случају, пресек праве и круга је дуж чији крајеви припадају кружној линији. Кажемо да је дата права **сечица**, а пресечна дуж **тетива** датог круга. Растојање центра круга од сечице мање је од полупречника круга.



пример 3

Из тачке A, која се налази ван круга $K(O, r)$, конструисана је тангента на круг $K(O, r)$. Нека је B пресечна тачка те тангенте и круга. Ако је $AO = 13$ cm, а $r = 5$ cm, израчунај дужину тангентне дужи AB.



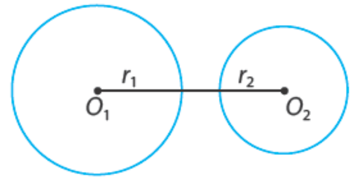
Решење: ΔOBA је правоугли троугао чија је хипотенуза $AO = 13$ cm, а једна катета $OB = 5$ cm. Применом Питагорине теореме на тај троугао добијамо $(AB)^2 = (OA)^2 - (OB)^2 = 13^2 - 5^2 = 144$, па је

$$AB = \sqrt{144}\ \text{cm} = 12\ \text{cm}.$$

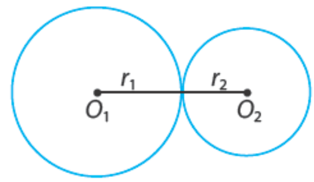
Однос два круга

Посматрајмо кругове $K_1(O_1, r_1)$ и $K_2(O_2, r_2)$ у равни. Међусобни положај та два круга зависи од односа њиховог централног растојања и њихових полупречника. Централно растојање (d) је растојање између центара две кружнице. У овом случају је $d = O_1O_2$.

Ако је $d > r_1 + r_2$, тј. ако је растојање између центара кругова веће од збира њихових полупречника, онда дати кругови немају пресечних тачака.

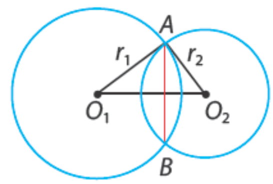


Ако је $d = r_1 + r_2$, онда пресек садржи тачно једну тачку и кажемо да се дати кругови додирују споља.

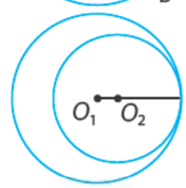


Ако је $d < r_1 + r_2$, онда се кругови секу, додирују изнутра или је један од њих садржан у другом. Два круга се секу ако имају заједничку тетиву. Нека је заједничка тетива дуж AB. У троуглу AO_1O_2 важи неједнакост троугла, па је:

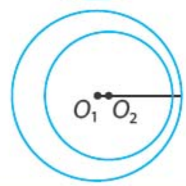
$$|r_1 - r_2| < O_1O_2 < r_1 + r_2.$$



Када је $d = |r_1 - r_2|$, кругови се додирују изнутра.



Ако је $d < |r_1 - r_2|$, онда је један од кругова садржан у другом кругу. У специјалном случају, када се центри O_1 и O_2 поклапају, дате кружнице су концентричне.



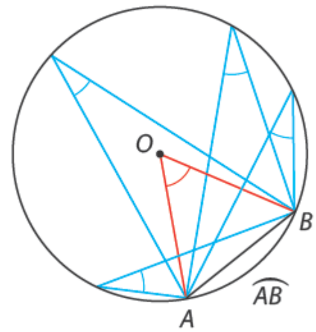
ЗАДАЦИ

1. Конструиши круг полупречника 5 cm са центром у тачки O. Нацртај тачку A ван круга, тачку B која припада кружници и тачку C која припада кругу, али не и кружници. Шта можеш рећи о растојањима тачака A, B и C од тачке O?
2. Дат је круг са центром у тачки O, полупречника 3 cm. Ако су тачке X, Y, Z такве да важи $OX = \sqrt{10}$ cm, $2 \cdot OY = 6$ cm, $OZ = 2\sqrt{2}$ cm, одреди положај тих тачака у односу на круг (кружницу).
3. Дат је круг полупречника 4 cm са центром у тачки O. Тачка A налази се на кружници. Тачке B, C и D су такве да важи $AB = 10$ cm, $AC = 2$ cm, $AD = 8$ cm. Да ли дужи AB, AC и AD могу бити тетиве овог круга?
4. Конструиши круг са центром у тачки O полупречника 5 cm и тетиву круга AB тако да важи $AB = OA$. Конструиши централни угао који одговара краћем луку AB. Колики је овај угао? Конструиши један периферијски угао који садржи центар круга и један који не садржи.
5. У кругу полупречника $r = 8$ cm дат је лук $\overparen{AB}$ чији је централни угао α. Одреди дужину тетиве AB ако је:

   а) $\alpha = 60°$ **б)** $\alpha = 90°$; **в)** $\alpha = 180°$; **г)** $\alpha = 240°$.

5.2. Централни и периферијски угао круга

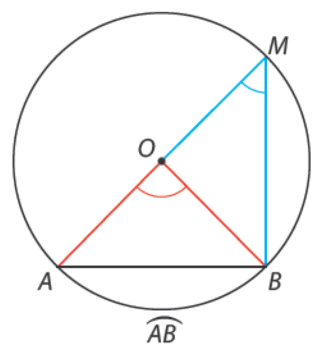
Нека су A и B тачке на кружници $k(O, r)$. Луку $\widehat{AB}$ одговара тачно један централни угао $\measuredangle AOB$ и бесконачно много периферијских углова (на слици су приказана четири таква угла) јер за теме периферијског угла можемо узети било коју тачку кружнице k, осим тачака које припадају краћем луку $\widehat{AB}$.



Већ знамо да величина централног угла зависи од избора тачака A и B, а очекујемо да то на неки начин важи и за периферијске углове. Поставља се питање у каквој су вези периферијски углови над истим кружним луком и да ли постоји нека веза између централног и периферијских углова над истим луком.

Посматраћемо централни $\measuredangle AOB$ и произвољан периферијски $\measuredangle AMB$ над луком $\widehat{AB}$ кружнице $k(O, r)$. У зависности од положаја тачке M могућа су три случаја.

Први случај – центар O припада краку $\measuredangle AMB$

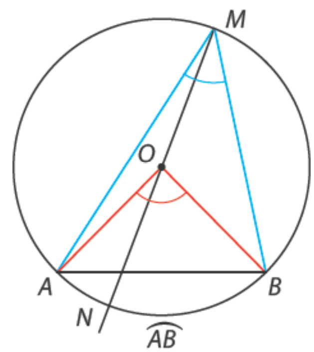


Нека тачка O припада краку AM. Троугао BMO је једнакокраки јер је $BO = OM = r$, па је $\measuredangle MBO = \measuredangle OMB$. Како је $\measuredangle AOB$ спољашњи угао троугла BMO, он је једнак збиру несуседних унутрашњих углова:

$$\measuredangle AOB = \measuredangle OMB + \measuredangle MBO = 2\measuredangle OMB = 2\measuredangle AMB.$$

Дакле, у овом случају смо добили да је централни угао $\measuredangle AOB$ два пута већи од периферијског $\measuredangle AMB$.

Други случај – центар O је у унутрашњости $\measuredangle AMB$

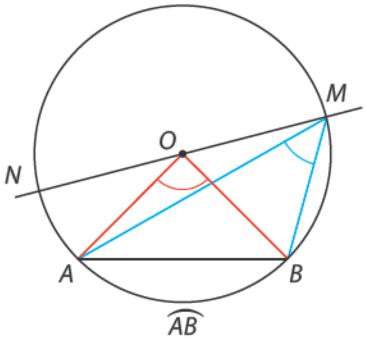


Конструишимо праву која садржи тачке M и O. Пресечне тачке те праве и кружнице k су тачке M и N. За лукове $\widehat{AN}$ и $\widehat{NB}$ сада важи да тачка O припада краку периферијског $\measuredangle AMN$, односно $\measuredangle NMB$ (први случај), па важи: $\measuredangle AON = 2\measuredangle AMN$ и $\measuredangle NOB = 2\measuredangle NMB$.

Следи: $\measuredangle AOB = \measuredangle AON + \measuredangle NOB = 2\measuredangle AMN + 2\measuredangle NMB = 2\measuredangle AMB$.

И у овом случају смо добили исти резултат: $\measuredangle AOB = 2\measuredangle AMB$.

Трећи случај – тачка O је ван $\measuredangle AMB$



Нека је поново N пресечна тачка праве MO и кружнице. Сада први случај имамо за лукове $\overset{\frown}{NA}$ и $\overset{\frown}{NB}$, па је $\measuredangle NOA = 2\measuredangle NMA$ и $\measuredangle NOB = 2\measuredangle NMB$.

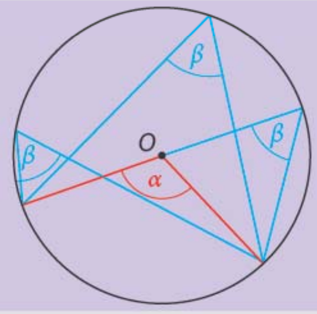
Следи: $\measuredangle AOB = \measuredangle NOB - \measuredangle NOA = 2\measuredangle NMB - 2\measuredangle NMA = 2\measuredangle AMB$.

И у овом случају смо добили исти резултат: $\measuredangle AOB = 2\measuredangle AMB$.

Помоћу ова три случаја доказали смо следећу теорему о односу централног и периферијског угла:

тврђење

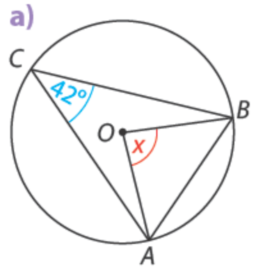
Централни угао круга је два пута већи од периферијског угла над истим луком, $\alpha = 2\beta$.

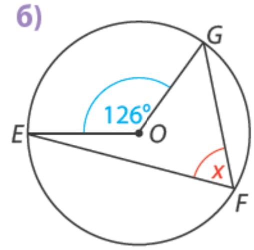


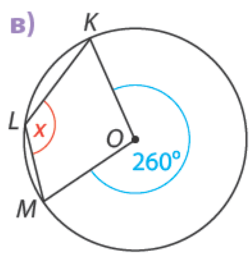
Како за сваки периферијски угао важи да је једнак половини централног угла над истим луком, то значи да су **сви периферијски углови над истим луком једнаки**. Знамо да једнаким кружним луковима круга одговарају једнаки централни углови, што значи да **једнаким кружним луковима одговарају једнаки периферијски углови**. Важи и обрнуто, једнаким периферијским угловима у кругу одговарају једнаки кружни лукови.

пример 1

Одреди непознати угао означен са x.

а) 

б) 

в) 

Решење:

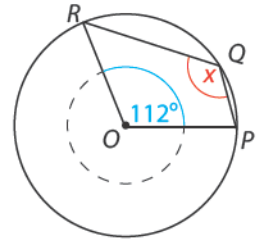
а) $\measuredangle ACB$ је је периферијски, а $\measuredangle AOB$ је централни угао који одговара истом кружном луку $\overset{\frown}{AB}$, па је $\measuredangle AOB$ два пута већи од $\measuredangle ACB$. Дакле, $x = 2 \cdot 42^\circ = 84^\circ$.

б) Као и у претходном случају, $\measuredangle EOG = 2 \cdot \measuredangle EFG$, па је $126^\circ = 2 \cdot x$, тј. $x = 126^\circ : 2 = 63^\circ$.

в) $\measuredangle KLM$ је периферијски угао који одговара кружном луку $\overset{\frown}{KM}$ чији је централни угао 260°, па је $x = 260^\circ : 2 = 130^\circ$.

пример 2

Одреди угао на слици означен са x.



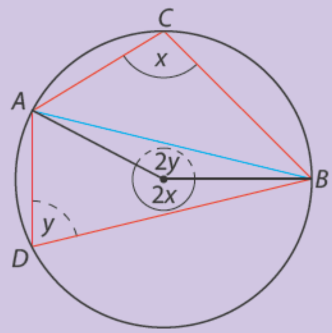
Решење: Угао x је периферијски над кружним луком коме одговара централни угао од $360° - 112° = 248°$ (означен на слици испрекиданом лучном линијом). Угао x једнак је половини тог централног угла:

$$x = 248° : 2 = 124°.$$

тврђење

Ако тачке C и D припадају кружним луковима са различитих страна тетиве AB, онда за периферијске углове $\measuredangle BCA$ и $\measuredangle ADB$ важи:

$$\measuredangle BCA + \measuredangle ADB = 180°.$$

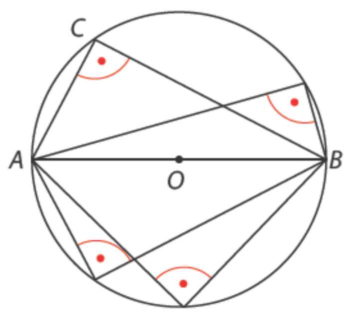


Доказ: Посматрајмо кружницу на којој су изабране две тачке, A и B. Дате тачке одређују два кружна лука. Нека је на једном луку изабрана произвољна тачка C, а на другом тачка D. Тачке C и D налазе се са различитих страна тетиве AB.

Ако је $\measuredangle BCA = x$ и $\measuredangle ADB = y$, онда су њима одговарајући централни углови $2x$ и $2y$.

Како је $2x + 2y = 360°$, добијамо да је $x + y = 180°$.

У специјалном случају, када је AB пречник круга, оба централна угла су $180°$, па су једнаки и периферијски углови, $x = y = 90°$. Другим речима, ако је AB пречник круга и C произвољна тачка кружне линије, различита од тачака A и B, онда је $\measuredangle ACB = 90°$.



тврђење

Периферијски угао над пречником је прав.

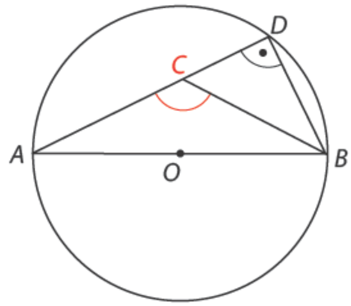
Уопштено, за периферијске углове и тетиве истог круга важи:

1) **једнаким периферијским угловима истог круга одговарају једнаке тетиве**;

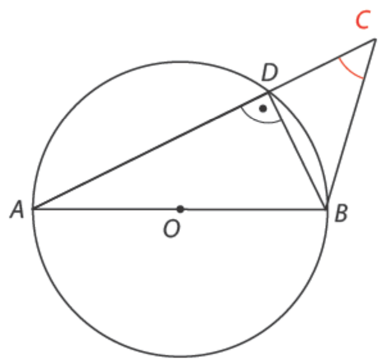
2) **два периферијска угла над двема једнаким тетивама истог круга су једнака или суплементна**.

Можемо ли нешто рећи о $\measuredangle ACB$ ако је AB пречник, а тачка C није на кружници? Случај када тачка C припада правој AB је специјалан, јер су тада тачке A, B и C колинеарне.

Размотримо случај када је тачка C у кругу пречника AB и не припада правој AB. Означимо пресек кружнице и праве AC са D. Како је периферијски угао над пречником прав, онда је $\measuredangle ADB = 90°$. Тражени угао $\measuredangle ACB$ је спољашњи угао ΔBDC, па је $\measuredangle ACB = \measuredangle CBD + \measuredangle BDC = \measuredangle CBD + 90° > 90°$. Дакле, **ако је тачка C у кругу пречника AB и не припада правој AB, онда је $\measuredangle ACB$ туп**.



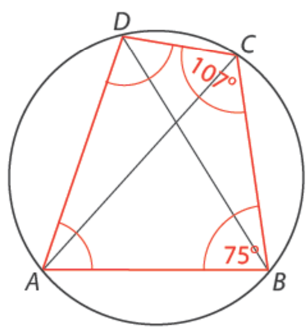
Ако је тачка C ван круга чији је пречник AB и не припада правој AB, означимо опет са D пресечну тачку праве AC и кружнице. Периферијски угао над пречником је прав, дакле, $\measuredangle ADB = 90°$, па је и $\measuredangle BDC$ такође прав. Троугао ΔBDC је правоугли, са правим углом код темена D, па су $\measuredangle CBD$ и $\measuredangle DCB$ оштри. Како је $\measuredangle ACB = \measuredangle DCB$, закључујемо да, **ако је тачка C ван круга чији је пречник AB и не припада правој AB, онда је $\measuredangle ACB$ оштар.**



пример 3

У круг $K(O, r)$ уписан је четвороугао $ABCD$. Ако је $\measuredangle ABC = 75°$ и $\measuredangle BCD = 107°$, одреди преостала два унутрашња угла четвороугла $ABCD$.

Решење: $\measuredangle DAB$ и $\measuredangle BCD$ су периферијски углови над тетивом BD, при чему се тачке A и C налазе са различитих страна те тетиве, па је $\measuredangle DAB + \measuredangle BCD = 180°$, одакле је $\measuredangle DAB = 180° - 107° = 73°$. На исти начин закључујемо да је $\measuredangle ABC + \measuredangle CDA = 180°$ и $\measuredangle CDA = 180° - 75° = 105°$.



пример 4

Нека је $ABCDEFGH$ правилни осмоугао чији је центар тачка O. Одреди $\measuredangle DFA$, $\measuredangle ABD$, $\measuredangle GHC$ и $\measuredangle CGE$.

Решење: Тачка O је центар круга описаног око осмоугла $ABCDEFGH$. Централни угао осмоугла је $\varphi_8 = 360° : 8 = 45°$.

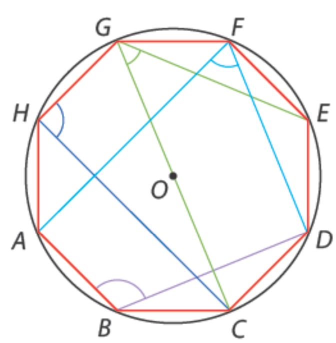
$\measuredangle DFA$ је периферијски угао над луком $\overset{\frown}{DA}$ коме одговара централни угао $\measuredangle DOA = 3\varphi_8 = 135°$, па је

$$\measuredangle DFA = 135° : 2 = 67°30'.$$

$\measuredangle ABD$ и $\measuredangle DFA$ су периферијски углови над тетивом AD, али са различитих страна те тетиве, па је $\measuredangle ABD = 180° - \measuredangle DFA = 180° - 67°30' = 112°30'$.

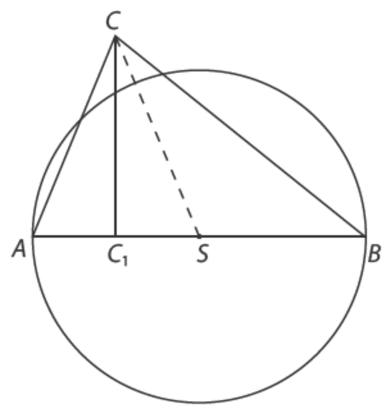
$\measuredangle GHC$ је периферијски угао над пречником, па је $\measuredangle GHC = 90°$.

$\measuredangle CGE$ је периферијски угао над луком $\overset{\frown}{CE}$ коме одговара централни угао $\measuredangle COE = 2\varphi_8 = 90°$, па је $\measuredangle CGE = 90° : 2 = 45°$.



пример 5

Најдужа страница троугла ABC је $AB = 10$ cm. Ако је висина $CC_1 = 6$ cm, да ли је троугао ABC оштроугли, правоугли или тупоугли?



Решење: Највећи угао троугла ABC је угао $\measuredangle BCA$ наспрам најдуже странице AB. Ако је овај угао оштар, онда су и преостала два унутрашња угла такође оштра, па је троугао оштроугли. Уколико је овај угао прав, троугао је правоугли, а ако је туп, троугао је тупоугли. Дакле, довољно је да утврдимо врсту $\measuredangle BCA$. Показали смо да то зависи од положаја тачке C у односу на круг $k(S, r)$ чији је центар средиште дужи AB. Како је $AB = 10$ cm, онда је $r = 5$ cm. Троугао CC_1S је правоугли, па је његова хипотенуза $CS > CC_1 = 6$ cm. Растојање тачке C од центра круга S је веће од 6 cm, што је веће од полупречника круга, па се тачка C налази ван круга. Због тога закључујемо да је $\measuredangle BCA$ оштар, а ΔABC оштроугли.

ЗАДАЦИ

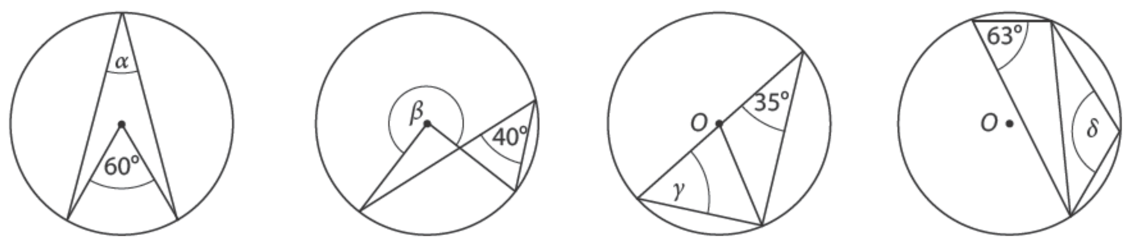
6. Одреди меру периферијског угла који одговара централном од:

а) $60°$; **б)** $150°$; **в)** $240°$; **г)** $55°$.

7. Одреди меру централног угла који одговара периферијском од:

а) $35°$; **б)** $100°$; **в)** $22°30'$; **г)** $90°$.

8. Одреди непознате углове α, β, γ и δ на сликама.



9. Тачке A, B и C налазе се на кружници $k(O, r)$. Ако су углови $\measuredangle ABC = 40°$ и $\measuredangle CAB = 30°$, одреди угао под којим се тетива AB види из тачке D која припада дужем луку $\overset{\frown}{AB}$.

10. Одреди централни и периферијски угао који су одређени:

а) трећином кружнице; **б)** четвртином кружнице;
в) половином кружнице; **г)** тридесетшестином кружнице.

11. Одреди под којим се углом види страница правилног n-тоугла из центра описане кружнице, а под којим из темена које не припада тој страници ако је:

а) $n = 4$; **б)** $n = 5$; **в)** $n = 8$; **г)** $n = 18$.

12. Тетива AB дели кружницу у односу $2 : 3$. Одреди централни и периферијски угао који одговара дужем луку $\overset{\frown}{AB}$.

13. Тачке A, B и C налазе се на кружници и деле је у размери $3 : 4 : 5$. Одреди унутрашње углове троугла ABC.

Обим круга; број π 5.3.

Израчунавање обима геометријских фигура, осим у решавању геометријских проблема, има примену и у свакодневном животу, архитектури, грађевинарству, физици, астрономији, индустрији... Обим произвољног многоугла једнак је збиру дужина његових страница. Код круга је проблем нешто сложенији. У овој лекцији ћемо научити како се израчунава обим круга, тачније, у каквом су односу обим круга и његов пречник, односно полупречник.

Задатак: Потражи у кући неколико предмета у облику круга или ваљка (нпр. различити метални новчићи, чаше, шерпе). Измери пречник и обим одговарајућег круга сваког од изабраних предмета. За мерење обима можеш користити конац, жицу или папирну траку коју ћеш обмотати око предмета (направити обруч), а затим исправити и измерити његову дужину. Та дужина представља обим круга. Добијене податке унеси у следећу табелу.

Предмет	Пречник	Обим	Обим : пречник
чаша	8 cm	25 cm	3,125
сто	55 cm	174 cm	3,164
(попуни)			

У последњу колону упиши количник измереног обима и пречника. Шта примећујеш?

Без обзира на различите величине измерених предмета и извесна одступања услед грешке приликом мерења, можемо уочити да се подаци у последњој колони не разликују знатно и да је реч о бројевима који су нешто већи од броја 3. Поставља се питање да ли је однос, тј. количник обима и пречника круга увек исти (непроменљив, константан број). Неколико мерења свакако није довољно да будемо сигурни. Ипак, закључак је тачан, те важи следеће тврђење.

Количник обима и пречника круга је константан.

тврђење

Та константа се обележава грчким словом π („пи“). Како је π једнако количнику обима O и пречника $2r$, то значи да обим круга можемо израчунати множењем пречника круга бројем π.

Обим круга полупречника r је $\boldsymbol{O = 2r\pi}$.

тврђење

Да је однос обима и пречника круга увек исти, знало се још у старом веку. Мерењем смо утврдили да је број π нешто већи од 3, али нам је за израчунавање обима потребна тачна вредност ове константе. Овде наилазимо на нови проблем. Доказано је да је број π ирационалан, што значи да има бесконачан непериодичан запис и да можемо одредити само његову приближну вредност.

$$\pi \approx 3{,}141592653589793\ldots$$

За решавање практичних проблема најчешће се користи приближна вредност на две децимале:

$$\pi \approx 3,14.$$

У пракси се често користи и приближна вредност

$$\pi \approx \frac{22}{7} = 3,\overline{142857}.$$

пример 1

Израчунај обим круга ако је његов полупречник $r = 1$ cm.

Решење: $O = 2r\pi = 2\pi$ cm. Тражени обим износи 2π cm.

Напомена: Ако за број π узимамо његову приближну вредност, онда је и резултат приближна, а не тачна вредност обима. У овом случају, ако узмемо $\pi \approx 3,14$, добијамо да је $O \approx 6,28$ cm.

пример 2

Израчунај обим круга ако је његов пречник 35 cm. Колика је приближна вредност обима ако за приближну вредност броја π узмемо: **а)** 3,14; **б)** $\frac{22}{7}$?

Решење: $O = 2r\pi$. У овом случају је $2r = 35$ cm, па је $O = 35\pi$ cm.

а) $O \approx 35 \cdot 3,14 \text{ cm} = 109,9 \text{ cm}$; **б)** $O \approx 35 \cdot \frac{22}{7} \text{ cm} = 5 \cdot 22 \text{ cm} = 110 \text{ cm}$.

пример 3

Обим круга износи 15π cm. Одреди полупречник тог круга.

Решење: Обим круга износи $O = 2r\pi$, па је $r = \frac{O}{2\pi}$.

Следи: $r = \frac{15\pi}{2\pi} \text{ cm} = \frac{15}{2} \text{ cm} = 7,5 \text{ cm}$.

пример 4

Да ли се од комада металне шипке дужине 130 cm може направити обруч коша чији је пречник 45 cm?

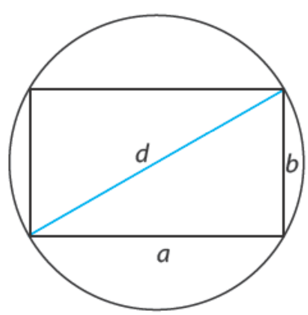
Решење: Обруч је могуће направити ако је дужина шипке већа или једнака обиму круга пречника $2r = 45$ cm.

$$O = 45\pi \text{ cm} \approx 45 \cdot 3,14 \text{ cm} = 141,3 \text{ cm}$$

Како је обим већи од 130 cm, закључујемо да није могуће направити обруч.

пример 5

Око правоугаоника страница $a = 12$ cm и $b = 5$ cm описан је круг. Израчунај обим тог круга.



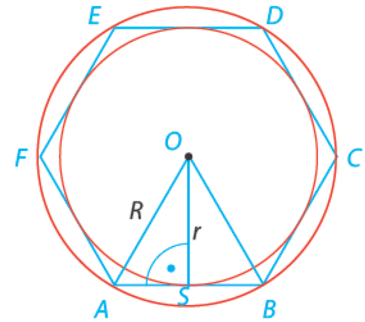
Решење: Пречник описаног круга једнак је дијагонали правоугаоника. Применом Питагорине теореме добијамо:

$d^2 = a^2 + b^2 = 12^2 + 5^2 = 144 + 25 = 169$, те је $d = 13$ cm.

Тражени обим износи $O = 13\pi$ cm.

пример 6

За колико је обим круга описаног око правилног шестоугла чија је дужина странице $a = 4$ cm већи од обима круга који је уписан у тај шестоугао? Рачунај да је $\pi \approx 3{,}1$ и $\sqrt{3} \approx 1{,}7$.



Решење: ΔABO је једнакостранични, па је полупречник описаног круга $a = R = OA = 4$ cm.

Полупречник уписаног круга једнак је дужини висине OS у једнакостраничном троуглу ABO, па је

$$r = OS = \frac{R\sqrt{3}}{2} = 2\sqrt{3}\text{ cm}.$$

Разлика обима је: $2\pi R - 2\pi r = 2\pi(4 - 2\sqrt{3})$ cm

$$\approx 2 \cdot 3{,}1 \cdot (4 - 2 \cdot 1{,}7)\text{ cm} = 3{,}72\text{ cm}.$$

ЗАДАЦИ

14. Израчунај обим кружнице полупречника r (користи $\pi \approx 3{,}14$):

а) $r = 1$ cm; **б)** $r = 4$ cm; **в)** $r = 50$ cm; **г)** $\frac{1}{6{,}28}$ cm.

15. Користећи $\pi \approx 3{,}14$, израчунај полупречник r кружнице ако је обим O:

а) 18,84 cm; **б)** 31,4 cm; **в)** 9,42 cm; **г)** 0,628 cm.

16. Ако је r полупречник, R пречник и O обим кружнице, попуни табелу (користи $\pi \approx \frac{22}{7}$).

r (cm)	14			$\frac{7}{11}$		
R (cm)		63			$\frac{343}{44}$	
O (cm)			220			1,5

17. Обим кружнице $k_1(O_1, r_1)$ два пута је већи од обима кружнице $k_2(O_2, r_2)$. Одреди однос пречника ових кружница.

18. Одреди обим кружнице уписане у једнакостранични троугао ако је:

а) страница 3 cm; **б)** висина $\sqrt{3}$ cm; **в)** површина $12\sqrt{3}$ cm^2.

19. Израчунај разлику обима описане и уписане кружнице квадрата:

а) странице 5 cm; **б)** дијагонале $2\sqrt{2}$ cm; **в)** површине 24 cm^2.

20. Израчунај збир обима описане и уписане кружнице правилног шестоугла:

а) странице 4 cm; **б)** краће дијагонале $2\sqrt{3}$ cm; **в)** дуже дијагонале 12 cm.

21. Обим кружнице k је 12π cm. Израчунај површине једнакостраничног троугла, квадрата и правилног шестоугла:

а) уписаних у кружницу k; **б)** описаних око кружнице k.

22. Израчунај обим уписане и описане кружнице правоуглог троугла чије су катете a и b, а хипотенуза c ако је:

а) $a = 3$ cm и $b = 4$ cm; **б)** $a = 5$ cm и $c = 13$ cm; **в)** $b = 1$ cm и $c = \sqrt{3}$ cm.

23. Колики је обим базена кружног облика ако је растојање између две најудаљеније тачке ивице базена 20 m? Користи $\pi \approx 3{,}14$.

24. Колики пут је прешао камион ако је точак полупречника 0,35 m направио 10000 обртаја? (Користи $\pi \approx \frac{22}{7}$.)

ЗАНИМЉИВОСТ

О броју π

Број π спада у најпознатије и најзначајније константе у математици. Осим што представља однос обима и пречника круга, појављује се у различитим областима математике и природних наука. Познат је и као Архимедова константа, али и као Лудолфов број. Оба назива потичу од математичара значајних за одређивање његове приближне вредности.

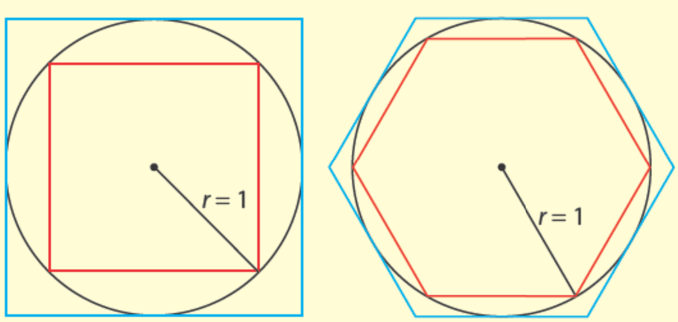
3,14159265358979323846264338
3279502884197169399375105820
9749445923078164062862089986
2803482534211706798214808651
3282306647093844609550582231
7253594081284811174502841027
0193852110555964462294895493
0381964428810975665933446128
4756482337867831652712019091
4564856692346034861045432664
8213393607260249141273724587
0066063155881748815209209628
2925409171536436789259036001

Већ смо рекли да је број π ирационалан. Захваљујући развоју математике и технологије данас је могуће одредити изузетно велики број децимала, али не и његову тачну вредност. Проблем израчунавања приближне вредности броја π са што већом тачношћу вековима је привлачио пажњу математичара.

Обим круга појављује се у бројним практичним проблемима, па не чуди чињеница да се у свим цивилизацијама старог века среће нека формула за његово израчунавање, која подразумева да је однос обима и пречника константан.

Вавилонци су пре 4000 година за ову константу користили процену 3,125. Папирус чији је аутор египатски свештеник Ахмес из 17. века пре н. е. показује да су Египћани дошли до закључка да је обим круга 3,1605 пута већи од његовог пречника.

Први значајан резултат дугујемо старогрчком математичару Архимеду, који је у 3. веку пре н. е. одредио приближну вредност броја π на две децимале, $\pi \approx 3,14$. Осим тога, био је свестан да је добијена вредност само приближан, али не и тачан резултат. Највећи значај Архимедовог рада је у томе што метод који је користио може да се примени и за израчунавање са већом тачношћу. Метод се састоји од уписивања и описивања правилних многоуглова око круга полупречника $r = 1$. Обим уписаног многоугла је мањи, а обим описаног је већи од обима круга. Израчунавањем обима уписаног и описаног многоугла можемо да проценимо вредност обима круга. Архимед је приметио да се тачност израчунавања повећава са бројем страница многоуглова које посматра, односно да је одступање мање ако је број страница већи.



Архимед је прво у круг полупречника $r = 1$ уписао и око њега описао квадрат. Страница описаног квадрата једнака је пречнику круга, односно 2. Дијагонала уписаног квадрата је такође једнака 2, па је његова страница $\sqrt{2}$. За обим круга онда важи $4 \cdot \sqrt{2} < O < 4 \cdot 2$. Пречник круга је 2, што значи да је $2{,}82 < \pi < 4$ (јер је $\sqrt{2} > 1{,}41$). Разлика обима описаног и уписаног квадрата је сувише велика, тако да не даје добру процену.

Уписивањем и описивањем правилног шестоугла Архимед је добио да је $6 < O < 4\sqrt{3}$, одакле је $3 < \pi < 3{,}47$ (јер је $\sqrt{3} < 1{,}735$). Овај резултат је бољи, али је прецизност и даље недовољна да одредимо чак и прву цифру после децималне запете. После шестоуглова посматрао је многоуглове са 12, 24, 48 и на крају са 96 страница. Рачунањем обима уписаног и описаног деведесетшестоугла Архимед долази до процене:

$$\frac{223}{71} < \pi < \frac{22}{7} \qquad \text{или} \qquad 3{,}1408 < \pi < 3{,}1429\,.$$

Ако за приближну вредност броја π узмемо аритметичку средину бројева 3,1408 и 3,1429 добијамо процену $\pi \approx 3{,}14185$.

Користећи Архимедов метод уписивања и описивања правилних многоуглова са знатно већим бројем страница, математичари су наставили са одређивањем наредних цифара броја π. Најдаље је отишао немачко-холандски математичар Лудолф ван Цојлен (Ludolf van Ceulen), који је почетком 17. века помоћу многоугла са око 2^{62} странице одредио првих 35 децимала броја π. У његову част број π се назива и Лудолфов број.

Ван Цојлен

Даљи развој математике донео је нове начине рачунања приближне вредности броја π, а појава рачунара је омогућила знатно брже извођење потребних израчунавања. Управо коришћењем модерних алгоритама и најсавременијих рачунарских система 2022. године израчунато је 10^{14} цифара броја π.

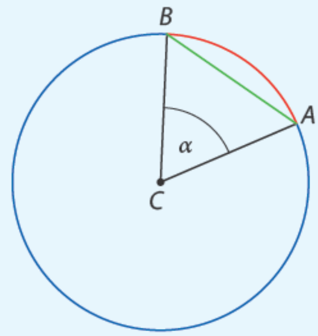
π = 3,1415926535897932384626433832795028841971693993751058209749445923078164062862089986280348253421170679821480865132823066470938446095505822317253594081284811174502841027019385211055596446229489549303819644288109756659334461284756482337867831652712019091456485669234603486104543266482...

Веровали или не, постоји и такмичење у памћењу што већег броја цифара броја π. Светски рекорд се стално побољшава, а износи преко 100000 цифара. За изговарање оволиког броја цифара потребно је више од 16 сати, али и скраћен (шифрован) изговор који штеди време.

5.4. Дужина кружног лука

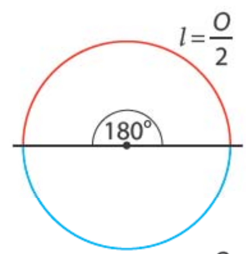
подсетник

Кружни лук је део кружнице ограничен двема тачкама те кружнице. На слици је приказана кружница са центром у тачки C, на којој су изабране тачке A и B, које на кружници одређују кружни лук $\overset{\frown}{AB}$ (означен црвеном бојом). Кажемо да је $\overset{\frown}{AB}$ кружни лук над тетивом AB, односно кружни лук који одговара тетиви AB. Кружном луку $\overset{\frown}{AB}$ одговара централни угао α.
Једнаким централним угловима одговарају кружни лукови једнаке дужине и обрнуто.

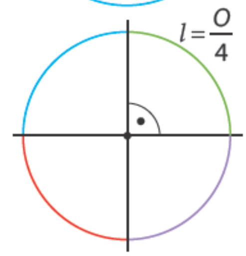


У претходној лекцији научили смо да је обим круга, односно дужина кружне линије, $O = 2r\pi$. Кружни лук је део кружне линије, па очекујемо да његова дужина на неки начин зависи (али је свакако мања) од дужине кружнице.

Ако произвољан круг поделимо пречником на два дела, на кружној линији добијамо два кружна лука којима одговарају једнаки централни углови $\alpha = 360^\circ : 2 = 180^\circ$. Дужине ових кружних лукова су онда једнаке, па је њихова дужина l једнака половини дужине кружне линије, дакле, $l = \frac{O}{2}$.



Ако круг поделимо помоћу два међусобно нормална пречника на четири дела, кружница је подељена на четири кружна лука којима одговарају једнаки централни углови $\alpha = 360^\circ : 4 = 90^\circ$, па је дужина сваког од лукова $l = \frac{O}{4}$.



Ако пун угао круга поделимо на k једнаких делова, добијамо k кружних лукова једнаке дужине. Дакле, централном углу чија је мера $\alpha = \frac{360^\circ}{k}$ одговара кружни лук дужине $l = \frac{O}{k} = \frac{2r\pi}{k}$. Сменом $k = \frac{360^\circ}{\alpha}$ у једнакост $l = \frac{O}{k}$ добијамо

$$\boldsymbol{l = \frac{\alpha}{360^\circ} \cdot O},$$

а сменом $k = \frac{360^\circ}{\alpha}$ у једнакост $l = \frac{2r\pi}{k}$ и скраћивањем разломка са 2 добијамо

$$\boldsymbol{l = \frac{r\pi\alpha}{180^\circ}}.$$

Ова запажања можемо уопштити и када је централни угао α произвољне величине.

тврђење

У сваком кругу полупречника r и обима O, дужина кружног лука l и величина одговарајућег централног угла α директно су пропорционалне величине, те важе формуле:

$$\boldsymbol{l = \frac{r\pi\alpha}{180^\circ}} \quad \text{и} \quad \boldsymbol{l = \frac{\alpha}{360^\circ} \cdot O}.$$

пример 1

Израчунај дужину кружног лука ако су дати полупречник круга и централни угао који одговара том кружном луку:

а) $\alpha = 75^\circ, r = 5$ cm; б) $\alpha = 120^\circ, r = 7$ cm; в) $\alpha = 22^\circ30', r = 12$ cm.

Решење: а) $l = \frac{5\pi \cdot 75^\circ}{180^\circ}$ cm $= \frac{5\pi \cdot 5}{12}$ cm $= \frac{25\pi}{12}$ cm;

б) $l = \frac{7\pi \cdot 120^\circ}{180^\circ}$ cm $= \frac{7\pi \cdot 2}{3}$ cm $= \frac{14\pi}{3}$ cm;

в) $l = \frac{12\pi \cdot 22^\circ30'}{180^\circ}$ cm $= \frac{12\pi}{8}$ cm $= \frac{3\pi}{2}$ cm.

пример 2

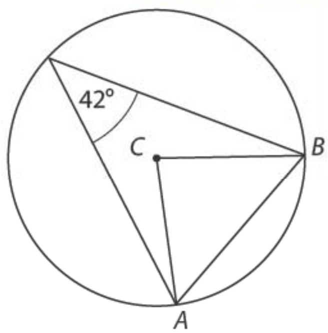
Дужина кружног лука износи 18π dm. Ако је полупречник круга $r = 12$ dm, одреди централни угао који одговара датом луку.

Решење: Како је $18\pi = \frac{12\pi\alpha}{180^\circ}$, то је $12\pi\alpha = 18\pi \cdot 180^\circ$,

па је $\alpha = \frac{18\pi \cdot 180^\circ}{12\pi} = \frac{3 \cdot 180^\circ}{2} = 270^\circ$.

пример 3

На кружници $k(C, 4$ cm) дате су тачке A и B (као на слици). Израчунај дужину $\widehat{AB}$.



Решење: Кружном луку $\widehat{AB}$ одговара периферијски угао од 42°, па је одговарајући централни угао $2 \cdot 42^\circ = 84^\circ$. Дужина $\widehat{AB}$ износи:

$$l = \frac{4\pi \cdot 84^\circ}{180^\circ} \text{ cm} = \frac{28}{15}\pi \text{ cm}.$$

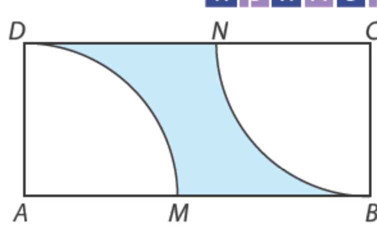
пример 4

У круг пречника 36 cm уписан је правилни дванаестоугао. Одреди дужину краћег кружног лука који одговара једној страници тог дванаестоугла.

Решење: Кружна линија је теменима правилног дванаестоугла подељена на 12 подударних кружних лукова, па је дужина сваког од њих једнака дванаестини обима круга, тј. $l = \frac{O}{12} = \frac{36\pi}{12}$ cm $= 3\pi$ cm.

пример 5

Правоугаоник $ABCD$ има странице $AB = 9$ cm и $AD = 4$ cm. Оба лука $\widehat{DM}$ и $\widehat{BN}$ су једнака четвртини кружнице полупречника $AM = CN = 4$ cm. Израчунај обим осенчене фигуре на слици. Користи $\pi \approx 3{,}14$.



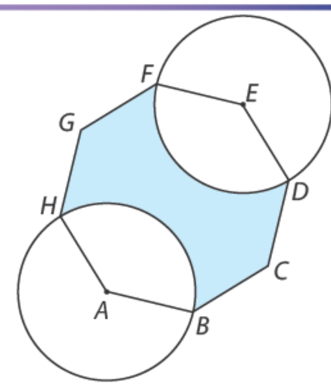
Решење: $\widehat{DM}$ и $\widehat{BN}$ су лукови кружнице полупречника $r = 4$ cm, којима одговара угао од 90°.

$\widehat{DM} = \widehat{BN} = \frac{4\pi \cdot 90^\circ}{180^\circ}$ cm $= 2\pi$ cm; $MB = ND = AB - AM = (9 - 4)$ cm $= 5$ cm;

$O = 2 \cdot (MB + \widehat{DM}) = 2 \cdot (5 + 2\pi)$ cm $\approx 2 \cdot (5 + 2 \cdot 3{,}14)$ cm $= 22{,}56$ cm.

пример 6

Дат је правилни осмоугао $ABCDEFGH$ странице $a = 7$ cm. Конструисана су два круга полупречника 7 cm, један са центром у тачки A, а други са центром у тачки E, као на слици. Израчунај обим осенчене фигуре. ($\pi \approx \frac{22}{7}$)



Решење:

Обим осенчене фигуре износи:

$$O = BC + CD + \widehat{DF} + FG + GH + \widehat{HB}$$
$$= 4a + \widehat{DF} + \widehat{HB}.$$

Кружном луку $\widehat{DF}$ одговара централни угао који је једнак унутрашњем углу правилног осмоугла, $\alpha = 135°$.

$$\widehat{DF} = \frac{r\pi\alpha}{180°} = \frac{7\pi \cdot 135°}{180°}\text{ cm} = \frac{21}{4}\pi\text{ cm}$$

$\widehat{HB} = \widehat{DF} = \frac{21}{4}\pi$ cm јер луковима $\widehat{HB}$ и $\widehat{DF}$ одговарају једнаки централни углови у подударним круговима. Коначно:

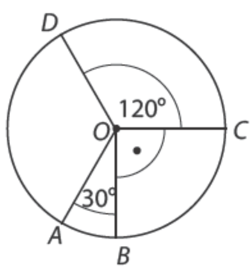
$$O = 4a + 2 \cdot \widehat{DF} = \left(4 \cdot 7 + 2 \cdot \frac{21}{4}\pi\right)\text{ cm} \approx \left(4 \cdot 7 + 2 \cdot \frac{21}{4} \cdot \frac{22}{7}\right)\text{cm} = 61\text{ cm}.$$

ЗАДАЦИ

25. Одреди дужину кружног лука полупречника 4 cm који одговара централном углу од:

а) 30°; **б)** 45°; **в)** 60°; **г)** 90°; **д)** 180°; **ђ)** 270°; **е)** 300°; **ж)** 330°.

26. Одреди дужину лукова $\widehat{AB}$, $\widehat{BC}$ и $\widehat{CD}$ са слике ако је: **а)** $OA = 2$ cm; **б)** $BC = 4\sqrt{2}$ cm; **в)** $DC = 4\sqrt{3}$.



27. На кружници $k(O, r)$ луку дужине l одговара централни угао α. Попуни табелу.

r (cm)	3	4		0,5	9	
l (cm)	2π		4π	$\frac{\pi}{8}$		$\frac{9}{4}\pi$
α		90°	180°		300°	67°30′

28. На кружници $k(O, 5\text{ cm})$ одреди дужину лука l коме одговара периферијски угао од:

а) 60°; **б)** 22°30′; **в)** 100°; **г)** 36°.

29. Око правилног многоугла $A_1A_2...A_n$ странице 2 cm описана је кружница. Одреди разлику дужина дужег и краћег лука који одговарају тетиви A_1A_2 ако је:

а) $n = 3$; **б)** $n = 4$; **в)** $n = 6$.

30. Дат је квадрат $ABCD$ странице 6 cm и конструисане су кружнице са центрима у тачкама A и B пречника 12 cm чији је пресек унутар квадрата тачка O. Одреди дужину краћег лука $\widehat{AO}$.

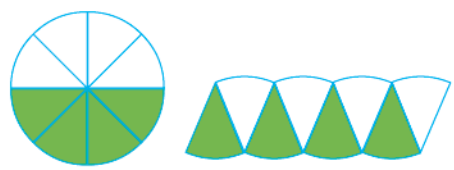
31. Над свим страницама правоуглог троугла као пречницима споља су конструисани полукругови. Одреди укупну дужину кружних лукова ако су катете троугла 5 cm и 12 cm.

Површина круга 5.5.

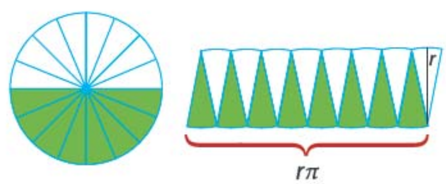
Код правилних многоуглова површина је сразмерна квадрату дужине странице, па је тако површина једнакостраничног троугла $\frac{a^2\sqrt{3}}{4}$, површина квадрата (правилног четвороугла) a^2, а правилног шестоугла $\frac{3a^2\sqrt{3}}{2}$. Уписивањем и описивањем правилних многоуглова Архимед је закључио да, што је број страница многоугла већи, то је одступање његовог обима од обима круга мање. Исти закључак се односи и на површину. Стога можемо очекивати да површина круга буде сразмерна квадрату полупречника (r^2).

Приликом израчунавања површина разних геометријских фигура често смо користили метод резања и премештања тако да дату фигуру трансформишемо у неку фигуру једнаке површине коју умемо да израчунамо. Покушајмо да применимо ову идеју на круг полупречника r.

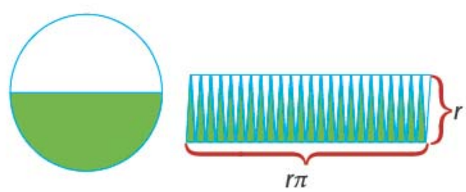
Поделимо круг на осам подударних делова као на слици, па обојмо четири дела у зелено. Исецањем и премештањем зелених и белих делова добијамо фигуру приказану на слици десно од круга. Та фигура има две паралелне странице једнаких дужина и подсећа на паралелограм са две „таласасте” странице.



Поделимо сада круг на 16 подударних делова, као на слици. Уочи да сваки од зелених (или белих) делова почиње да личи на троугао висине r, а премештањем тих делова добијамо фигуру која још више личи на паралелограм, а „таласастост” се додатно „исправила”. Таласаста страница паралелограма има дужину полуобима круга, дакле, $r\pi$.



Ако наставимо да делимо круг, сваком следећом поделом круга на више подударних делова све више ћемо „исправљати” паралелограм, који ће све више личити на правоугаоник. Ако бисмо круг разрезали на довољно велики број делова, површина фигуре коју добијамо премештањем тих делова занемарљиво би одступала од површине правоугаоника страница $r\pi$ и r. Тако добијамо површину круга $P = r\pi \cdot r = r^2\pi$.



Површина круга полупречника r је $P = r^2\pi$.

твр ђење

занимљивост

Формулу за површину круга открио је Архимед анализирајући уписане и описане правилне многоуглове за дати круг.

Иако овде нисмо уписивали и описивали многоуглове него смо разрезивали круг и премештали његове делове, овај поступак има доста сличности са Архимедовим. У оба случаја се са повећавањем броја страница многоугла, односно броја делова на које разрезујемо круг, смањује одступање, а тиме и грешка израчунавања. Када је број подела круга довољно велики, радимо са веома малим деловима, али израчунавамо површину круга са великом прецизношћу иако је замењујемо површином правоугаоника.

Њутн

Крајем 17. века Исак Њутн (на горњој слици) и Готфрид Вилхелм Лајбниц (на доњој слици), независно један од другог, открили су методу рачунања са произвољно малим деловима (којих има бесконачно много). Њутн–Лајбницова формула има изузетно широку примену, од математике, природних наука и технике, до економије и друштвених наука. Једна од примена је и израчунавање површина разних фигура, слично као што смо израчунали површину круга у овој лекцији.

Лајбниц

пример 1

Израчунај површину круга чији је полупречник:

а) $r = 1$ cm; б) $r = \sqrt{3}$ cm; в) $r = \dfrac{3\sqrt{5}}{2}$ dm.

Решење: а) $P = r^2\pi = 1^2 \cdot \pi\text{ cm}^2 = \pi\text{ cm}^2$;

б) $P = \left(\sqrt{3}\right)^2 \cdot \pi\text{ cm}^2 = 3\pi\text{ cm}^2$;

в) $P = \left(\dfrac{3\sqrt{5}}{2}\right)^2 \cdot \pi\text{ dm}^2 = \dfrac{9 \cdot 5}{4}\pi\text{ dm}^2 = \dfrac{45}{4}\pi\text{ dm}^2$.

пример 2

Израчунај површину круга пречника 3,5 cm. Користи приближну вредност $\pi \approx \dfrac{22}{7}$.

Решење: Полупречник датог круга једнак је половини пречника, $r = \dfrac{3{,}5}{2}\text{ cm} = \dfrac{7}{4}\text{ cm}$.

$$P = \left(\frac{7}{4}\right)^2 \cdot \pi\text{ cm}^2 \approx \frac{49}{16} \cdot \frac{22}{7}\text{ cm}^2$$

Тражена приближна вредност је $P \approx \dfrac{77}{8}\text{ cm}^2$, тј. $P \approx 9{,}625\text{ cm}^2$.

пример 3

Обим круга је 12,56 cm. Израчунај површину тог круга. ($\pi \approx 3{,}14$)

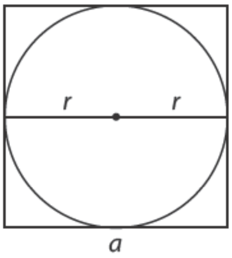
Решење: $O = 2r\pi$, па је $12{,}56 \text{ cm} = 2r \cdot 3{,}14. = 6{,}28r$. Одавде добијамо

$$r = \frac{12{,}56}{6{,}28} \text{ cm} = 2 \text{ cm}.$$

Следи: $P = r^2\pi \approx 2^2 \cdot 3{,}14 \text{ cm}^2 = 12{,}56 \text{ cm}^2$.

пример 4

Израчунај површину круга уписаног у квадрат странице $a = 3\sqrt{2}$ cm. ($\pi = 3{,}14$)



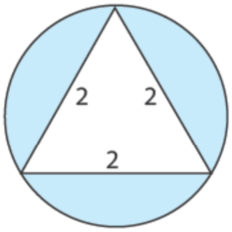
Решење: $r = \frac{a}{2}$, $r = \frac{3\sqrt{2}}{2}$ cm, па је тражена површина:

$$P = \frac{9 \cdot 2}{4}\pi \text{ cm}^2 = \frac{9}{2}\pi \text{ cm}^2.$$

Следи: $P \approx \frac{9}{2} \cdot 3{,}14 \text{ cm}^2 = 14{,}13 \text{ cm}^2$.

пример 5

Израчунај површину осенчене фигуре.



Решење: Површина осенченог дела једнака је разлици површине круга описаног око једнакостраничног троугла и површине тог троугла. Страница троугла је $a = 2$, те је његова површина: $P_\Delta = \frac{a^2\sqrt{3}}{4} = \frac{4\sqrt{3}}{4} = \sqrt{3}$.

Полупречник описаног круга једнакостраничног троугла је

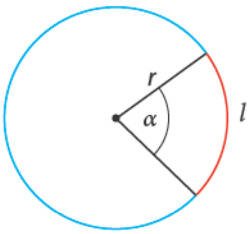
$R = \frac{a\sqrt{3}}{3}$, па је $R = \frac{2\sqrt{3}}{3}$. Сада можемо израчунати површину

круга: $P_{\bigcirc} = \left(\frac{2\sqrt{3}}{3}\right)^2 \cdot \pi = \frac{12}{9}\pi = \frac{4}{3}\pi$.

Површина осенчене фигуре је: $P = P_{\bigcirc} - P_\Delta = \frac{4\pi}{3} - \sqrt{3}$.

пример 6

Израчунај обим и површину круга са слике ако је централни угао $\alpha = 80^\circ$, а дужина црвеног лука $l = 2\pi$ cm.



Решење: l је дужина кружног лука датог круга коме одговара централни угао $\alpha = 80^\circ$. То значи да је $l = \frac{80^\circ}{360^\circ} \cdot O$, где је O обим датог круга.

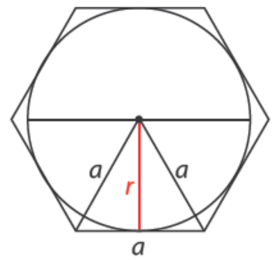
$$l = \frac{80^\circ}{360^\circ} \cdot O = \frac{2}{9} \cdot O, \text{ па је } O = l : \frac{2}{9} = l \cdot \frac{9}{2} = 2\pi \cdot \frac{9}{2} \text{ cm} = 9\pi \text{ cm}.$$

Како је $O = 2r\pi$, следи да је $r = \frac{9\pi}{2\pi} \text{ cm} = \frac{9}{2} \text{ cm}$.

Површина датог круга је $P = r^2\pi = \frac{81}{4}\pi \text{ cm}^2$.

пример 7

У правилни шестоугао странице $a = 4$ cm уписан је круг. Израчунај површину тог круга.



Решење: Полупречник r уписаног круга је истовремено и висина карактеристичног троугла, који је код шестоугла једнакостраничан.

Дакле, $r = \frac{a\sqrt{3}}{2} = 2\sqrt{3}$ cm,

па имамо $P = \left(2\sqrt{3}\right)^2 \pi$ cm^2 = 12π cm^2.

ЗАДАЦИ

32. Израчунај површину круга чији је полупречник r (користи $\pi = 3{,}14$):

а) $r = 10$ cm; **б)** $r = 6$ cm; **в)** $2r = 9$ cm; **г)** $2r = 4\sqrt{3}$.

33. Израчунај полупречник круга чија је површина (користи $\pi \approx \frac{22}{7}$):

а) 154 cm^2; **б)** 2464 cm^2; **в)** $\frac{11}{14}$ cm^2; **г)** $\frac{77}{2}$ cm^2.

34. Дат је круг полупречника r, обима O и површине P. Попуни табелу.

r (cm)	2			$\sqrt{3}$		
O (cm)		π			10π	
P (cm^2)			π			5π

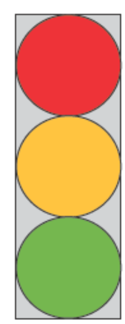
35. Круг K_1 има x пута већи полупречник од круга K_2. Одреди однос површина и однос обима кругова K_1 и K_2.

36. Обим једног круга је 10π cm, а другог за 20% већи. Одреди разлику њихових површина.

37. Ако је P_o површина описане кружнице, а P_u површина уписане кружнице правилног n-тоугла странице a, попуни табелу.

n	3	4	6
a (cm)	$2\sqrt{3}$		
P_o (cm^2)		2π	
P_u (cm^2)			2π

38. Одреди површину светлећих делова семафора на слици.



3 dm

39. Израчунај површину уписаног и описаног круга правоуглог троугла чије су катете 9 cm и 12 cm.

40. Израчунај однос површина описаног и уписаног круга једнакостраничног троугла.

41. Око правоугаоника дијагонале 13 cm и краће странице 5 cm описан је круг. Израчунај површину дела круга који се налази ван правоугаоника.

42. За колико се процената повећа површина круга ако се пречник увећа за 50%?

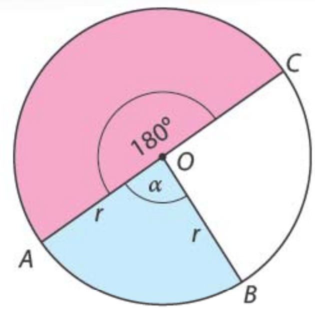
43. Да ли се више исплати по истој цени купити пицу пречника 50 cm или две пице пречника 32 cm?

Површина кружног исечка и кружног прстена 5.6.

Површина кружног исечка

Кружни исечак је део круга ограничен кружним луком и полупречницима који садрже крајеве тог лука.

Напомена: Води рачуна о томе да не побркаш изразе *кружни исечак* и *кружни одсечак*. **Кружни одсечак** је део круга ограничен кружним луком и тетивом.



На слици је плавом бојом осенчен кружни исечак ограничен кружним луком $\widehat{AB}$ и полупречницима OA и OB. Кружном луку $\widehat{AB}$ одговара централни $\measuredangle AOB = \alpha$.

Кружни исечак осенчен ружичастом бојом, чији је централни угао 180°, назива се **полукруг**. Површина полукруга једнака је половини површине круга.

Већ смо утврдили да је дужина кружног лука $\widehat{AB}$ директно пропорционална величини централног угла, тј. да су дужина кружног лука $\widehat{AB}$ и обим круга у истом односу као и централни и пун угао, $\widehat{AB} : O = \alpha : 360°$. На исти начин површина кружног исечка директно зависи од централног угла. Однос централног угла према пуном углу једнак је односу површине кружног исечка према површини круга.

Обележимо са P_i површину кружног исечка круга полупречника r, коме одговара централни угао α, а са P обележимо површину круга. Тада је:

$$P_i : P = \alpha : 360°.$$

Одавде добијамо $P_i = \dfrac{\alpha \cdot P}{360°}$, тј. $\boldsymbol{P_i = \dfrac{\alpha}{360°} \cdot P}$, па је:

$$\boldsymbol{P_i = \frac{r^2 \pi \alpha}{360°}}.$$

Како је дужина кружног лука $\widehat{AB}$ $l = \dfrac{r\pi\alpha}{180°}$, површина кружног исечка се може једноставно изразити преко l:

$$P_i = \frac{\alpha \cdot P}{360°} = \frac{r\pi\alpha}{180°} \cdot \frac{r}{2} = l \cdot \frac{r}{2};$$

$$\boldsymbol{P_i = \frac{l \cdot r}{2}}.$$

пример 1

Полупречник круга је $r = 4$ cm. Израчунај површину кружног исечка коме одговара централни угао: **а)** $\alpha = 30°$; **б)** $\alpha = 150°$; **в)** $\alpha = 67°30'$.

Решење: а) $P_i = \dfrac{r^2\pi\alpha}{360°} = \dfrac{16\pi \cdot 30°}{360°}\,\text{cm}^2 = \dfrac{4\pi}{3}\,\text{cm}^2$;

б) $P_i = \dfrac{16\pi \cdot 150°}{360°}\,\text{cm}^2 = \dfrac{20\pi}{3}\,\text{cm}^2$;

в) $P_i = \dfrac{16\pi \cdot 67°30'}{360°}\,\text{cm}^2 = 3\pi\,\text{cm}^2$.

пример 2

Површина кружног исечка коме одговара централни угао $\alpha = 120°$ је $12\pi\,\text{dm}^2$. Одреди полупречник тог круга.

Решење: $12\pi\,\text{dm}^2 = \dfrac{r^2\pi \cdot 120°}{360°}$.

После скраћивања разломка на десној страни добијамо $12\pi\,\text{dm}^2 = \dfrac{r^2\pi}{3}$. Одатле је $r^2 = 36\,\text{dm}^2$, па је $r = 6$ dm.

пример 3

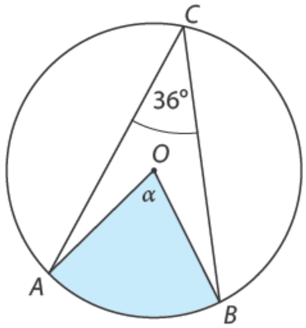
Ако је полупречник круга на слици $r = 15$ cm, израчунај површину његовог осенченог дела. ($\pi \approx 3{,}14$)

Решење: Осенчени део круга је кружни исечак коме одговара кружни лук $\overset{\frown}{AB}$. Периферијски угао који одговара овом кружном луку је $36°$, а то значи да је одговарајући централни угао:

$$\alpha = 2 \cdot 36° = 72°.$$

Сада знамо и полупречник и централни угао, па можемо израчунати површину осенченог кружног исечка:

$$P_i = \frac{r^2\pi\alpha}{360°} \approx \frac{225 \cdot 3{,}14 \cdot 72°}{360°}\,\text{cm}^2 = 141{,}3\,\text{cm}^2.$$



пример 4

Површина кружног исечка је $12\pi\,\text{cm}^2$, а дужина кружног лука који одговара том исечку је 8π cm. Нађи полупречник круга.

Решење:

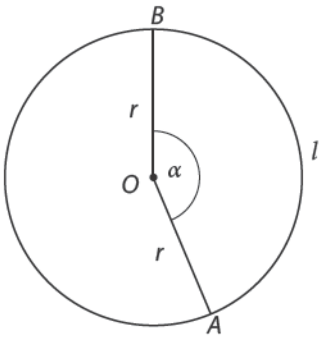
Како је $P_i = \dfrac{l \cdot r}{2}$, имамо да је $2 \cdot 12\pi = 8\pi \cdot r$, па је $r = 3$ cm.

пример 5

Израчунај површину кружног исечка ако је његов централни угао $\alpha = 162°$, а кружни лук који му одговара $l = 9\pi$ cm.

Решење:

Кружном луку $\overset{\frown}{AB}$ одговара централни угао α. Дужина тог кружног лука је позната, па можемо израчунати полупречник r.



Како је $l = 9\pi = \frac{r\pi\alpha}{180°}$, следи

$$r = \frac{9 \cdot 180}{162}\text{ cm} = 10\text{ cm}.$$

Тражена површина је:

$$P_i = \frac{l \cdot r}{2} = \frac{9\pi \cdot 10}{2}\text{ cm}^2 = 45\pi\text{ cm}^2.$$

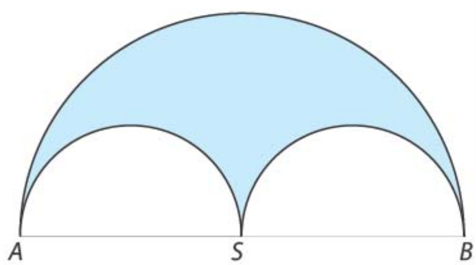
Напомена: Површину смо могли да израчунамо и као $P_i = \frac{r^2\pi\alpha}{360°}$, али би то захтевало више рачунања него преко формуле коју смо користили.

пример 6

Израчунај површину осенчене фигуре ако је $AS = SB = 4$ cm.

Решење:

Дата фигура представља полукруг коме одговара пречник AB из кога су исечена два полукруга којима одговарају пречници AS и SB, редом. Како је $AS = SB$, то су и површине та два полукруга једнаке и свака од њих једнака је половини површине круга полупречника $r_2 = 4\text{ cm} : 2 = 2\text{ cm}$. То значи да је укупна површина белих полукругова једнака површини круга полупречника $r_2 = 2$ cm.



Површина већег полукруга једнака је половини површине круга полупречника $r_1 = 4$ cm.

Ако осенчену површину обележимо са P, површину већег полукруга са P_1, а белу површину коју чине два мања полукруга са P_2, онда је:

$$P_1 = \frac{r_1^2\pi}{2} = \frac{16\pi}{2}\text{ cm}^2 = 8\pi\text{ cm}^2;$$

$$P_2 = r_2^2 \cdot \pi = 4\pi\text{ cm}^2;$$

$$P = P_1 - P_2 = 4\pi\text{ cm}^2.$$

Површина кружног прстена

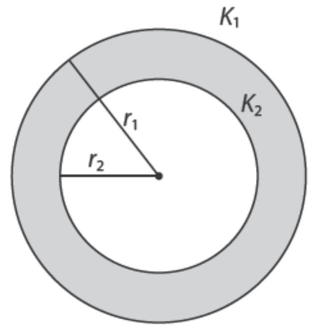
Нека су $K_1(O, r_1)$ и $K_2(O, r_2)$ концентрични кругови и нека је $r_1 > r_2$. **Кружни прстен** је део круга K_1 који не припада унутрашњости круга K_2.

Кружни прстен је ограничен концентричним кружницама $k_1(O, r_1)$ и $k_2(O, r_2)$.

Површина кружног прстена једнака је разлици површина кругова K_1 и K_2.

$$P_p = r_1^2\pi - r_2^2\pi$$

$$\boldsymbol{P_p = (r_1^2 - r_2^2)\pi}$$



пример 7

Кружни прстен је одређен концентричним круговима полупречника $r_1 = 17$ cm и $r_2 = 13$ cm. Израчунај површину тог прстена. ($\pi \approx 3{,}14$)

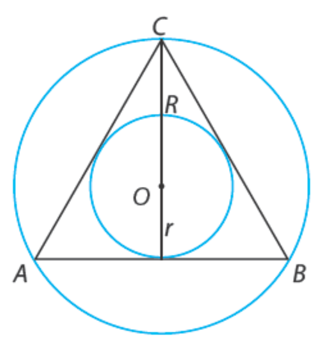
Решење: $P_p = (r_1^2 - r_2^2)\pi = (17^2 - 13^2)\pi$ cm^2
$= (289 - 169)\pi$ cm$^2 \approx 120 \cdot 3{,}14$ cm$^2 = 376{,}8$ cm^2.

Напомена: За рачунање $17^2 - 13^2$ могли смо да применимо и формулу за разлику квадрата:

$$17^2 - 13^2 = (17 - 13) \cdot (17 + 13) = 4 \cdot 30 = 120.$$

пример 8

Кружни прстен одређен је кругом описаним око једнакостраничног троугла странице $a = 6$ cm и кругом уписаним у тај троугао. Израчунај површину тог кружног прстена. ($\pi \approx 3{,}14$)



Решење: Полупречник описаног круга око једнакостраничног троугла странице a је $R = \dfrac{a\sqrt{3}}{3}$, а полупречник уписаног круга у исти троугао је $r = \dfrac{a\sqrt{3}}{6}$.

Како је $a = 6$ cm, добијамо: $R = 2\sqrt{3}$ cm; $r = \sqrt{3}$ cm.

$$P_p = (R^2 - r^2)\pi = (12 - 3)\pi \text{ cm}^2$$
$$= 9\pi \text{ cm}^2 \approx 9 \cdot 3{,}14 \text{ cm}^2 = 28{,}26 \text{ cm}^2$$

пример 9

Површина кружног прстена одређеног концентричним круговима $K_1(O, r_1)$ и $K_2(O, r_2)$ једнака је половини површине већег круга K_1. Ако је $r_2 = 1$ cm, нађи r_1.

Решење: По условима задатка је $P_p = \dfrac{r_1^2\pi}{2}$. Како је $P_p = r_1^2\pi - r_2^2\pi$, добијамо:

$$\frac{r_1^2\pi}{2} = r_1^2\pi - r_2^2\pi, \qquad \text{па је} \qquad r_1^2\pi = 2r_1^2\pi - 2r_2^2\pi.$$

Сређивањем добијамо да је $r_1^2\pi = 2r_2^2\pi$, па је:

$$r_1 = \sqrt{2}r_2 = \sqrt{2}\ \text{cm}.$$

ЗАДАЦИ

44. Одреди површину кружног исечка одговарајућег централног угла α и полупречника r:
а) $r = 3$ cm, $\alpha = 60°$; **б)** $r = 5$ cm, $\alpha = 90°$; **в)** $r = \sqrt{2}$ cm, $\alpha = 135°$; **г)** $r = \sqrt{5}$ cm, $\alpha = 270°$.

45. Одреди површину кружног исечка ако је централни угао коме одговара α, а дужина лука l:

а) $l = 2\pi$ cm, $\alpha = 45°$; **б)** $l = 5\pi$ cm, $\alpha = 120°$; **в)** $l = \dfrac{\pi}{4}$ cm, $\alpha = 15°$; **г)** $l = \dfrac{5}{6}\pi$ cm, $\alpha = 300°$.

46. Ако је површина кружног исечка P, полупречник r, централни угао α, а дужина лука l, попуни табелу.

r (cm)	4	3			
l (cm)	2π		π	$\frac{5\pi}{4}$	
α		120°		60°	210°
P (cm^2)			$\frac{\pi}{2}$		$\frac{7}{3}\pi$

47. Концентрични кругови полупречника r и R одређују кружни прстен. Одреди његову површину ако је:
а) $r = 3$ cm, $R = 5$ cm; **б)** $r = 1$ cm, $R = 4$ cm; **в)** $r = 5$ cm, $R = 2r$; **г)** $r = \sqrt{2}$ cm, $R = \sqrt{3}$ cm.

48. Концентрични кругови полупречника r и R (где је $R > r$) одређују кружни прстен површине P. Попуни табелу.

r (cm)	1		5	
R (cm)		3		$\sqrt{6}$
P (cm^2)	8π	5π	24π	3π

49. Одреди површину кружног прстена ширине 2 cm ако је збир полупречника концентричних кругова који га одређују 10 cm.

50. Одреди површину кружног одсечка који одређују страница једнакостраничног троугла дужине 4 и описани круг троугла.

51. Одреди површину кружног одсечка који одређују страница квадрата дијагонале $2\sqrt{2}$ cm и описани круг око квадрата.

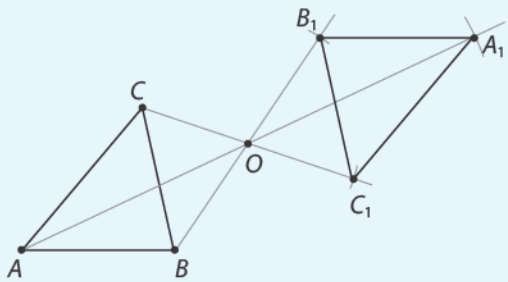
52. Око правоугаоника дијагонале 4 cm и странице 2 cm описан је круг. Упореди површине кружног исечка који одговара краћој страници и одсечка који одговара дужој.

5.7. Ротација

Подсетимо се неких геометријских пресликавања која смо учили у млађим разредима.

ПОДСЕТНИК

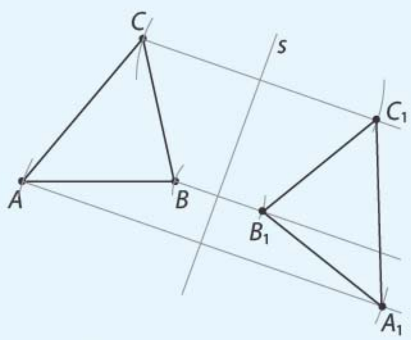
Кажемо да су тачке A и A_1 симетричне у односу на тачку O ако је тачка O средиште дужи AA_1. Тачка O је центар симетрије.



Централна симетрија у равни са центром у тачки O је геометријско пресликавање којим се свака тачка равни пресликава у себи симетричну у односу на тачку O. Тачка O се пресликава у саму себе.
Троугао ABC (на слици) пресликан је централном симетријом у односу на тачку O (центар симетрије) у троугао $A_1B_1C_1$. Једноставно се доказује да је $\Delta ABC \cong \Delta A_1B_1C_1$.
Централном симетријом се геометријске фигуре пресликавају у себи подударне фигуре.

ПОДСЕТНИК

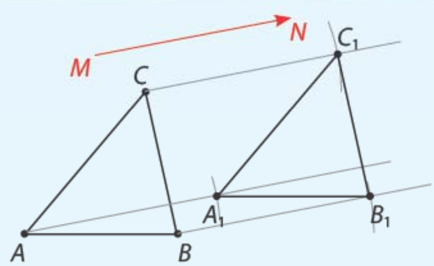
Кажемо да су тачке A и A_1 симетричне у односу на праву s ако се налазе са разних страна праве s, припадају правој која је нормална на осу s и једнако су удаљене од осе.



Осна симетрија у равни са осом s је пресликавање којим се свака тачка те равни пресликава у себи симетричну тачку у односу на осу симетрије s. Тачке које припадају правој s пресликавају се у себе.
На слици је приказано пресликавање ΔABC осном симетријом у односу на праву s у њему подударан $\Delta A_1B_1C_1$.
Осном симетријом се геометријске фигуре пресликавају у себи подударне фигуре.

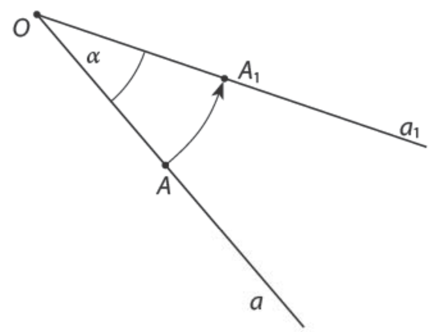
ПОДСЕТНИК

Транслација за вектор $\overrightarrow{MN}$ је геометријско пресликавање којим се произвољна тачка A пресликава у тачку A_1 такву да је $\overrightarrow{MN} = \overrightarrow{AA_1}$.
На слици је приказано пресликавање ΔABC транслацијом за вектор $\overrightarrow{MN}$ у њему подударан $\Delta A_1B_1C_1$.
Транслацијом се геометријске фигуре пресликавају у себи подударне.



Ротација је још једно геометријско пресликавање. Са појмом ротације сусретали сте се у различитим областима. Ротација је кретање Земље око своје осе. Ротационо кретање у физици подразумева обртање тела око осе ротације при коме се свака тачка креће по кружној путањи. Реч ротација потиче од латинског *rotatio*, што значи „окретање, обртање".

Кажемо да је тачка A_1 добијена **ротацијом** тачке A око тачке O за угао α ако је $OA = OA_1$ и $\measuredangle AOA_1 = \alpha$. Ако ово посматрамо као кретање тачке A до њене слике A_1, онда можемо да приметимо да је путања кретања кружни лук коме одговара централни угао α.

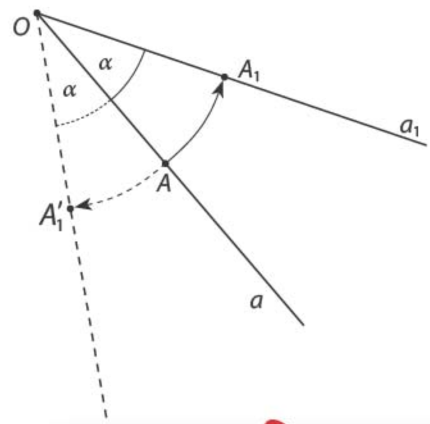


За задате тачке O и A и угао α тачку A_1 добијамо тако што:

1. конструишемо полуправу Oa;
2. на Oa помоћу шестара пренесемо угао α, други крак тог угла обележимо са Oa_1;
3. помоћу шестара пренесемо дужину OA на Oa_1 и добијену тачку обележимо са A_1.

Ротација у равни око тачке O за угао α је геометријско пресликавање којим се свака тачка A у равни пресликава у тачку A_1 такву да је $OA = OA_1$ и $\measuredangle AOA_1 = \alpha$. Тачка O се пресликава у саму себе.

Тачка O је **центар ротације**, а угао α је **угао ротације**.



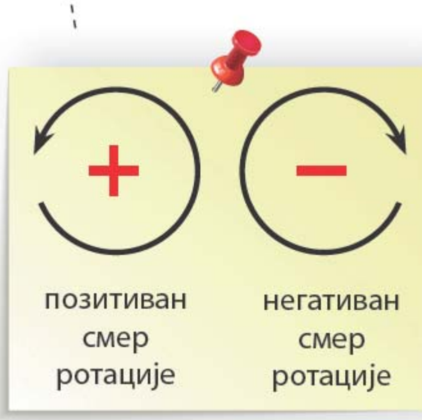
Приметимо да угао ротације можемо пренети и у другом смеру (као што је приказано на слици). Тако добијена тачка A_1' такође задовољава оба услова: $OA = OA_1'$ и $\measuredangle AOA_1' = \alpha$.

Очигледно је да приликом ротације морамо да нагласимо смер ротације. У математици разликујемо два смера ротације: позитиван и негативан.

Позитиван смер ротације је смер обрнут од кретања казаљке на сату. Позитивном смеру одговара угао $\alpha > 0$.

Негативан смер ротације је смер кретања казаљке на сату. Негативном смеру одговара угао $\alpha < 0$.

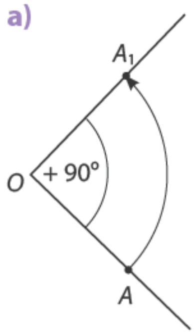
Уколико се не нагласи смер ротације, тј. знак угла, подразумевамо позитиван смер.



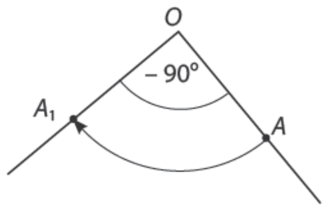
пример 1

Дату тачку A ротирај око дате тачке O за угао: **а)** $\alpha = +90°$; **б)** $\alpha = -90°$.

Решење: а)



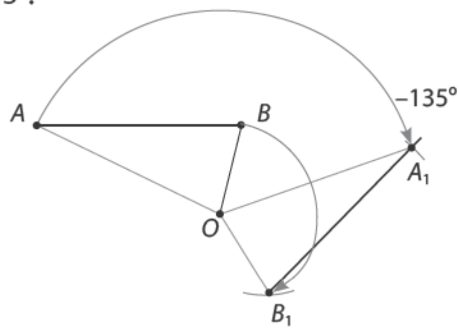
б)



пример 2

Дату дуж AB ротирај око дате тачке O за угао $-135°$.

Решење: Дуж AB пресликавамо ротацијом у дуж A_1B_1 тако што ротирамо њене крајеве, тј. тачку A пресликамо у тачку A_1, а тачку B у B_1. Угао ротације је мањи од 0, па ротирамо у негативном смеру, тј. у смеру кретања казаљке на сату. Описано пресликавање је приказано на слици и можемо га извести лењиром и шестаром.



Искористићемо претходни пример да покажемо једно важно својство ротације.

Према конструкцији је $OA = OA_1$, $OB = OB_1$ и $\measuredangle AOA_1 = \measuredangle BOB_1$.

$$\measuredangle AOA_1 = \measuredangle AOB + \measuredangle BOA_1$$

$$\measuredangle BOB_1 = \measuredangle BOA_1 + \measuredangle A_1OB_1$$

Како је $\measuredangle AOA_1 = \measuredangle BOB_1$, добијамо да је $\measuredangle AOB = \measuredangle A_1OB_1$.

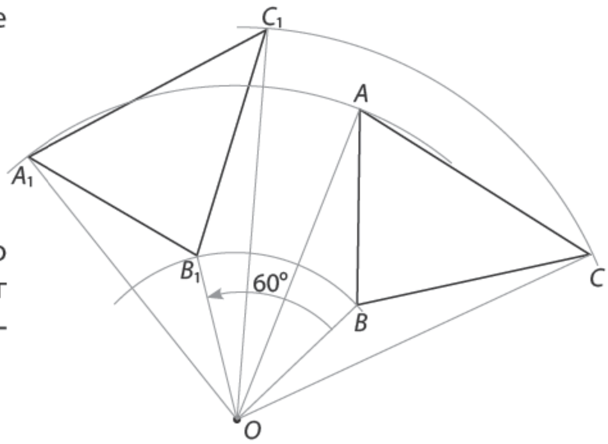
Посматрајмо ΔOAB и ΔOA_1B_1. Имамо да је $OA = OA_1$, $OB = OB_1$ и $\measuredangle AOB = \measuredangle A_1OB_1$, па према ставу СУС закључујемо да је $\Delta OAB \cong \Delta OA_1B_1$. Из подударности следи да је $AB = A_1B_1$, што можемо уопштити следећим тврђењем.

тврђење

Ротацијом се дуж пресликава у **подударну** дуж.

пример 3

Дати троугао ABC ротирај око дате тачке O за угао 60°.



Решење: Приметимо да није наглашен знак, што значи да ротирамо у позитивном смеру.

ΔABC пресликавамо у $\Delta A_1B_1C_1$ тако што ротирамо свако теме полазног троугла. За конструкцију можемо користити лењир и шестар.

Како се ротацијом свака дуж пресликава у дуж која јој је подударна, имамо да је $AB = A_1B_1$, $BC = B_1C_1$ и $CA = C_1A_1$, па према ставу ССС важи: $\Delta ABC \cong \Delta A_1B_1C_1$.

тврђење

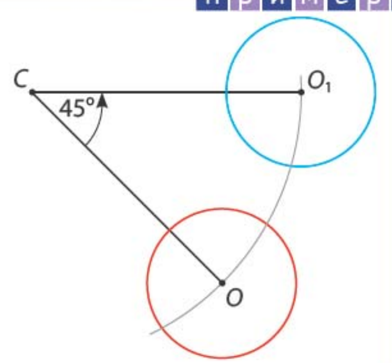
Ротацијом се троугао пресликава у **подударан** троугао.

Из подударности троуглова закључујемо да су и одговарајући углови једнаки, дакле, **величина угла се при ротацији не мења**.

Уопште важи да се свака геометријска фигура ротацијом пресликава у себи подударну фигуру.

пример 4

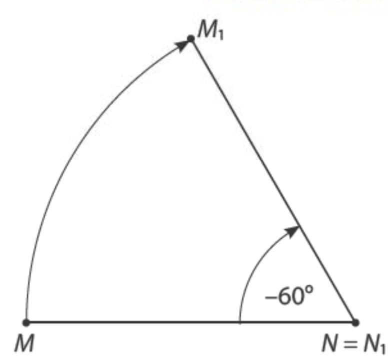
Ротирај дати круг $K(O, r)$ око дате тачке C за угао 45°.



Решење: Ротацијом се круг $K(O, r)$ пресликава у себи подударан круг $K_1(O_1, r_1)$, чији је полупречник такође једнак r. Због тога је довољно да ротацијом пресликамо центар круга O у тачку O_1 и нацртамо круг истог полупречника r са центром у тачки O_1.

пример 5

Ротирај дату дуж MN око тачке N за угао -60°.



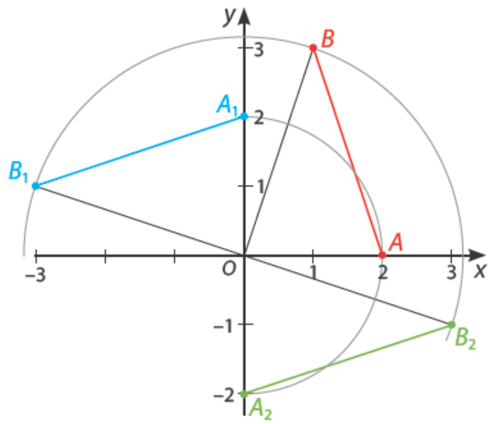
Решење: Тачка N је центар ротације, па је она непокретна тачка овог пресликавања, односно пресликава се у саму себе. Дуж MN пресликавамо у дуж M_1N_1, где је тачка M_1 добијена ротацијом тачке M око тачке N за угао -60°.

пример 6

У правоуглом координатном систему xOy дате су тачке $A(2, 0)$ и $B(1, 3)$. Ротирај дуж AB око тачке O за угао 90° и за угао – 90°.

Решење: Ротацијом око тачке O за угао 90° дуж AB се пресликава у дуж A_1B_1, при чему је $A_1(0, 2)$ и $B_1(-3, 1)$.

Ротацијом око тачке O за угао –90° дуж AB се пресликава у дуж A_2B_2, при чему је $A_2(0, -2)$ и $B_2(3, -1)$.



ЗАДАЦИ

53. Одреди координате тачке коју добијеш када ротираш тачку (1, 1) око координатног почетка за угао:

а) 90°; **б)** 180°; **в)** 45°; **г)** –135°.

54. Нацртај произвољну дуж AB, а затим је ротирај око тачке A за 60° тако да добијеш дуж A_1B_1 и око тачке B за –60° тако да добијеш дуж A_2B_2. Која фигура се добија спајањем тачака A_1, A_2, B_1 и B_2?

55. Нацртај троугао ABC и тачку M. Ротирај троугао ABC око тачке M за 180°. Затим централном симетријом пресликај троугао ABC у односу на тачку M. Шта примећујеш?

56. Ротирај тачку $A\left(1, \sqrt{3}\right)$ за 60° око координатног почетка и одреди координате нове тачке.

***57.** Ротирај квадрат $ABCD$ странице 5 cm за 45° око тачке која се налази у пресеку дијагонала тако да добијеш квадрат $A'B'C'D'$. Затим израчунај површину фигуре која се налази у пресеку квадрата $ABCD$ и $A'B'C'D'$.

58. Нека се праве p и q секу под углом од 90° у тачки M. Нацртај произвољну тачку A и ротирај је око тачке M за 180° тако да добијеш тачку A_1. Затим тачку A пресликај осном симетријом у односу на праву p у тачку A_2, па тачку A_2 пресликај осном симетријом у односу на праву q у тачку A_3. На ком растојању се налазе тачке A_1 и A_3?

59. Ротирај тачку $B(2, -2)$ око тачке $A(2, 2)$ за –90°. Које су координате добијене тачке?

60. Кружница k_1 је ротирана за угао α око тачке A која јој припада. Тиме је добијена кружница k_2. Одреди угао α ако је тачка A једина заједничка тачка кружница k_1 и k_2.

61. Круг $K_1(O_1, 3\text{ cm})$ ротиран је за 60° око произвољне тачке кружнице и добијен је круг K_2. Одреди полупречник круга K_2 и површину фигуре добијене у пресеку ових кругова.

62. У координатном систему дате су тачке: $A(2, 1)$, $B(4, 2)$, $C(6, 4)$ и $D(3, 5)$. Одреди слику троугла BCD ротираног око тачке A за 90°.

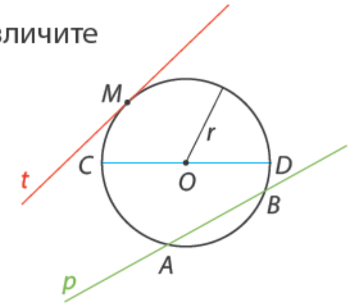
Сажетак: КРУГ

Кружница и круг:

Кружница $k(O, r)$: затворена линија у равни чије су све тачке једнако удаљене од тачке O те равни (тачка O је **центар**, а растојање r је **полупречник** кружнице)

Круг $K(O, r)$: скуп свих тачака равни које припадају кружници $k(O, r)$ и унутрашњој области ограниченој том кружницом

Тетиве, лукови и праве:



Тетива: дуж (нпр. AB) чији су крајеви две различите тачке кружнице

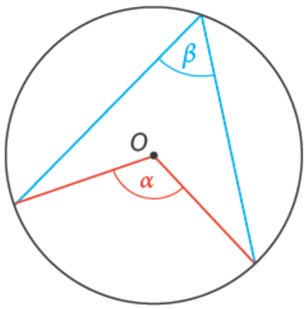
Пречник: најдужа тетива круга (CD); садржи центар O; дужина пречника је $2r$

Кружни лук: део кружнице између две тачке те кружнице, укључујући и те две тачке

Тангента: права (t) која додирује круг

Сечица: права (p) која сече круг, тј. садржи **тетиву** круга (нпр. AB)

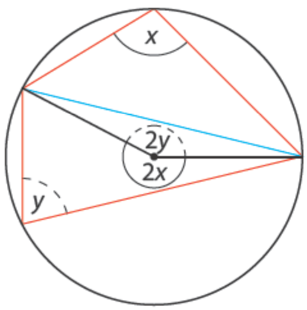
Углови круга:



Централни угао: угао α чије је теме центар круга

Периферијски угао: конвексни угао β чије теме припада кружници, а чији краци секу кружницу

$\alpha = 2\beta$ Централни угао круга је два пута већи од периферијског угла над истим кружним луком.



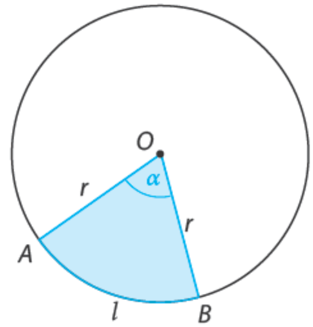
$x + y = 180°$ Збир два периферијска угла x и y којима одговарају различити кружни лукови одређени истом тетивом је 180°.

Обим и дужина лука:

$O = 2r\pi$ обим круга

π ирационалан број; количник обима и пречника круга

$\left.\begin{array}{r} \pi \approx 3{,}14 \\ \pi \approx \dfrac{22}{7} \end{array}\right\}$ неке приближне вредности броја π

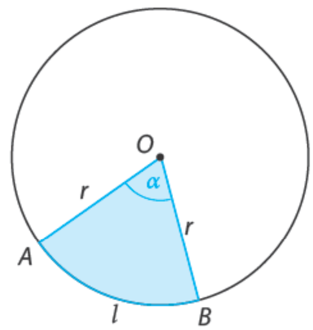


$l = \dfrac{r\pi\alpha}{180^\circ}$ дужина лука $\widehat{AB}$ чији је централни угао α

$l = \dfrac{\alpha}{360^\circ} \cdot O$ дужина лука изражена преко обима круга

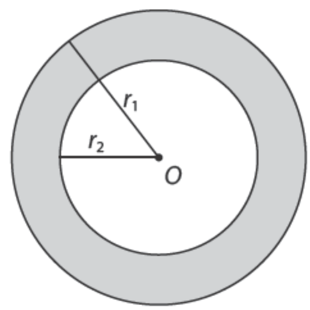
Површина:

$P = r^2\pi$ површина круга



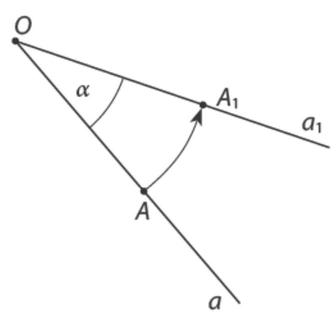
$\left.\begin{array}{r} P_i = \dfrac{\alpha}{360^\circ} \cdot P \\ P_i = \dfrac{r^2\pi\alpha}{360^\circ} \\ P_i = \dfrac{l \cdot r}{2} \end{array}\right\}$ површина кружног исечка чији је централни угао α, тј. чији је лук дужине l

$P_p = (r_1^2 - r_2^2)\pi$ површина кружног прстена



Ротација:

Ротација: (у равни око тачке O за угао α) геометријско пресликавање којим се свака тачка A у равни пресликава у тачку A_1 такву да је $OA = OA_1$ и $\measuredangle AOA_1 = \alpha$; тачка O се пресликава у саму себе



позитиван смер ротације

негативан смер ротације

63. За круг полупречника r, централног угла α, краћег лука $\overset{\frown}{AB}$ и тетиве $AB = t$ попуни табелу.

r (cm)			$\sqrt{3}$	2,3
α	90°	120°		
t (cm)	$2\sqrt{2}$	$4\sqrt{3}$	$\sqrt{12}$	2,3

64. Из тачке A ван круга $K(O, 6\text{ cm})$ конструисана је тангента AB дужине 8 cm. Одреди дужину дела дужи AO која се налази ван круга.

65. Одреди међусобни положај кружница $k_1(O_1, r_1)$ и $k_2(O_2, r_2)$ дате табелом.

	а)	б)	в)	г)	д)
O_1O_2 (cm)	7	5	1	$\sqrt{11}$	1
r_1 (cm)	2	3	2	$\sqrt{5}$	4
r_2 (cm)	5	3	1	1	2
Међусобни положај					

66. Једна кружница се налази унутар друге. Полупречници ових кружница су 28 cm и 12 cm. Најкраће растојање између тачака ових кружница је 10 cm. Колико је растојање између центара ових кружница?

67. Дате су две кружнице, једна унутар друге. Кроз њихове центре конструисан је пречник већег круга који је мањом кружницом подељен на делове 5 cm, 8 cm и 1 cm (тим редом). Одреди растојање центара ових кружница.

68. У координатном систему дата је кружница са центром у тачки (1, –3), полупречника 5. Одреди позицију тачака $A(-2, 1)$, $B(3, 3)$ и $C(2, -1)$ у односу на кружницу.

69. Нека су из тачке A која се налази ван кружнице $k(O, r)$ конструисане тангенте AB и AC. Докажи $AB = AC$.

70. Катете правоуглог троугла су a и b, а хипотенуза је c. Докажи да је полупречник:

а) уписаног круга $r = \dfrac{a+b-c}{2}$;

б) круга који додирује хипотенузу споља и продужетке катета

$$R = \frac{a+b+c}{2}.$$

71. Из темена A_1 правилног десетоугла $A_1A_2 \ldots A_{10}$ конструисане су све дијагонале. Израчунај мере углова на које дијагонале из темена A_1 деле угао $\measuredangle A_{10}A_1A_2$.

72. Одреди број страница правилног многоугла $A_1A_2 \ldots A_n$ код кога је $\measuredangle A_3A_1A_4 = 6°$.

73. Тачке A, B и C припадају кружници и $\measuredangle BCA = 60°$. Ако су лукови $\overset{\frown}{AB}$ и $\overset{\frown}{AC}$ у односу 3 : 2, одреди углове троугла ABC.

74. Који део круга одређује лук чији је збир централног и периферијског угла:

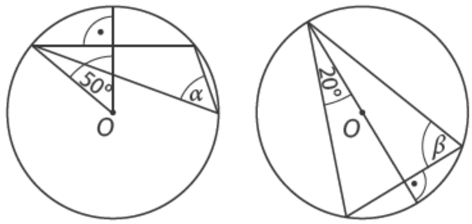
а) 135°; **б)** 67°30′; **в)** 360°; **г)** 300°.

75. Одреди ком делу круга одговарају централни и периферијски углови чија је разлика петина опруженог угла.

76. Ако је q разломак који представља део кружнице, α централни, а β периферијски угао који одговара делу кружнице q, попуни табелу.

q	$\frac{1}{6}$			$\frac{3}{5}$		
α		90°			24°	
β			22°30′			120°

77. Одреди углове α и β на слици.



78. Тетиви AB кружнице $k(O, 5\text{ cm})$ одговара периферијски угао α. Одреди дужину тетиве AB ако је: **а)** $\alpha = 45°$; **б)** $\alpha = 150°$; **в)** $\alpha = 60°$; **г)** $\alpha = 90°$.

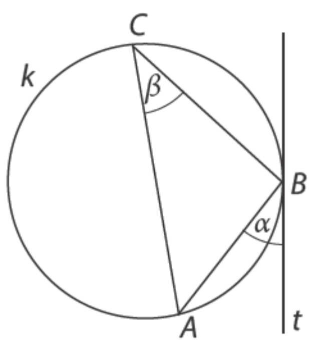
79. Трапез је уписан у круг. Докажи да је тада трапез једнакокрак.

80. Трапез $ABCD$ ($AB \| CD$, $AB > CD$) је уписан у круг. Ако је дијагонала AC нормална на крак BC и крак AD једнак основици CD, одреди однос основица.

81. Над основицом једнакокраког троугла као пречником конструисана је кружница. Да ли врх овог троугла припада кругу ако је угао на основици: **а)** 40°; **б)** 50°; **в)** 45° **г)** 55°?

82. Нека је AB пречник кружнице $k(O, r)$. Који је међусобни положај тачке C и кружнице k ако важи $AC^2 + CB^2 = 4r^2$?

83. Ако је t тангента круга k на слици, докажи да су углови α и β једнаки.



***84.** Конструиши два угла чији је збир мањи од 180°. Затим конструиши произвољну кружницу и:

а) упиши у кружницу троугао чија су два угла једнака конструисаним угловима;

б) опиши троугао око кружнице тако да су два угла троугла једнака конструисаним угловима.

***85.** Тачно 100 различитих тачака је обележено на кружници. Да ли је могуће да постоји тачно 1000 правоуглих троуглова чија су темена обележене тачке?

86. Конструиши скуп тачака из којих се дуж $AB = 4\text{ cm}$ види под углом од:

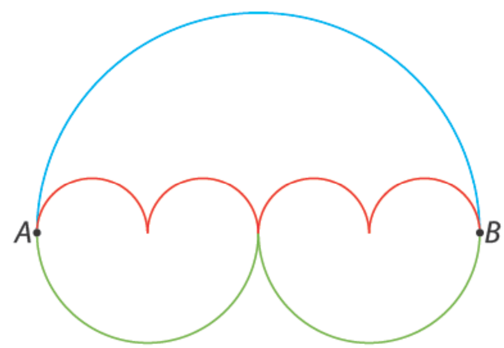
а) 90°; **б)** 30°; **в)** 45°; **г)** 120°.

87. Конструиши све тангенте из тачке A на $k(O, r)$ ако: **а)** A припада k; **б)** је A унутар k; **в)** је A ван k.

***88.** Конструиши ΔABC ако је $AB = 5\text{ cm}$ и $\measuredangle ACB = 60°$, а висина из темена C дужине 3 cm.

***89.** Тачка P припада краћем луку $\widehat{AB}$ круга описаног око једнакостраничног ΔABC. Докажи да је $CP = AP + BP$.

90. Који пут између тачака A и B је најкраћи?

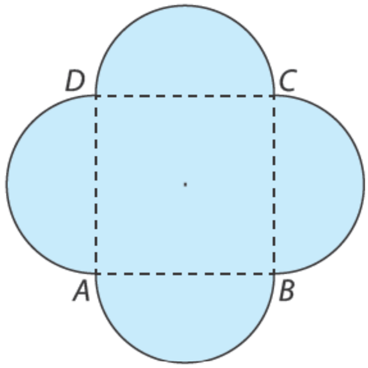


91. Игор је замислио Земљу као лопту (без планина, долина и океана) и експеримент у коме је око Земље по екватору затегнут канап који чини савршен круг. Ако би се дужина канапа повећала за 20 m и канап почео равномерно да лебди око Земље, слично Сатурновом прстену, да ли би Игор могао да се провуче испод канапа а да га не додирне?

92. Две кружнице једнаких полупречника уписане су у правоугаоник тако да се међусобно додирују и свака од њих додирује по три странице правоугаоника. Ако је збир обима кружница 8π cm, одреди површину круга описаног око правоугаоника.

93. **а)** Одреди обим осенчене фигуре на слици ако је $AC = \sqrt{2}$ cm и $ABCD$ квадрат.

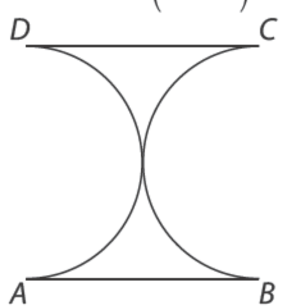
б) Да ли је обим осенчене фигуре већи од двоструког обима квадрата $ABCD$?



94. На зидном сату казаљка која показује минуте два пута је дужа од казаљке која показује сате. Олга тврди да врх казаљке која показује минуте за један сат пређе дужи пут него врх казаљке која показује сате за 24 сата, а Весна каже да је обрнуто. Ко је у праву?

95. Одреди обим фигуре на слици ако је $ABCD$ квадрат и

$$AC - AB = 4\left(\sqrt{2} - 1\right) \text{ cm}.$$



96. Странице правоугаоника су 4 cm и $4\sqrt{3}$ cm. Одреди дужину дужег лука описане кружнице правоугаоника који одговара дужој страници правоугаоника.

97. Пица пречника 50 cm исечена је на n парчића у облику исечка круга. Одреди обим једног парчета ако је:

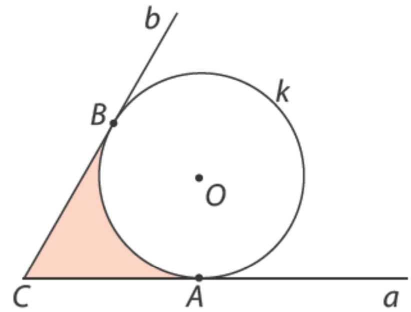
а) $n = 4$; **б)** $n = 6$; **в)** $n = 8$.

98. Одреди обим кружнице уписане у ромб странице a, дијагонала d_1 и d_2, површине P ако је:
а) $a = 4$ cm, $P = 12$ cm^2;

б) $d_1 = 24$ cm, $d_2 = 10$cm.

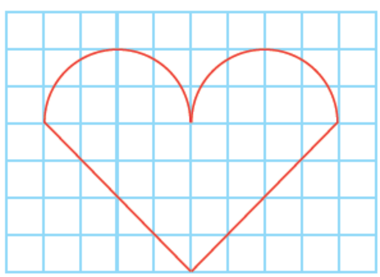
99. Обим кружнице описане око правоугаоника је 10π cm, а странице правоугаоника се разликују за 2 cm. Одреди површину правоугаоника.

100. Одреди обим осенчене фигуре на слици ако су a и b тангенте круга k са центром у O, $CA = 4\sqrt{3}$ cm и $\measuredangle ACB = 60°$.



101. Хипотенуза правоуглог троугла је дужине 4 cm, а једна катета је дужине 2 cm. Над краћом катетом као пречником са унутрашње стране конструисан је полукруг који сече хипотенузу у тачки M. Одреди однос дужина лукова на које тачка M дели полукруг.

102. Одреди обим фигуре оивичене црвеном линијом на слици ако је дужина странице квадратића 1 cm.



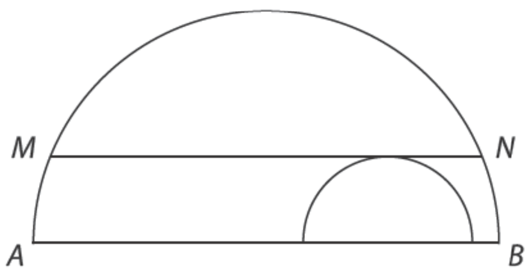
103. Тетива AB дели кружницу на два лука од којих мањи одговара централном углу од 130°, а већи је подељен тетивом AC у односу $\overset{\frown}{AC} : \overset{\frown}{CB} = 31 : 15$. Нађи меру угла $\measuredangle BAC$.

104. Три суседна угла четвороугла уписаног у круг су у односу 1 : 2 : 3. Одреди мере свих углова четвороугла.

***105.** На шаховској табли је нацртан круг полупречника 1 cm тако да садржи центар табле и у потпуности прекрива бело поље странице 1 cm. Докажи да део обима кружнице који пролази кроз бела поља није већи од трећине обима кружнице.

***106.** Четири мала круга једнаких полупречника уписана су у велики круг полупречника 8 cm тако да свака од малих кружница додирује велику кружницу и сваки од малих кругова додирује још два мала круга. Одреди површину дела великог круга који се добија исецањем четири мања круга.

***107.** На слици су приказана два полукруга. Ако је MN тетива већег полукруга и уједно тангента мањег, а важи $MN \| AB$ и $MN = 18$ cm, одреди разлику површина полукругова.

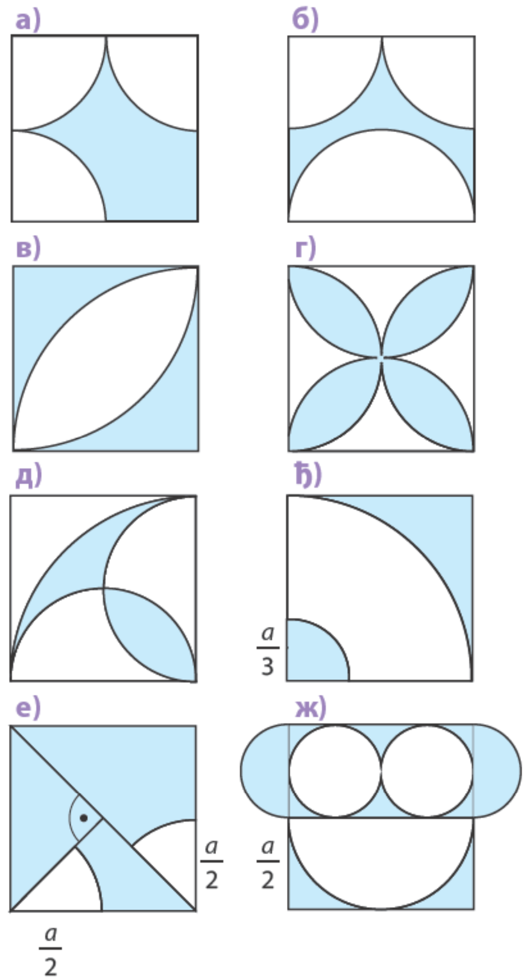


***108.** Дате су колинеарне тачке A, B и C тако да је B између A и C. Над дужима AB, BC и CA редом су конструисани полукругови K_1, K_2 и K_3 са исте стране. Нека тачка M припада полукружници круга K_3 тако да је дуж $BM = 6$ cm нормална на AC. Ако су површине полукругова редом P_{K_1}, P_{K_2} и P_{K_3}, одреди $P_{K_3} - P_{K_1} - P_{K_2}$.

109. Унутрашњи обим кружног прстена је 11π cm, а спољашњи 15π cm. Колика је површина прстена?

110. Огњен је појео два парчета пице полупречника 20 cm која је сечена на четвртине, а Стефан два парчета пице полупречника 25 cm која је сечена на шестине. Ко је појео више пице?

111. Израчунај површине осенчених фигура ако је дужина странице квадрата a.



112. Око правоуглог троугла ABC описан је круг $K(O, 10$ cm$)$. Одреди збир површина одсечака који одговарају катетама ако је растојање тачке O од једне катете 8 cm.

113. Око квадрата дијагонале 8 cm описан је и у њега уписан круг. Одреди површину пресека кружног исечка описаног круга који одговара страници квадрата и прстена који кругови образују.

114. Тетива AB спољашње кружнице кружног прстена је тангента унутрашње кружнице истог прстена. Одреди површину прстена ако је $AB = 4$ cm.

***115.** Израчунај површину круга описаног око једнакокраког троугла основице 12 cm, чији су краци 10 cm.

116. Круг је уписан у кружни исечак три пута већег полупречника. Одреди однос површина круга и исечка.

117. Око једнакокраког троугла ABC описан је круг полупречника 4 cm. Одреди површину одсечка одређеног основицом троугла ако је угао при врху:

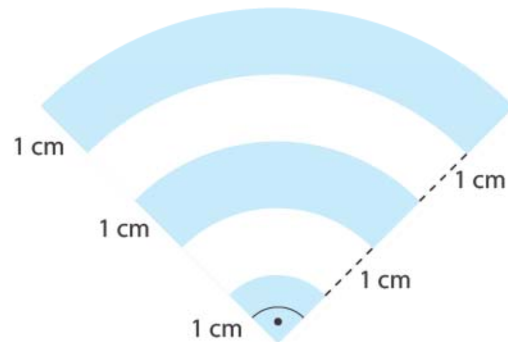
а) 30°; **б)** 45°.

118. Полупречници кругова који чине кружни прстен налазе се у односу 4 : 7, а ширина прстена је 12 cm. Израчунај површину прстена.

119. Права сече концентричне кружнице k_1 и k_2 у четири тачке: кружницу k_1 у тачкама A и D, а кружницу k_2 у тачкама B и C. Докажи да је $AB = CD$.

120. Одреди полупречник кружнице која додирује две концентричне кружнице полупречника 4 cm и 6 cm.

121. На часу математике професор је предавао лекцију о кружном прстену. Сви ученици су пратили предавање, осим Јанка, који се играо телефоном. За казну професор је Јанку задао да одреди обим и површину знака за бежични интернет (види слику). Помози Јанку да реши задатак ако је дужина свих дужи, као и размака између кружних линија 1 cm, а централни угао свих лукова 90°. Колики су збир површина и збир обима осенчених фигура?



Питалице

1.	Две различите кружнице могу имати највише две заједничке тачке.	Тачно	**Нетачно**
2.	Најдужа тетива кружнице садржи центар кружнице.	Тачно	**Нетачно**
3.	Периферијски угао над пречником је оштар.	Тачно	**Нетачно**
4.	Ако је четвороугао уписан у кружницу тада, су наспрамни углови суплементни.	Тачно	**Нетачно**
5.	Из сваке тачке постоје две тангенте на кружницу.	Тачно	**Нетачно**
6.	Угао између тангенте и полупречника у тачки додира је прав.	Тачно	**Нетачно**
7.	Ако се пречник кружнице из неке тачке види под оштрим углом, тада та тачка припада унутрашњости кружнице.	Тачно	**Нетачно**
8.	Обим круга чији је полупречник $\frac{\pi}{2}$ cm износи π^2 cm.	Тачно	**Нетачно**
9.	Површина круга чији је пречник 2π cm износи $4\pi^3$ cm^2.	Тачно	**Нетачно**
10.	Вредност бројева $\frac{22}{7}$ и π заокругљена на две децимале је иста.	Тачно	**Нетачно**

Предлог теста знања

1. Централни и периферијски углови који одговарају кружном луку су суплементни. Који део кружнице чини лук:

а) $\frac{1}{2}$; **б)** $\frac{1}{3}$; **в)** $\frac{1}{4}$; **г)** $\frac{1}{5}$; **д)** $\frac{1}{6}$?

2. Збир три периферијска угла над истим луком износи 360°. Колики је централни угао који одговара том луку:

а) 120°; **б)** 270°; **в)** 90°; **г)** 180°; **д)** 240°?

3. Растојање центара две кружнице је 8, а полупречник сваке је r. Ако се кружнице додирују споља, тада је:

а) $r \leq 2$; **б)** $2 < r < 4$; **в)** $r = 4$; **г)** $4 < r < 8$; **д)** $r \geq 8$.

4. Обим круга уписаног у једнакостранични троугао странице $6\sqrt{3}$ cm је:

а) 6π cm; **б)** 18π cm; **в)** 3π cm; **г)** 12π cm; **д)** 9π cm.

5. Однос дужина кружног лука чији је периферијски угао 45° и одговарајуће тетиве је:

а) $\frac{\pi}{2}$; **б)** $\frac{\pi}{\sqrt{2}}$; **в)** $\frac{2\pi\sqrt{3}}{3}$; **г)** $\frac{\pi}{4}$; **д)** $\frac{\pi\sqrt{2}}{4}$.

6. Две кружнице полупречника 1 cm пролазе једна другој кроз центар. Површина пресека кругова ових кружница је:

а) $\frac{2}{3}\pi - \frac{\sqrt{3}}{2}$; **б)** $\frac{\pi}{3} - \frac{\sqrt{3}}{4}$; **в)** $\pi - \sqrt{3}$; **г)** $\frac{\pi}{3}$; **д)** $\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{\pi}{3}$.

7. Површина круга је 16 cm². Тада је површина круга два пута мањег полупречника:

а) 8 cm²; **б)** $2\sqrt{2}\pi$ cm²; **в)** 4 cm²; **г)** $4\sqrt{2}$ cm²; **д)** 4π cm².

8. Ротацијом тачке $A(2, -2)$ око координатног почетка за 135° добијамо тачку чији је збир координата:

а) 0; **б)** 4; **в)** 8; **г)** $2\sqrt{2}$; **д)** –4.

Кључни појмови (обнови пре решавања контролне вежбе)

Централни угао	Периферијски угао
Обим круга	Површина круга
Кружни лук	Кружни исечак
Кружни одсечак	Кружни прстен
Ротација	

Предлог контролне вежбе

1.1.	Одреди периферијски угао краћег лука који одговара тетиви дужине полупречника.	**15**
1.2.	Периферијски и централни угао који одговарају истом луку су комплементни. Одреди однос дужина тетиве која одговара том луку и полупречника круга.	**20**
1.3.	Кружнице k_1 и k_2 додирују се у тачки M. Заједничка тангента кружница k_1 и k_2 додирује их редом у тачкама N и P. Одреди меру угла $\measuredangle NMP$.	**25**
2.1.	Одреди дужину кружног лука ако је полупречник круга 3 cm, а периферијски угао који му одговара $12°30'$.	**15**
2.2.	Одреди дужину кружног лука ако је обим кружног исечка који је одређен тим луком $(6 + \pi)$ cm, а одговарајући централни угао је 60°.	**20**
2.3.	Из тачке A ван кружнице $k(O, 4\text{ cm})$ конструисана је тангента која додирује кружницу у тачки B. Ако дуж AO сече кружницу k у тачки C и знамо да је $\measuredangle BAO = 30°$, одреди обим фигуре ограничене углом $\measuredangle CAB$ и краћим луком $\overset{\frown}{CB}$.	**25**
3.1.	Одреди површину круга чији је обим 3π cm.	**15**
3.2.	Одреди полупречник круга код кога су мерни бројеви обима и површине једнаки.	**20**
3.3.	Одреди однос површине прстена који одређују уписани и описани круг квадрата и површине уписаног круга истог квадрата.	**25**
4.1.	Одреди тачку добијену ротацијом тачке $A(1, 0)$ око координатног почетка за угао од 90°.	**15**
4.2.	Одреди тачку добијену ротацијом тачке $A(1, 0)$ око координатног почетка за угао од $-135°$.	**20**
4.3.	Израчунај површину фигуре добијене у пресеку једнакостраничног троугла ABC странице 2 cm и троугла $A_1B_1C_1$ добијеног ротацијом троугла ABC око свог тежишта за 60°.	**25**

6 ОБРАДА ПОДАТАКА

ЗАНИМЉИВОСТ

Статистика

Појам *статистика* је немачког порекла (нем. *Statistik*) и означава „опис државе, земље“.

Статистика се бави прикупљањем, организацијом, анализом, тумачењем и презентацијом (представљањем) података. Примењује се у свим гранама природних и друштвених наука.

Математичке основе статистике проистекле су из дискусија математичара о играма на срећу у 16. веку. Међу најпознатијим пионирима статистике (и вероватноће) су математичари Ђероламо Кардано, Блез Паскал, Пјер де Ферма и Кристијан Хајгенс.

Кардано

Паскал

Де Ферма

Хајгенс

Обрада података је поступак који нам служи да на основу постојећих (историјских) података предвидимо будуће вредности и кретања, те да направимо процене и донесемо одлуке. Овај поступак се примењује у свакодневној пракси и можемо га поделити у пет фаза:

1) постављање циља или задатка;

2) прикупљање неопходних података;

3) припрема података за анализу;

4) рачунање и анализа података;

5) приказ података и закључци.

6.1. Пројектни задатак; прикупљање података

За почетак, представићемо прве две фазе обраде података помоћу следећег примера.

Важно! Пажљиво прати сваку од фаза јер ће твој задатак бити да осмислиш (у договору са наставником) сличан пример и на њему примениш све фазе кроз које ћемо сада заједно проћи. Због различитих фаза и планирања у изради оваквог задатка такав задатак називамо ***пројектни задатак***.

пример 1

Желимо да испитамо зависност гојазности од конзумирања слаткиша код ученика седмог разреда. Замолили смо шесторо ђака да измере своју масу и висину и попуне следећу анкету (упитник).

Како се зовеш?	Вања	
Колика ти је маса (kg)?	49	
Колика ти је висина (m)?	1,59	
Колико често једеш слаткише? (заокружи један од понуђених одговора)	ретко (највише један колач или слаткиш дневно)	често (више од једног колача или слаткиша дневно)

Добијене податке смо записали у једну табелу.

Редни број	Име	Маса (kg)	Висина (m)	Конзумација слаткиша
1	Ана	51	1,59	ретко
2	Бранко	50	1,52	често
3	Вања	49	1,59	ретко
4	Горан	55	1,55	често
5	Даца	55	1,50	често
6	Ђорђе	50	1,60	ретко

Појам ***анкета*** је у српски језик стигао посредством француске речи *enquête,* која потиче од латинске речи *inquirere,* што значи „истраживати”.

Овим смо урадили прве две фазе обраде података (постављање задатка и прикупљање података).

Прва и најважнија фаза је *постављање циља* или *задатка*. Она је завршена кад знамо шта желимо да израчунамо, предвидимо или закључимо. У нашем примеру то је одговор на питање: „Да ли и у којој мери конзумација слаткиша утиче на гојазност ученика?"

У другој фази *прикупљамо* неопходне податке. До података можемо доћи анкетирањем (испитивањем), као у нашем примеру, или можемо користити већ постојеће (прикупљене) податке уз дозволу власника тих података. Анкету треба добро осмислити да би наш циљ био остварен, тј. *размислити који подаци ће нас довести до жељеног циља*. Такође, треба водити рачуна о томе да питања буду *недвосмислена*. Због тога смо прецизно навели у одговорима у примеру шта мислимо под „ретко" или „често" конзумирање слаткиша. Посебно водити рачуна ако се на питање одговара избором једног од понуђених одговора да ли су наведене све могућности. На пример, ако питамо испитанике која им је омиљена боја, понудићемо све боје које мислимо да су популарне, али и понудити одговор „ниједна од понуђених" или неки сличан. **Друга фаза је завршена када имамо прегледну табелу прикупљених података**.

Савет: Свакој врсти у табели додели неки јединствен идентификациони број, као што је нпр. редни број. То је посебно значајно ако имамо више особа са истим именом или другим подацима.

За наредне фазе обраде података треба нам мало математике или, прецизније, математичке статистике. Стога ћемо се вратити на наш пример тек када у следећој лекцији будемо научили шта су статистичка обележја података. До тада уради први део пројектног задатка кроз следећи пример.

пример 2

Пројектни задатак (1. део) – Избор теме истраживања и конструкција анкетних питања

а) Размисли које податке имаш жељу/вољу да анализираш, тј. на које питање желиш да добијеш одговор обрадом података. Продискутуј о својој идеји са наставником и друговима у разреду.

б) Постави задатак (циљ) и осмисли питања за своју анкету. Изабери коме ћеш поставити та питања. Питања можеш поставити и усмено, али не заборави да прибележиш одговоре.

в) Унеси прикупљене податке у табелу. Табелу можеш нацртати у свесци или направити на рачунару (користећи нпр. програм MS Excel или неки други).

Решење: (Ово је само пример како би једно решење могло да изгледа.) Катарина је изабрала да испита како број сати сна утиче на успех у школи. Саставила је анкету са три питања, а за нека питања је понудила и одговоре:

1. *Како се зовеш?*
2. *Који успех си постигао/постигла на полугодишту?*
   (Понуђени одговори: *одличан, врло добар, добар, довољан, недовољан.*)
3. *Колико сати дневно спаваш?*
   (Понуђени одговори: *мање од 6 сати; не мање од 6, али мање од 8 сати; не мање од 8, али мање од 10 сати; не мање од 10 сати.*)

Катаринина анкета је добро постављена јер понуђени одговори покривају све могућности.

ЗАНИМЉИВОСТ

Велике табеле

Прављење табеле је јако важно за обраду података. Савет је да се једном објекту (јединки, испитанику, кориснику, предмету...) додели једна врста у табели, а да се мерена или добијена обележја тих објеката уписују у врсте. Доследност у прављењу табела је посебно важна када имамо пуно података (енгл. big data). Најчешће коришћен формат за чување табела с циљем учитавања тих табела у програме за обраду података је формат .csv (енгл. *comma separated values*) у ком можете сачувати нпр. табеле направљене у Excel-у. Примера ради, табела за обраду особености фудбалера за видео-игре попут EA FC 24, Top Eleven и сл. садржи преко 17 000 врста (фудбалера) и 100 колона (карактеристика фудбалера). Велике табеле, тј. табеле са пуно података, обрађују се помоћу компјутера, односно програма и софтвера за обраду података.

Уколико желите да започнете пут у рачунарску обраду података, саветујемо да користите Google Colab, посебно уколико сте до сад савладали основе програмског језика Python. Али, прво научите да обрађујете податке „ручно", тј. на малим узорцима, јер је важно да разумете резултате које вам избаци софтвер.

Статистичка обележја података 6.2.

Статистичка обележја служе да се једним бројем опишу подаци у посматраном узорку. Ми ћемо научити да израчунамо три таква обележја која се зову:

1) средња вредност;

2) медијана;

3) мод.

Научићемо и да проценимо које статистичко обележје најверодостојније описује узорак.

1) Средња вредност

Када се заврши школска година или полугодиште, вероватно вас родитељи или другови питају *како сте прошли*. Као одговор очекују да им саопштите свој **просек**, тј. своју просечну оцену. Неретко у току школске године рачунамо своје просечне оцене из неког предмета, па и просечну оцену из свих предмета заједно, прогнозирајући сами себи успех на крају полугодишта. Тада, у ствари, рачунамо **средњу вредност** свих оцена, те уместо набрајања појединачних оцена из свих предмета, успех означавамо једним бројем (просечном оценом).

Рачунање просечне оцене на основу свих оцена које смо добили је, заправо, пример обраде података у ком узимамо у обзир све податке (тј. све оцене). Те податке обрађујемо математичким операцијама да бисмо на крају добили резултат, један реални број (тј. просечну оцену) који описује све податке заједно.

пример 1

Миланове оцене на крају петог разреда дате су у табели. Израчунај Миланову просечну оцену.

Српски језик	врло добар (4)
Математика	одличан (5)
Физичко васпитање	одличан (5)
Историја	одличан (5)
Географија	врло добар (4)
Биологија	добар (3)
Ликовна култура	добар (3)
Енглески	одличан (5)
Француски	врло добар (4)
Музичка култура	врло добар (4)

Решење: Прво избројимо колико имамо података. У овом примеру их има 10, тј. тачно 10 оцена из разних предмета.

Онда саберемо све податке,

$$4+5+5+5+4+3+3+5+4+4=42$$

и добијемо да је збир свих оцена 42.

У трећем, последњем кораку поделимо збир свих оцена укупним бројем оцена 42 : 10 и добијемо средњу оцену 4,2.

Прикажимо сада цео поступак математичком формулом:

$$\frac{4+5+5+5+4+3+3+5+4+4}{10}=\frac{42}{10}=4{,}2.$$

Рачунање средње вредности:

а) пребројимо податке;
б) саберемо све податке;
в) поделимо збир из б бројем података из а.

Приметимо да уместо **средња вредност** некад кажемо **просек** или **просечна вредност**, а за исти појам користимо и израз **аритметичка средина**. За обележавање средње вредности користе се обично латиничка слова *m* или *s*. Такође, ако је *n* укупан број података означених редом $a_1, a_2, ..., a_n$, средњу вредност означавамо надвученим словом, у овом случају $\overline{a}$. Тако долазимо до следеће формуле за средњу вредност података $a_1, a_2, ..., a_n$:

$$\overline{a}=\frac{a_1+a_2+...+a_{n-1}+a_n}{n}.$$

пример 2

Израчунај просечну масу ученика из примера 1 у лекцији 6.1.

Решење:
Како рачунамо средњу вредност масе ученика, употребимо латиничко слово *m*, те са $\overline{m}$ означимо средњу вредност коју рачунамо примењујући горе наведену формулу. Дакле,

$$\overline{m}=\frac{51+50+49+55+55+50}{6}\text{ kg}=\frac{310}{6}\text{ kg}=\frac{155}{3}\text{ kg}\approx 51{,}67\text{ kg}.$$

2) Медијана

Да бисмо одредили **медијану** података, неопходно је да податке поређамо од најмањег ка највећем (или од највећег ка најмањем, свеједно је) и одредимо **број који се налази у средини овако записаних података**. Илуструјмо примером како се израчунава **медијана**.

пример 3

Деветоро учесника трке истрчало је 100 метара са резултатима датим у табели. Израчунај прво просечно време учесника трке, а затим и медијану.

Освојено место	1.	2.	3.	4.	5.	6.	7.	8.	9.
Време (s)	11,0	11,4	11,9	12,1	12,4	12,8	13,0	13,3	13,5

Решење: Како се време обележава словом *t*, за средње (просечно) време користимо ознаку $\overline{t}$ и рачунамо га по формули за средњу вредност

$$\overline{t}=\frac{11{,}0+11{,}4+11{,}9+12{,}1+12{,}4+12{,}8+13{,}0+13{,}3+13{,}5}{9}\text{ s}=\frac{111{,}4}{9}\text{ s}\approx 12{,}38\text{ s}.$$

Медијана није исто што и средња вредност. Како је пети такмичар завршио трку тачно у средини (јер има четири такмичара испред себе и четири иза себе), медијана је резултат петог такмичара, тј. 12,4 s. Медијану обично обележавамо ознаком M_e, те добијамо $M_e = 12{,}4$ s.

Приметимо да се бројчана вредност медијане налази тачно на средини података записаних од најмањег до највећег.

				M_e				
11,0	11,4	11,9	12,1	**12,4**	12,8	13,0	13,3	13,5

пример 4

(Наставак претходног примера.) Накнадно је установљено да је учесник који је освојио прво место започео трку пре времена, па је дисквалификован. Због тога је званична табела остала са осам података. Израчунај нову медијану.

Освојено место	1.	2.	3.	4.	5.	6.	7.	8.
Време (s)	**11,4**	**11,9**	**12,1**	**12,4**	**12,8**	**13,0**	**13,3**	**13,5**

$M_e = \frac{12,4+12,8}{2}$

Решење: Сада су у средини бројеви 12,4 и 12,8, па медијану добијамо као средњу вредност **два податка у средини**, тј. $M_e = \frac{12,4+12,8}{2} = 12,6$ s.

пример 5

Израчунај средњу вредност и медијану *брзине* учесника из примера 3.

Решење: Подсетимо се, учесници су истрчали 100 метара редом за:
11,0 s; 11,4 s; 11,9 s; 12,1 s; 12,4 s; 12,8 s; 13,0 s; 13,3 s и 13,5 s.

Израчунајмо брзину сваког ученика, нпр. брзину трећепласираног $v_3 = \frac{100}{11,9}\frac{\text{m}}{\text{s}} = \frac{1000}{119}\frac{\text{m}}{\text{s}}$, те попунимо табелу ређајући податке у овом случају од највећег ка најмањем.

Освојено место	1.	2.	3.	4.	5.	6.	7.	8.	9.
Ознака брзине	v_1	v_2	v_3	v_4	v_5	v_6	v_7	v_8	v_9
Брзина $\left(\frac{\text{m}}{\text{s}}\right)$	$\frac{1000}{110}$	$\frac{1000}{114}$	$\frac{1000}{119}$	$\frac{1000}{121}$	$\frac{1000}{124}$	$\frac{1000}{128}$	$\frac{1000}{130}$	$\frac{1000}{133}$	$\frac{1000}{135}$
					M_e				

Пошто је број података непаран (9), медијану одређујемо као податак који се налази на средишњем месту, тј. на петом месту: $M_e = v_5 = \frac{1000}{124}\frac{\text{m}}{\text{s}} \approx 8,06\frac{\text{m}}{\text{s}}$.

Средњу вредност брзине рачунамо помоћу формуле за средњу вредност (наравно, користићемо калкулатор/дигитрон јер је број података велики):

$$\overline{v} = \frac{v_1 + v_2 + ... + v_9}{9} \approx 8,11\frac{\text{m}}{\text{s}}.$$

Напомена: У примеру 3 смо израчунали да је просечно време свих девет такмичара $\overline{t} = 12,38$ s, али просечну брзину не можемо да израчунамо користећи просечно време. Увери се у следеће:

$$\overline{v} \neq \frac{100 \text{ m}}{\overline{t}}.$$

3) Мод

За разлику од средње вредности и медијане, **мод** можемо одредити и за ненумеричке податке. **Мод** нам показује „моду" у узорку података, тј. која вредност података се најчешће појављује у узорку. Покажимо начин одређивања **мода** примером.

пример 6

Наташа има следеће оцене из математике током једне школске године:

4	5	5	5	4	3	3	5	4

тј. две тројке, три четворке и четири петице. Мод Наташиних оцена је $M_o = 5$ јер се оцена 5 најчешће појављује.

Средња вредност Наташиних оцена је

$$\bar{m} = \frac{3+3+4+4+4+5+5+5+5}{9} = \frac{2\cdot 3 + 3\cdot 4 + 4\cdot 5}{9} = \frac{38}{9} \approx 4{,}22.$$

Медијана Наташиних оцена је $M_e = 4$ (поређај девет оцена по величини, па нађи пету оцену).

Интересантно: Наташи би највише пријало да се мод користи као закључна оцена.

У неким подацима имамо више од једног мода. Погледајмо пример.

пример 7

У једном одељењу има 24 ђака. На полугодишту петоро је оцењено двојком из математике, осморо тројком, исто толико ђака је добило четворку, а свега троје петицу. Ако посматрамо њихове оцене као низ података поређаних од најнижег до највишег,

$$\underbrace{2, 2, 2, 2, 2}_{5} \quad \underbrace{3, 3, 3, 3, 3, 3, 3, 3}_{8} \quad \underbrace{4, 4, 4, 4, 4, 4, 4, 4}_{8} \quad \underbrace{5, 5, 5}_{3}$$

видимо да има највише тројки и четворки. Стога имамо две вредности мода:

$$M_{o1} = 3 \quad \text{и} \quad M_{o2} = 4.$$

Израчунајмо средњу вредност и медијану ових оцена. Средња вредност је

$$\bar{m} = \frac{2\cdot 5 + 3\cdot 8 + 4\cdot 8 + 5\cdot 3}{24} = \frac{81}{24} = 3{,}375.$$

Како је број ђака паран, гледамо која два броја су у средини. Како је укупан број оцена 24, тражимо дванаесту и тринаесту оцену. Обе су тројке, па је $M_e = 3$.

Поменули смо да и ненумерички подаци могу имати мод. Погледајмо и такав пример.

пример 8

Погледај и прибележи боје мајица својих другова и другарица у одељењу, па закључи која боја је у моди.

Ако нпр. десеторо ђака носи плаву мајицу, троје белу, петоро шарену, а једанаесторо розе мајицу, онда је тог дана **мод** боје мајица тог одељења *розе боја*.

Запамти: за ненумеричке податке не можемо одредити медијану и средњу вредност.

ЗАНИМЉИВОСТ

Стручњаци у обради (великог броја и великих) података често имају потребу да врше математичке операције на ненумеричким подацима, тј. да их рачунарским програмима некако обрађују математички. Тада аналитичари података ненумеричким подацима додељују одређене нумеричке вредности. На пример, у рачунарима се сва латиничка слова енглеске абецеде обележавају бројевима, такозваним ASCII (*American Standard Code for Information Interchange*) кодовима. Тако велико слово „A" има ASCII-вредност 65, мало слово „a" има ASCII-вредност 97, а мало слово „w" има ASCII-вредност 119. И ћириличка слова се у савременим рачунарима могу представити ASCII-вредностима. Пробај претрагом на интернету да нађеш ASCII-вредност малог слова „ж". (Требало би да нађеш да је то број 1078.)

ЗАДАЦИ

1. Младенове оцене из математике су 5, 5, 5, 3, 4, 5, 5, 4. Одреди:

а) средњу вредност Младенових оцена; **б)** медијану Младенових оцена;

в) мод Младенових оцена; **г)** Младенову закључну оцену из математике.

2. Деда Тома је нашао своју стару књижицу из основне школе. На страници са закључним оценама из шестог разреда види се да је из девет предмета имао петице, али је оцена из историје избледела и не види се добро. Коју је оцену деда Тома имао из историје ако је шести разред у то време имао 10 предмета и ако је шести разред завршио са просеком 4,8?

3. У табели су приказане закључне оцене из математике у једном одељењу. Одреди аритметичку средину, медијану и мод закључних оцена из математике у том одељењу.

Закључна оцена	одличан (5)	врло добар (4)	добар (3)	довољан (2)
Број ученика	8	8	3	1

4. Зоран је сломио штап на четири дела и измерио дужине добијених делова. Резултати мерења су 6 cm, 10 cm, 8 cm и x cm. Ако је мод измерених делова јединствен и износи 10 cm, одреди медијану, средњу вредност делова штапа, као и укупну дужину штапа пре ломљења.

5. На јуниорском такмичењу у роњењу на дах учествовало је шест такмичара, при чему су познати резултати пет такмичара: 60 секунди, 45 секунди, 55 секунди, 60 секунди и 55 секунди. При томе, зна се и да мод, медијана и средња вредност времена свих такмичара имају исту вредност. Одреди време шестог такмичара, као и време рониоца на дах који је победио на такмичењу.

***6.** Приликом првог мерења n нумеричких величина утврђено да је медијана m, средња вредност s и мод d. Колика је медијана, средња вредност и мод ако утврђивање урадимо на скупу од $2n$ података у коме је сваки податак из првог мерења грешком два пута забележен?

6.3. Припрема, анализа и презентација података

У **трећој фази**, **припреми података**, разматрамо податке. Проверавамо да ли су у одговарајућем облику, нпр. да ли је висина изражена у центиметрима (ако смо тако желели), па ако није, претварамо је и сл. Примећујемо и ког су нам типа подаци. На пример, у нашем главном примеру 1 у лекцији 6.1 висина и маса су бројеви, док учесталост конзумирања слаткиша може имати једну од две ненумеричке вредности „ретко” и „често”, па кажемо да су подаци у последњој колони исказани у две ненумеричке *категорије*.

Посебно водимо рачуна о тзв. недостајућим подацима, тј. проверавамо да ли постоје сви подаци. Ако се деси да нам неки податак недостаје, а неопходан је за анализу (у примеру то су висина, маса и конзумација слаткиша), постоје две могућности: да избацимо врсту у којој недостаје податак или да смислимо како да проценимо недостајући податак.

У поменутом примеру 1 у лекцији 6.1 нема недостајућих или непотпуних података, тако да можемо прескочити фазу **припреме података**. Напоменимо да за велике табеле ову фазу обично ради рачунар, тј. користимо разне програме за пребројавање, приказивање и обраду података на рачунару.

Приказ података различитим дијаграмима

Чак и кад имамо попуњене табеле, податке често представљамо и дијаграмима. То чинимо из два разлога: 1) да бисмо ми боље разумели са каквим подацима радимо и 2) да бисмо другима представили наше закључке и резултате. Дијаграме најчешће правимо помоћу неког рачунарског програма (нпр. MS Excela), али их можемо нацртати и у свесци помоћу оловке, лењира, шестара и бојица. Приказаћемо неке примере.

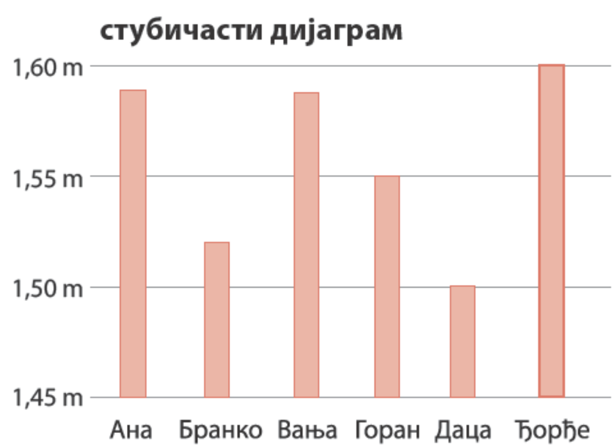
пример 1

Погледај табелу у примеру 1 у лекцији 6.1 и представи висине ученика користећи тзв. **стубичасти дијаграм**.

Решење:

Сачинимо табелу са две колоне (име и висина), а затим нацртајмо и стубичасти дијаграм.

Име	Висина (m)
Ана	1,59
Бранко	1,52
Вања	1,59
Горан	1,55
Даца	1,50
Ђорђе	1,60



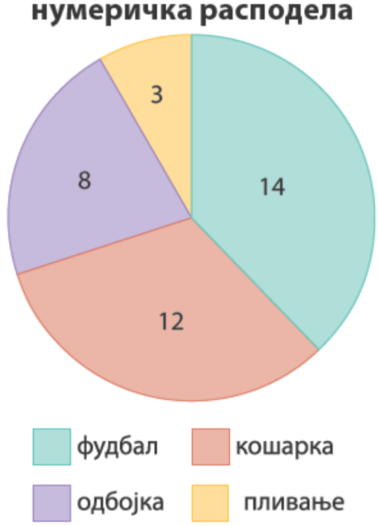
пример 2

У једном одељењу има 37 ученика који су подељени у четири групе према спорту који тренирају: 14 ученика тренира фудбал, 12 кошарку, осморо одбојку, а троје пливање. Представи нумеричку (бројчану) и процентуалну расподелу спортских активности у овом одељењу помоћу тзв. **кружног дијаграма**.

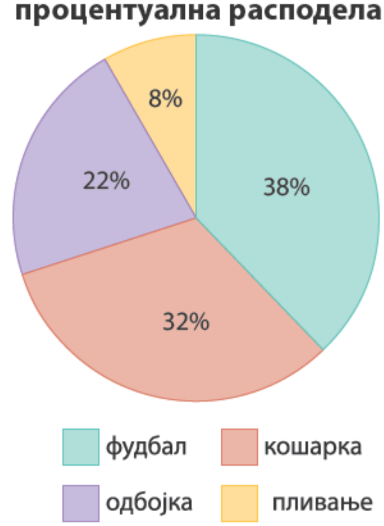
Решење: **Кружни дијаграм** је круг подељен на исечке. Број исечака је једнак броју категорија (група) на које смо поделили анкетиране узорке. Овде су анкетирани узорци ђаци једног одељења, а поделили смо их у четири групе према спорту који тренирају, те кружни дијаграм мора имати четири исечка. Површина једног исечка једнака је (или сразмерна) броју анкетираних узорака у одговарајућој групи, а површина целог круга је једнака (или сразмерна) укупном броју анкетираних узорака. Овде је укупан број анкетираних узорака једнак броју ученика одељења, 37, а исечци имају редом површине: 14 (фудбал), 12 (кошарка), 8 (одбојка) и 3 (пливање). Тако добијамо кружни дијаграм који представља **нумеричку расподелу** спортских активности (леви круг на слици).

Процентуалну расподелу илуструјемо кружним дијаграмом тако што сваком исечку додељујемо разломак који представља **однос** површине исечка и површине целог круга, **изражен у процентима**. Тако исечцима додељујемо редом разломке: $\frac{14}{37}=0,\dot{3}7\dot{8}\approx 38\%$ (фудбал); $\frac{12}{37}=0,\dot{3}2\dot{4}\approx 32\%$ (кошарка); $\frac{8}{37}=0,\dot{2}1\dot{6}\approx 22\%$ (одбојка); $\frac{3}{37}=0,\dot{0}8\dot{1}\approx 8\%$ (пливање). Процентуална расподела је представљена десним кругом на слици.

Спортске активности –
нумеричка расподела



Спортске активности –
процентуална расподела



Анализа података и презентација резултата истраживања

Сада су подаци спремни за **четврту фазу, анализу података**, тј. рачунање и приказивање зависности жељених величина. Из ове фазе произилази и последња, **пета фаза**, у којој **изводимо и приказујемо закључке**. Последње две фазе зависе од самог задатка, те је време да се вратимо на наш пример (пример 1 у лекцији 6.1).

пример 3

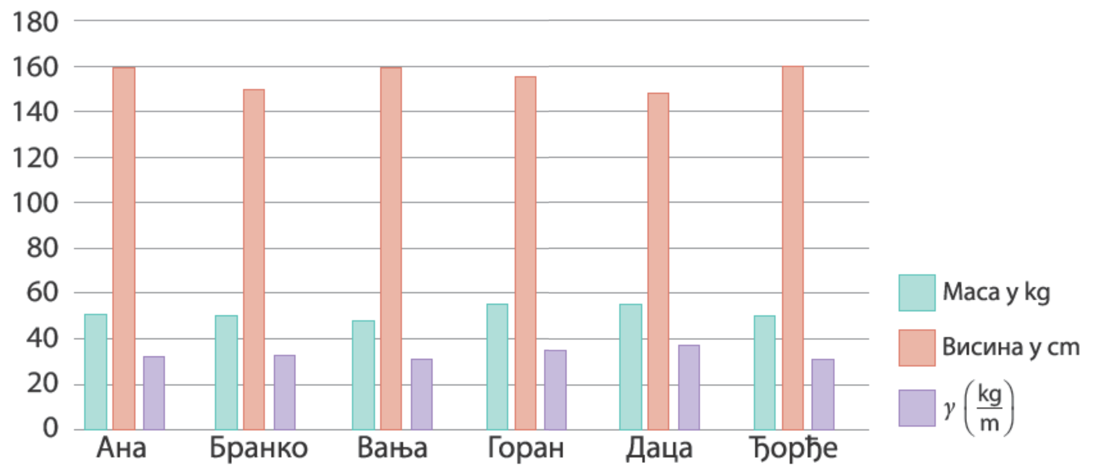
Погледај табелу у примеру 1 у лекцији 6.1, па предложи начин да једним бројним податком прикажеш степен ухрањености сваког ђака. Затим резултате прикажи табелом и дијаграмом.

Решење: Овај задатак је постављен тако да те приморава да самостално урадиш анализу података, тј. даје ти слободу да бираш (предложиш) бројни податак којим желиш да представиш степен ухрањености, као и да самостално изабереш тип дијаграма којим ћеш представити резултате. Зато овде нема јединственог тачног решења, већ може бити неколико прихватљивих решења. Покажимо једно могуће решење.

Како нам је дата могућност да самостално одредимо меру гојазности, усвојмо на пример предлог да је гојазност директно пропорционална маси, а обрнуто пропорционална висини особе. Обележимо масу словом *m*, а висину словом *h*, па дефинишимо нову величину $\gamma = \frac{m}{h}$, коју ћемо звати индекс гојазности, а изражавати заокругљену на цео број у килограмима по метру $\left(\frac{\text{kg}}{\text{m}}\right)$. Додајмо у табелу још једну колону резервисану за вредност индекса γ (заокругљену на цео број).

Редни број	Име	Маса (kg)	Висина (m)	Конзумација слаткиша	$\gamma\left(\frac{\text{kg}}{\text{m}}\right)$
1.	Ана	51	1,59	ретко	32
2.	Бранко	50	1,52	често	33
3.	Вања	49	1,59	ретко	31
4.	Горан	55	1,55	често	35
5.	Даца	55	1,50	често	37
6.	Ђорђе	50	1,60	ретко	31

Осим табелом, можемо ли све ове податке приказати једним стубичастим дијаграмом који ће нам дати потпуну слику расподеле података? Можемо. Једним дијаграмом можемо приказати и више карактеристика, само морамо водити рачуна о мерним јединицама.



пример 4

Погледај претходни пример, па израчунај средњу вредност коефицијента γ свих ученика, а затим посебно ученика који често једу слаткише и ученика који ретко једу слаткише. Шта примећујеш?

Решење:

Први део задатка тражи од нас да израчунамо неке средње вредности и њих морамо тачно израчунати. Међутим, други део задатка тражи да на основу анализе података изведемо и прикажемо закључке. Иако овде имамо слободу да изаберемо како ћемо приказати закључке, ипак морамо водити рачуна о томе да закључке изведемо на основу пажљиве анализе података, а не да их измишљамо или нагађамо. Покажимо једно могуће решење.

Издвојмо само податке који нас занимају, дакле, индексе гојазности γ и сортирајмо их по категоријама учесталости конзумирања слаткиша: *ретко*, *често* и *сви*. Тако се у категорији „ретко" налазе три вредности индекса гојазности: 32, 31 и 31, а у категорији „често" такође три вредности индекса гојазности: 33, 35 и 37. Затим израчунајмо одговарајућу средњу вредност, медијану и мод индекса γ за сваку категорију.

	Ретко	Сви		Често
Вредности индекса γ по категоријама	32	32	33	33
	31	31	35	35
	31	31	37	37
Средња вредност	31,33	33,17		35
Медијана	31	32,5		35
Мод	31	31		нема

Приликом приказивања података можемо бирати онај приказ који, по нашем мишљењу, што боље осликава закључке. Овде смо визуелно издвојили резултате по категоријама јер очекујемо да ће и закључци зависити од категорије.

Које закључке можемо извести из овог приказа?

Пре него што изведемо закључке, напоменимо да је овај узорак прилично мали за званичне закључке. Ипак, на основу овог узорка можемо да приметимо да конзумација слаткиша утиче на гојазност јер је код ученика који ретко конзумирају слаткише средња вредност коефицијента $\overline{\gamma}_{\text{ретко}} \approx 31{,}33$ мања од средње вредности за ученике који често конзумирају слатише $\overline{\gamma}_{\text{често}} \approx 35$, али и од средње вредности целог узорка $\overline{\gamma}_{\text{сви}} \approx 33{,}17$. Ова последња средња вредност $\overline{\gamma}_{\text{сви}} \approx 33{,}17$ може се узети као референтна вредност. Приметимо да је свака вредност γ у категорији „ретко" мања од референтне вредности 33,17, што је додатни показатељ да ретко конзумирање слаткиша смањује гојазност.

У овом примеру сличне закључке смо могли донети посматрајући и вредности медијане по категоријама. За разлику од медијане, приметимо да нам вредности мода нису могле бити од велике користи пошто категорије „ретко" и „сви" имају исти мод, а категорија „често" чак и нема мод јер су сви подаци различити, тј. сваки податак се појављује само једном у узорку.

занимљивост

Да ли ти је познат израз „варљива статистика”? Овај израз се користи када желимо да кажемо да статистика може да нас превари, тј. да статистички обрађени подаци могу и да преваре. Погледајмо један парадокс (несклад) који илуструје варљивост статистике.

Симпсонов парадокс је феномен који описује ситуацију у којој се резултати у групама (категоријама) података могу потпуно променити када се те групе комбинују. Објаснићемо га једним примером. Рецимо да смо из две болнице у којима се лечи иста болест различитим методима добили следеће податке о укупном броју пацијената и броју излечених.

	Прва болница	Друга болница
Укупно пацијената	360	345
Излечено	280	279
Проценат успешности излечења	**78%**	**81%**

Препоручили бисмо другу болницу као успешнију јер је у њој излечено 81% пацијената, док је у првој излечено 78%. Међутим, ако посматрамо те исте пацијенте по полу, имамо следеће податке.

	Прва болница	Друга болница
Укупно мушких пацијената	100	270
Излечено мушкараца	90	229
Проценат успешности излечења мушкараца	90%	85%
Укупно женских пацијената	260	75
Излечено жена	190	50
Проценат успешности излечења жена	73%	67%

Едвард Симпсон

https://en.wikipedia.org/w/index.php?curid=64436013

Ови проценти показују да је прва болница успешнија у лечењу и мушкараца и жена, а видели смо да, ако мушкарце и жене посматрамо као једну групу, делује да је друга болница успешнија. Дакле, резултат се потпуно мења када комбинујемо ове две групе података.

Иако су о овом феномену писали познати статистичари, тек 1951. године објаснио га је британски статистичар Едвард Симпсон, по коме је парадокс добио име. Ипак, многи сматрају да овај феномен не треба називати парадоксом, те различите резултате објашњавају само као различите начине да се посматрају исти подаци.

Свакако приликом обраде података морамо бити пажљиви да не направимо намерну или случајну грешку при анализи и приказу података, или приликом доношења закључака, или можда уносом непотпуних података. Размисли, на пример, да ли су подаци о две болнице потпуни.

1) Знамо ли да ли се можда у неку од ове две болнице прослеђују лакше оболели пацијенти, па је самим тим и лакше излечити пацијенте у једној од две болнице?
2) Знамо ли да ли је друга болница у близини неког места (нпр. рудника) у коме раде углавном мушкарци (рудари), па зато добија много више мушких пацијената?
3) Знамо ли зашто прва болница добија много више женских пацијената?

пример 5

Пројектни задатак (2. део) – Припрема података за анализу; рачунање и анализа; приказ података и закључци

(Ово је наставак примера 2 у лекцији 6.1) Пројектни задатак можеш радити самостално или у тиму од 2–4 ученика.

Провери податке прикупљене анкетом. Среди табелу – допуни недостајуће или непотпуне податке. Прикажи податке дијаграмима по свом избору. Изабери релевантне податке и анализирај их. Израчунај статистичка обележја (средње вредности, медијане, модове) релевантних података и припреми приказ података за презентацију.

У договору са наставником презентуј закључке.

Пример урађеног пројектног задатка

Уна је испитивала да ли њени другари и рођаци који немају брата или сестру чешће или ређе поседују љубимца од оних који имају брата или сестру. Да би прикупила жељене податке, саставила је анкету.

Како се зовеш?	Викторија
Да ли имаш брата или сестру?	да не (заокружи један од понуђених одговора)
Да ли имаш кућног љубимца?	да не (заокружи један од понуђених одговора)
Ако је одговор на претходно питање *ДА*, ког љубимца имаш?	(ако имаш више љубимаца, наведи само једног) пас

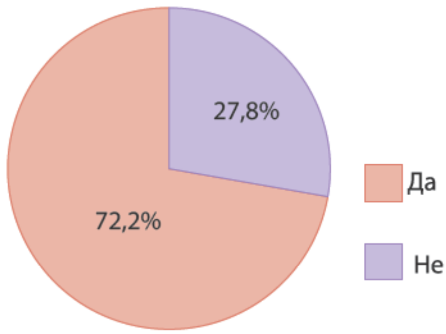
Одговоре је уписала у табелу.

Редни број	Име	Врста љубимца	Поседује љубимца	Брат или сестра
1.	Милица	пас	да	да
2.	Вук		не	да
3.	Маша	мачка	да	не
4.	Анђела	мачка	да	да
5.	Хана	рибице	да	не
6.	Бранка		не	да
7.	Сташа	пас	да	да
8.	Ђорђе	пас	да	не
9.	Стева	папагај	да	не
10.	Викторија	пас	да	не
11.	Лазар		не	да
12.	Вукашин	папагај	да	да
13.	Лука	змија	да	да
14.	Марина		не	не
15.	Урош	мачка	да	да
16.	Лана	хрчак	да	не
17.	Радојка	пас	да	да
18.	Јован		не	не

Уна је затим пребројала љубимце и направила још једну табелу, из које је лако закључила да је омиљени љубимац пас, тј. да је мод „пас", као и да од 18 испитаника 13 има љубимца, што је приказала кружним дијаграмом са процентуалном расподелом.

Врста љубимца	пас	мачка	рибице	папагај	змија	хрчак
Укупно	5	3	1	2	1	1

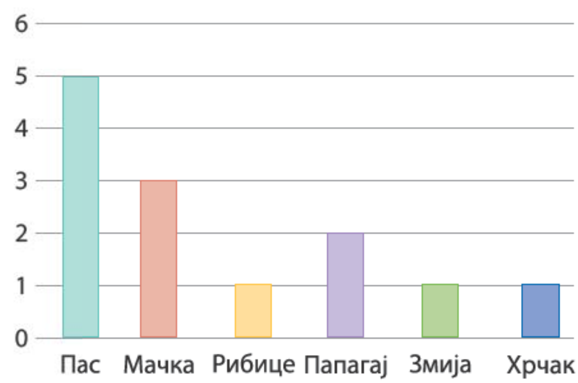
Поседује љубимца:
$\frac{13}{18} = 0{,}7\dot{2} \approx 72{,}2\%$.
Не поседује љубимца:
$\frac{5}{18} = 0{,}2\dot{7} \approx 27{,}8\%$.



Испитанике који имају љубимце разврстала је у шест категорија (група) према врсти љубимца које поседују: „пас", „мачка", „рибице", „папагај", „змија" и „хрчак". Приказала је бројеве по категоријама на два начина: кружним дијаграмом са нумеричком расподелом и стубичастим дијаграмом.

кружни дијаграм

стубичасти дијаграм



Уна је закључила следеће: најзаступљенији кућни љубимац је пас. Од оних испитаника који имају брата или сестру, 70% има љубимца. Код оних који немају ни брата ни сестру присуство љубимца је 75%. На овој групи анкетираних не можемо закључити да поседовање љубимца зависи од тога да ли особа има брата или сестру јер је разлика процената мала, само 5%.

Вешто је приказала кружним дијаграмом процентуалну расподелу одговора по паровима.

Да ли имаш брата/сестру? Да/Не

Да ли имаш љубимца? Да/Не

(нпр. „не да" значи да нема брата или сестру, а има љубимца)

Сажетак: ОБРАДА ПОДАТАКА

Фазе обраде података:

1) постављање циља или задатка;

2) прикупљање неопходних података;

3) припрема података за анализу;

4) рачунање и анализа података;

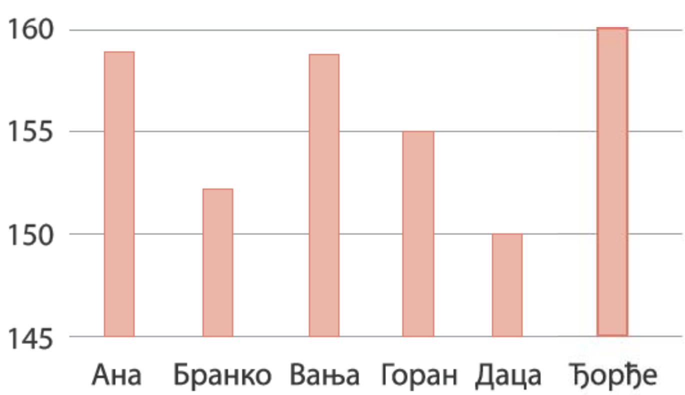
5) приказ података и закључци.

Приказ табелом:

	Карактеристика 1	Карактеристика 2	...
1. испитаник			
2. испитаник			
...			

Приказ дијаграмом:

Стубичасти дијаграм



Кружни дијаграм

Статистичка обележја података:

$\overline{a} = \dfrac{a_1 + a_2 + \ldots + a_{n-1} + a_n}{n}$ **средња вредност (просек** или **аритметичка средина)** реалних бројева $a_1, a_2, \ldots, a_n$

M_e **медијана** (прво се подаци поређају по величини, а затим се одређује нумеричка вредност медијане)

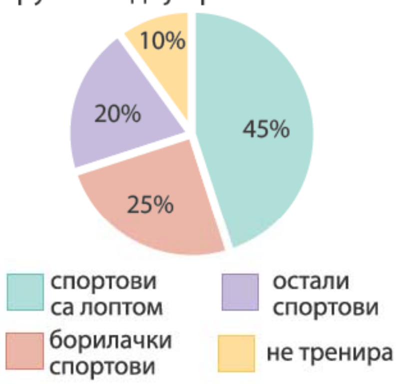
1) Медијана непарног броја података је податак тачно у средини података поређаних по величини.

2) Медијана парног броја података је средња вредност два податка у средини података поређаних по величини.

M_o **Мод** података је податак који се највише пута појављује. Мод могу имати и ненумерички подаци (који нису бројеви).

Додатни задаци

7. У једној београдској средњој школи коју похађа 500 ученика урађена је анкета о бављењу спортом. Утврђено је да нема ученика који тренирају два спорта. Резултати анкете приказани су кружним дијаграмом.



а) Колико ученика се бави борилачким спортовима?

б) Који спортови су у моди?

в) Колико ученика се бави спортовима у којима се не користи лопта?

г) Ако је познато да међу ученицима који се баве спортом има 20% оних са прекомерном телесном масом, док међу ученицима који се не баве спортом има 40% оних са прекомерном масом, одреди број ученика који немају прекомерну масу.

8. У једној кошаркашкој екипи играју два плејмејкера, три бека, четири крила и три центра. Прецизно конструиши кружни дијаграм који представља број играча по позицијама, користећи знање о централним угловима и кружним исечцима.

9. Након филмског фестивала група филмских критичара оценила је филм. На стубичастом дијаграму приказани су резултати гласања.

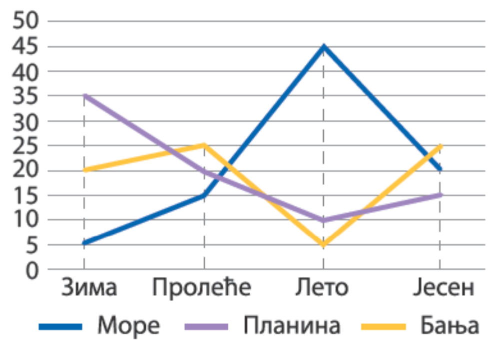
а) Колики су мод, медијана и средња вредност оцене коју је филм добио?

б) Колико је критичара оценило филм?

в) Који проценат критичара је филму дао оцену већу од 3?

г) Који проценат критичара је дао испотпросечну оцену, а који проценат оцену већу од мода?

10. На графикону је приказан број продатих аранжмана једне туристичке агенције у току једне године по годишњем добу и типу дестинације.



а) Представи добијене податке табелом тако да врсте буду годишња доба, а колоне тип дестинације.

б) Који тип аранжмана је био најтраженији у току пролећа, а који у току зиме?

в) У ком годишњем добу је агенција продала највише аранжмана? Који тип дестинације је био најтраженији у току године?

г) Одреди медијану и средњу вредност продатих морских аранжмана.

д) Представи стубичастим дијаграмом продају аранжмана по типу за пролећну сезону.

ђ) Представи број продатих аранжмана у току зиме кружним дијаграмом.

Питалице

1.	Прва фаза обраде података је прикупљање неопходних података.	Тачно	**Нетачно**
2.	Могуће је одредити мод ненумеричких података.	Тачно	**Нетачно**
3.	Могуће је одредити медијану ненумеричких података.	Тачно	**Нетачно**
4.	Могуће је одредити средњу вредност ненумеричких података.	Тачно	**Нетачно**
5.	Мод бројева 1, 3, 1, 2 је 2.	Тачно	**Нетачно**
6.	Медијана бројева 1, 3, 1, 2 је 2.	Тачно	**Нетачно**
7.	Средња вредност бројева 1, 3, 1, 2 је 2.	Тачно	**Нетачно**
8.	Мод је увек јединствен.	Тачно	**Нетачно**
9.	Медијана узорка који има непаран број чланова мора се поклопити са неким од елемената узорка.	Тачно	**Нетачно**
10.	Средња вредност узорка мора се поклопити са неким од елемената узорка.	Тачно	**Нетачно**

Предлог теста знања

1. Колико модова постоји у узорку $a, b, b, c, d, a, c, b, e$:

а) ниједан; **б)** 1; **в)** 2; **г)** 3; **д)** 4?

2. Ако је m медијана, d мод, а s средња вредност података 2, 4, 2, 3, тада важи:

а) $d < m < s$; **б)** $d = m < s$; **в)** $d < m = s$; **г)** $d = m = s$; **д)** $d < s < m$.

3. Шта од наведеног није фаза обраде података:

а) постављање циља; **б)** припрема података; **в)** анализа података; **г)** слање података; **д)** приказ података?

4. Првог дана Мица је продала две лимунаде, а у сваком од наредна четири дана продала је два пута више од претходног дана. Колика је средња вредност броја продатих лимунада за тих пет дана:

а) 12,6; **б)** 16; **в)** 10; **г)** 8; **д)** 12,4?

5. Дати су подаци као у задатку **4**. Колика је медијана броја продатих лимунада за пет дана:

а) 5; **б)** 8; **в)** 16; **г)** 12; **д)** 6?

6. Дати су подаци као у задатку **4**. Ког дана је број продатих лимунада био најближи просеку:

а) првог; **б)** другог; **в)** трећег; **г)** четвртог; **д)** петог?

7. У одељењу од 20 ученика 40% носи белу мајицу, трећина осталих црну, а две трећине црвену. Која боја мајице је мод:

а) бела; **б)** црна; **в)** црвена; **г)** бела и црвена; **д)** бела и црна?

8. Узорак можемо представити:

а) кружним дијаграмом; **б)** стубичастим дијаграмом; **в)** графиконом; **г)** табелом; **д)** свим од наведеним.

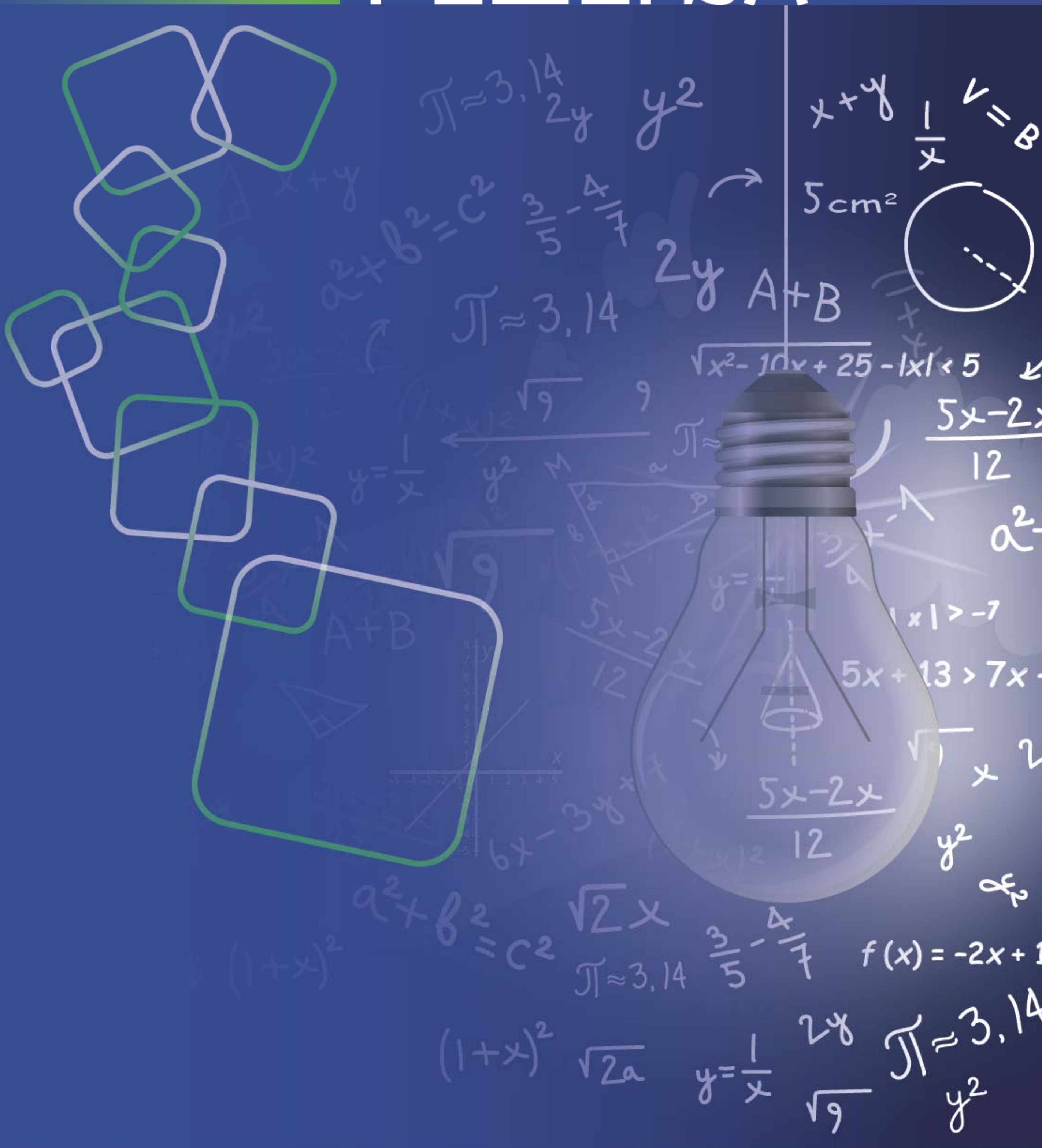
(обнови пре решавања контролне вежбе) Кључни појмови

Пројектни задатак	Анкета
Прикупљање, анализа и приказ података	Табела
Стубичасти дијаграм	Кружни дијаграм
Медијана	Мод
Средња вредност (синоними: просек, аритметичка средина)	

Предлог контролне вежбе

1.1.	Мерењем телесне масе четири ученика добијене су вредности $a, b, c,$ и d за које важи $a < b < c < d$. Одреди мод телесне масе ученика.	15
1.2.	За исто мерење као у задатку 1.1 одреди средњу вредност телесне масе ученика.	20
1.3.	За исто мерење као у задатку 1.1 одреди медијану телесне масе ученика.	25
2.1.	Ако је m медијана, d мод, а s средња вредност података добијених мерењем, наведи пример узорка са четири члана тако да важи $m = d = s$.	15
2.2.	Ако је m медијана, d мод, а s средња вредност података добијених мерењем, наведи пример узорка са четири члана тако да важи $d < m < s$.	20
2.3.	Ако је m медијана, d мод, а s средња вредност података добијених мерењем, наведи пример узорка са четири члана тако да важи $d = m > s$.	25
3.1.	Раја је појео три банане, Гаја једну, а Влаја две. Представи податке табелом.	15
3.2.	Податке из задатка 3.1 представи стубичастим дијаграмом, сортиране по азбучном реду њихових имена.	20
3.3.	За податке из задатка 3.1 конструиши кружни дијаграм који показује проценат поједених банана на две децимале.	25
4.1.	Четири друга су мерила кажипрст и забележила резултате: 6 cm, 8 cm, 6 cm и x cm. Одреди x ако узорак има два мода.	15
4.2.	Четири друга су мерила кажипрст и забележила резултате: 6 cm, 8 cm, 6 cm и x cm. Одреди x ако је средња вредност 7,5 cm.	20
4.3.	Четири друга су мерила кажипрст и забележила резултате: 6 cm, 8 cm, 6 cm и x cm. Одреди x ако је медијана 6,25 cm.	25

РЕШЕЊА



1. РЕАЛНИ БРОЈЕВИ

1. **а)** 1; **б)** 49; **в)** 121; **г)** −121;
д) $\frac{49}{25}$; **ђ)** $-\frac{25}{49}$; **е)** $-\frac{25}{81}$; **ж)** $\frac{1}{9}$.

2. **а)** 0,04; **б)** −0,09; **в)** 1,21; **г)** −6,25;
д) $\frac{16}{9}$; **ђ)** $\frac{144}{25}$; **е)** $-\frac{25}{16}$; **ж)** $\frac{25}{4}$.

3. **а)** $\frac{16}{25}$; **б)** $\frac{16}{25}$; **в)** $-\frac{16}{25}$; **г)** $\frac{16}{5}$; **д)** $-\frac{4}{25}$; **ђ)** $\frac{16}{5}$.

4.

x	0,5	−0,7	$2\frac{1}{5}$	$-1\frac{2}{5}$	$\frac{3}{7}$	$\frac{3}{-2}$	$\frac{-2}{3}$	$-\frac{2}{3}$
x^2	0,25	0,49	$\frac{121}{25}$	$\frac{49}{25}$	$\frac{9}{49}$	$\frac{9}{4}$	$\frac{4}{9}$	$\frac{4}{9}$

5. **а)** $\frac{4}{49}$; **б)** $\frac{289}{16}$; **в)** $\frac{9}{16}$; **г)** 0,0049.

6. **а)** да; **б)** не; **в)** да; **г)** да; **д)** да.

7. **а)** 36 cm²; **б)** 2,25 dm²; **в)** $\frac{49}{9}$ m²; **г)** 0,16 cm².

8. **а)** $x = 1$ или $x = -1$; **б)** $x = 2$ или $x = -2$;
в) $x = 7$ или $x = -7$; **г)** $x = 0$; **д)** $x = \frac{1}{2}$ или $x = -\frac{1}{2}$;
ђ) $x = \frac{4}{3}$ или $x = -\frac{4}{3}$; **е)** $x = \frac{6}{7}$ или $x = -\frac{6}{7}$;
ж) $x = \frac{9}{4}$ или $x = -\frac{9}{4}$; **з)** $x = 0{,}5$ или $x = -0{,}5$;
и) $x = 0{,}9$ или $x = -0{,}9$; **ј)** $x = 0{,}1$ или $x = -0{,}1$;
к) $x = 2{,}5$ или $x = -2{,}5$.

9.

x^2	9	16	1,96	0,04	$2\frac{1}{4}$	$\frac{1}{25}$
x	3	4	1,4	0,2	$\frac{3}{2}$	$\frac{1}{5}$
	−3	−4	−1,4	−0,2	$-\frac{3}{2}$	$-\frac{1}{5}$

10. **а)** 1 km; **б)** 10 km; **в)** 100 dm; **г)** 1000 mm.

11. **а)** $x = 4$ или $x = -4$; **б)** $x = 5$ или $x = -5$;
в) $x = 9$ или $x = -9$; **г)** $x = 1$ или $x = -1$;
д) $x = 10$ или $x = -10$; **ђ)** $x = 0$.

12. $\frac{1}{3}$ m. **13.** Два решења, $x = 5$ или $x = -5$.

14. **а)** $x = 12$ или $x = -2$; **б)** $x = \frac{1}{3}$ или $x = -\frac{7}{3}$;
в) $x = 0$ или $x = 18$; **г)** $x = -\frac{3}{4}$ или $x = -\frac{13}{4}$.

15. **а)** 9; **б)** 25; **в)** 13; **г)** 70; **д)** 0,4; **ђ)** 0,1; **е)** 1,1;
ж) 2,5; **з)** $\frac{1}{4}$; **и)** $\frac{3}{5}$; **ј)** $\frac{7}{11}$; **к)** $\frac{9}{2}$.

16.

x	100	64	196	289	729
$\sqrt{x}$	10	8	14	17	27

17. **а)** $x = 25$; **б)** $x = 49$; **в)** $x = 0$; **г)** $x = 121$;
д) $x = \frac{4}{9}$; **ђ)** $x = \frac{9}{4}$; **е)** $x = \frac{49}{81}$; **ж)** $x = \frac{49}{9}$;
з) $x = 0{,}25$; **и)** $x = 1{,}44$; **ј)** $x = 5{,}29$; **к)** $x = 10{,}24$.

18. **а)** 5; **б)** 5; **в)** $\frac{3}{4}$; **г)** $\frac{3}{4}$; **д)** $1\frac{1}{2}$; **ђ)** $1\frac{1}{2}$;
е) $\sqrt{2}-1$; **ж)** $\sqrt{2}-1$. **19.** $x = 0{,}25$.

20. Решења су рационална у примерима **а**, **в** и **д**, а ирационална у осталим примерима.

21. Решења су рационална у примерима **а** и **б**, а ирационална у осталим примерима.

22. Нацртај део бројевне праве између бројева −2 и 3 тако да је интервал између свака два цела броја подељен на 10 једнаких делова. Разломке претвори у децимални запис, па обележи тачке на бројевној правој.

23. **а)** Конструиши дуж дужине $\sqrt{2}$, па искористи $\sqrt{8} = 2\sqrt{2}$. Слично се решавају и задаци б, в и г.

24. Конструиши квадрат чија је дијагонала 2 cm. Из формуле за површину квадрата $a^2 = 2$ cm² добијамо $a = \sqrt{2}$ cm.

25. Тачне су све реченице осим **б**.

26. Ирационални су бројеви **в**, **г** и **ж**.

27. **а)** $\frac{10}{9}$; **б)** $\frac{5}{11}$; **в)** $\frac{137}{111}$; **г)** $\frac{1111}{900}$.

28. **а)** $0{,}\overline{6}$; **б)** $0{,}\overline{714285}$; **в)** 2,25; **г)** $1{,}1\overline{6}$;
д) $2{,}\overline{428571}$; **ђ)** $-1{,}\overline{384615}$; **е)** $-0{,}2\overline{6}$; **ж)** $-1{,}\overline{6}$.

29. Тачне су реченице **а** и **в**.

30. **а)** $1{,}3579 \approx 1{,}358$; $\Delta = 0{,}0001$;
б) $0{,}2468 \approx 0{,}247$; $\Delta = 0{,}0002$;
в) $0{,}456456... \approx 0{,}456$; $\Delta \approx 0{,}0004$;
г) $0{,}555555... \approx 0{,}556$; $\Delta \approx 0{,}0004$;
д) $\frac{1}{3} \approx 0{,}333$; $\Delta \approx 0{,}0003$;
ђ) $\frac{1}{6} \approx 0{,}167$; $\Delta \approx 0{,}0003$;
е) $\frac{2}{3} \approx 0{,}667$; $\Delta \approx 0{,}0003$;
ж) $1\frac{2}{7} \approx 1{,}286$; $\Delta \approx 0{,}0003$.

31. **а)** 1,7; **б)** 2,2; **в)** 2,4; **г)** 2,6.

32. **а)** $2\sqrt{5} \approx 4{,}47$; $\Delta \approx 0{,}002$;
б) $3\sqrt{6} \approx 7{,}35$ $\Delta \approx 0{,}002$;
в) $\sqrt{0{,}45} \approx 0{,}67$; $\Delta \approx 0{,}001$;
г) $\sqrt{1{,}33} \approx 1{,}15$; $\Delta \approx 0{,}003$.

33. **а)** 6,92; **б)** −1,51; **в)** 3,00; **г)** −10,43; **д)** 10,49;
ђ) −2,16; **е)** 1,90; **ж)** −0,14.

34. **а)** 0,11; **б)** 0,17; **в)** 6,25; **г)** 0,28.

35. Тачни су искази **а**, **в**, **г** и **ж**.

36. **а)** $x = 12$; **б)** $x = 40$; **в)** $x = 252$; **г)** $x = 5$;
д) $x = 4$; **ђ)** $x = 100$; **е)** $x = 1023$; **ж)** $x = 25$.

37. **а)** 8; **б)** 15; **в)** 72; **г)** 77; **д)** 0,72; **ђ)** 2,7; **е)** $\frac{21}{8}$; **ж)** 19,8.

38. **а)** $\frac{4}{3}$; **б)** $\frac{2}{5}$; **в)** $\frac{7}{5}$; **г)** $\frac{17}{12}$; **д)** $\frac{13}{11}$; **ђ)** $\frac{1}{12}$; **е)** $\frac{3}{4}$; **ж)** $\frac{8}{9}$.

39. **а)** 10; **б)** −8 ; **в)** 12; **г)** −14; **д)** 12;
ђ) 0,7; **е)** $\frac{10}{3}$; **ж)** $\frac{14}{15}$.

40. **а)** 3; **б)** 2; **в)** 8; **г)** $\frac{10}{3}$; **д)** −12; **ђ)** $\frac{1}{3}$; **е)** −2; **ж)** 7.

41. **а)** $4\sqrt{2}$; **б)** $-\sqrt{5}$; **в)** $3\sqrt{7}$; **г)** $121\sqrt{11}$.

42. **а)** 28; **б)** 32; **в)** 105; **г)** 120. **43.** Тачни су **а** и **в**.

44. **а)** 6; **б)** −3; **в)** −15; **г)** −14.

45. **а)** $\sqrt{2}$; **б)** $\frac{-3\sqrt{5}}{5}$; **в)** $\frac{\sqrt{6}}{3}$; **г)** $-\frac{\sqrt{91}}{13}$; **д)** $4\sqrt{3}$;
ђ) $-3\sqrt{5}$; **е)** $3\sqrt{11}$; **ж)** $7\sqrt{3}$.

46.

x	1	2	3	5	$\frac{1}{4}$	$2\frac{2}{3}$	11,1	4,5
y	2	4	6	10	$\frac{1}{2}$	$5\frac{1}{3}$	22,2	9

47. **а)** $k=3$; **б)** $k=2$; **в)** $k=\frac{1}{10}$; **г)** $k=3$.

48. **а)**

x	8	7	2	0,4	1
y	2	1,75	0,5	0,1	0,25

б)

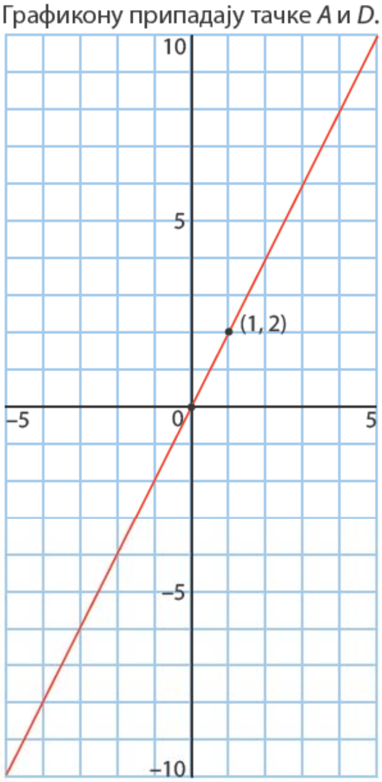
x	2,1	6	4	18	3
y	0,35	1	$\frac{2}{3}$	3	0,5

49. **а)** $y=2$; **б)** $y=1$; **в)** $y=\frac{4}{3}$; **г)** $y=8,5$.

50. **а)** $y=\frac{2}{3}$; **б)** $y=1$; **в)** $y=\frac{17}{6}$; **г)** $y=\frac{7}{4}$.

51. Марији је потребно 100 цветова. **52.** $y=\frac{1}{4}x$.

53. Графикону припадају тачке A и D.



54. **а)** $x=4, y=2$; **б)** $x=0{,}75, y=2$;
в) $x=\frac{15}{2}, \; y=1$; **г)** $x=15, y=4$.

55. **а)** $x=4, y=8, z=14$; **б)** $x=8, y=7, z=3$.

56. **а)** $x:y:z=10:5:1$; **б)** $x:y:z=6:9:10$.

57. **а)** $\alpha=63°, \beta=63°, \gamma=54°$;
б) $\alpha=100°, \beta=55°, \gamma=25°$.

58. Укупан профит је 90 000 дин.: Дуле треба да добије 40 000, Мита 30 000, а Коле 20 000 дин.

59. $P=1920\ \text{cm}^2$.

60. Прва машина произведе 3000, друга 1500, а трећа 5000 флаша дневно. **61.** $V=48\ \text{cm}^3$.

62. Екипе ће редом освојити 50 000, 40 000, 24 000 и 16 000 евра.

63. Петар има 80 година, Никола 40, Милан 20, а Горан 10 година.

Решења додатних задатака

64. **а)** <; **б)** <; **в)** >; **г)** >.

65. **а)** 0; **б)** 0; **в)** 10; **г)** 1; **д)** $-\frac{11}{9}$; **ђ)** $\frac{15}{4}$; **е)** $\frac{2}{25}$; **ж)** $\frac{6}{5}$.

66. **а)** 13; **б)** 5; **в)** 6; **г)** −19; **д)** −5; **ђ)** −4.

67. $-(2{,}5)^2$; -2^2; $-(-1)^2$; 0^2; $1{,}5^2$; $(-3)^2$.

68. 84. **69.** 36. **70.** **а)** 3; **б)** 1; **в)** 2; **г)** 5.

71. Тачни су сви осим **б** и **в**. **72.** Тачни су **в**, **г**, **д**.

73. **а)** 4 m; **б)** 8 km; **в)** 10 cm.

74. **а)** 6 m; **б)** 12 km; **в)** 1,4 cm.

75. Два решења, 0 и 6, задовољавају једначину.

76. $x=18$. **77.** $x=10$ или $x=-10$.

78. **а)** $-\sqrt{0{,}7}$; $-\sqrt{0{,}5}$; $-\sqrt{0{,}3}$; 0; $\sqrt{0{,}3}$; $\sqrt{0{,}5}$; $\sqrt{0{,}7}$;
б) −1,74; $-\sqrt{3}$; −1,73; 0; 1,73; $\sqrt{3}$; 1,74.

79. **а)** =; **б)** =; **в)** <; **г)** <; **д)** <; **ђ)** >; **е)** >; **ж)** >.

80. **а)** <; **б)** >; **в)** =. **81.** $\sqrt{x}>\sqrt{y}$; x је већи.

82. **а)** $x=0{,}2$ или $x=3{,}8$; **б)** $x=\frac{3}{2}$ или $x=\frac{7}{2}$.

83. **а)** $|2x|$; **б)** $|3xy|$; **в)** $|x|$; **г)** $\frac{3}{2}|x|$.

84. **а)** $\sqrt{7}-\sqrt{5}$; **б)** $3-\sqrt{5}$; **в)** $2-\sqrt{2}$;
г) $4-\sqrt{10}$; **д)** $\sqrt{3}-\sqrt{2}$; **ђ)** $\sqrt{3}-\sqrt{2}$.

85. **а)** $x=3$ или $x=-3$; **б)** $x=5$ или $x=-5$;
в) $x=-1$; **г)** $x=-1$ или $x=3$;
д) једначина нема решења;
ђ) $x=4$ или $x=6$; **е)** $x=3$ или $x=-3$;
ж) $x=4$ или $x=-3$.

86. **а)** 0; **б)** 1; **в)** $-\frac{1}{30}$; **г)** 2.

87. **а)** Једначину задовољавају сви позитивни реални бројеви и нула.
б) Једначину задовољавају сви негативни реални бројеви и нула.

88. **а)** $x<-1$ или $x>1$; **б)** $-1\leq x\leq 1$;
в) једначина нема решења;
г) $x\leq -2$ или $x\geq 4$; **д)** $-5<x<3$;
ђ) једначину задовољавају сви реални бројеви.

89. **а)** $a>0$; **б)** $a=0$; **в)** $a<0$.

90. $-\sqrt{\left(\sqrt{2}+1\right)^2}$; $-\sqrt{\left(1-\sqrt{2}\right)^2}$; $\sqrt{\left(\sqrt{2}-1\right)^2}$; $\sqrt{\left(\sqrt{2}+1\right)^2}$.

91. **а)** Доказ је сличан доказу да је $\sqrt{2}$ ирационалан број. **Доказ свођењем на противречност:** Направимо супротну претпоставку, да је $\sqrt{3}$ рационалан број. Следи да се $\sqrt{3}$ може представити као количник два природна, узајамно проста броја p и q, дакле, $\sqrt{3}=\frac{p}{q}$.
Следи $3q^2=p^2$, тј. број p^2 је дељив бројем 3, па значи и да је и број p дељив бројем 3. Дакле, можемо написати $p=3k$, за неки цео број k. Заменом $p=3k$ у једнакост $3q^2=p^2$ добијамо $q^2=3k^2$. Из последње једнакости следи да је број q такође дељив бројем 3. Сада имамо да су оба броја p и q дељиви бројем 3. То значи да p и q нису узајамно прости бројеви, а то је нелогичност (противречност) јер смо раније установили да p и q јесу узајамно прости бројеви. Дакле, претпоставка је нетачна, тј. број $\sqrt{3}$ мора бити ирационалан. (Докажи самостално: да је $\sqrt{6}$ ирационалан број: требаће ти у задатку **д**.)
б) Докажи самостално, слично као **а**.
в) Доказ свођењем на противречност: Направимо супротну претпоставку, да је број $\sqrt{3}+2$ рационалан, тј. да је $\sqrt{3}+2=r$, где је r неки рационалан број. Следи да је $\sqrt{3}=r-2$ такође рационалан број, а то је нелогичност (противречност) јер смо већ у задатку под **а** доказали да је $\sqrt{3}$ ирационалан број. Дакле, претпоставка је нетачна, тј. број $\sqrt{3}+2$ мора бити ирационалан.
г) Доказ свођењем на противречност: Направимо супротну претпоставку, да је број $\sqrt{3}-\sqrt{2}$ рационалан. Следи да је рационалан и број $\left(\sqrt{3}-\sqrt{2}\right)^2=5-2\sqrt{6}$. Одавде, користећи образложење слично доказу **в**, следи да је $\sqrt{6}$ рационалан број, а то је нелогичност (противречност) јер, слично доказу **а**, можемо доказати да је $\sqrt{6}$ заправо ирационалан број. Дакле, претпоставка је нетачна, тј. број $\sqrt{3}-\sqrt{2}$ мора бити ирационалан.

92. Прво се увери да је $\sqrt{n}\geq 1$. (Зашто?) Пошто је $\sqrt{n}$ рационалан број, можемо га представити као количник два природна, узајамно проста броја p и q (где је $p\geq q$), дакле, $\sqrt{n}=\frac{p}{q}$, тј. $n=\frac{p^2}{q^2}$. Како су p и q узајамно прости, то су узајамно прости и њихови квадрати p^2 и q^2.
Пошто је природан број $n=\frac{p^2}{q^2}$ количник два узајамно проста броја p^2 и q^2 (где је $p^2\geq q^2$), следи да делилац мора бити $q^2=1$. То значи да је $n=\frac{p^2}{q^2}=\frac{p^2}{1}=p^2$ потпун квадрат.

93. Позови се на претходни задатак. Из претходног доказа (задатка) следи да број $\sqrt{n}$ мора бити ирационалан. Зашто? **Доказ свођењем на противречност:** Направимо супротну претпоставку, да је $\sqrt{n}$ рационалан број. Онда, по исказу претходног задатка, број n мора бити потпун квадрат, а то је нелогичност (противречност) јер по услову овог (нашег) задатка знамо да n није потпун квадрат. Дакле, претпоставка да је број $\sqrt{n}$ рационалан није тачна, тј. $\sqrt{n}$ мора бити ирационалан број.

94. **а)** $x\approx 1{,}000$; **б)** $x=\sqrt{0{,}999}>0{,}9999$, одакле следи $x\approx 1{,}000$.

95. **а)** $\sqrt{2}$; **б)** $\sqrt{2}$; **в)** $-2\sqrt{3}$; **г)** $-5\sqrt{5}$; **д)** 0;
ђ) $12\sqrt{3}$; **е)** $-5\sqrt{11}$; **ж)** 0. **96.** **а)** =; **б)** =; **в)** >.

97. **а)** $3\sqrt{5}>2\sqrt{11}$; **б)** $4\sqrt{3}>2\sqrt{10}$;
в) $3\sqrt{15}<\sqrt{2}\cdot 2\cdot\sqrt{17}$; **г)** $7\sqrt{13}<13\sqrt{7}$.

98. **а)** Упоређивањем појединачних бројева добијамо $6<2\sqrt{10}$ и $3\sqrt{5}<5\sqrt{2}$, па сабирањем неједнакости добијамо
$$6+3\sqrt{5}<5\sqrt{2}+2\sqrt{10};$$
б) $3\sqrt{3}-3<2\sqrt{7}-2\sqrt{2}$;
в) $-3\sqrt{7}-\sqrt{3}\cdot\sqrt{5}>-2\sqrt{17}-3\sqrt{2}$;
г) $2\sqrt{6}-2\sqrt{11}<4\sqrt{2}-6$.

99. **а)** нетачно; **б)** тачно; **в)** нетачно; **г)** нетачно.

100. **а)** $-\frac{1}{4}$; **б)** 2.

101. **а)** $\frac{31}{10}$; **б)** $\frac{1}{4}$; **в)** $0{,}3$; **г)** $-\frac{14}{5}$.

Питалице – решења:

1. НЕТАЧНО. **2.** ТАЧНО. **3.** ТАЧНО.
4. НЕТАЧНО. **5.** НЕТАЧНО. **6.** НЕТАЧНО.
7. НЕТАЧНО. **8.** ТАЧНО. **9.** ТАЧНО.
10. НЕТАЧНО.

Предлог теста знања – решења:

1. в. **2.** в. **3.** г. **4.** г.

5. г. **6.** д. **7.** б. **8.** г.

Предлог контролне вежбе – решења:

1.1. $-\frac{1}{4}$. **1.2.** 0. **1.3.** $\frac{1}{2}$.

2.1. $x=-5$ или $x=5$. **2.2.** $x=-2$.

2.3. $x=-4{,}7$ или $x=-2{,}3$.

3.1. $\frac{1}{3}$. **3.2.** $5\sqrt{3}$. **3.3.** $a>b$.

4.1. 225 литара воде. **4.2.** 4 сата и 40 минута.

4.3. 1 сат и 20 минута.

2. ПИТАГОРИНА ТЕОРЕМА

1. **а)** 5; **б)** 13; **в)** 17; **г)** 25; **д)** $\sqrt{2}$; **ђ)** $\sqrt{5}$; **е)** 6; **ж)** 4.

2. **а)** 9; **б)** 20; **в)** 6; **г)** 12; **д)** 1; **ђ)** $4\sqrt{6}$; **е)** $4\sqrt{2}$; **ж)** 1.

3. **а)** $z=89$; $O=208$; $P=1560$; **б)** $y=1{,}5$; $O=4$; $P=0{,}6$; **в)** $x=1{,}2$; $O=3$; $P=0{,}3$; **г)** $z=\frac{25}{4}$; $O=14$; $P=\frac{21}{4}$; **д)** $y=7$; $O=16\frac{4}{5}$; $P=8\frac{2}{5}$; **ђ)** $x=2$; $O=7$; $P=2\frac{1}{10}$.

4. **а)** $CD=15$; **б)** $CD=2$. **5.** $h_c=12$ cm; $O=60$ cm.

6. Задатак има два решења у зависности од тога да ли су дате странице катете или су дате странице катета и хипотенуза. **а)** 5 или $\sqrt{7}$; **б)** $\sqrt{74}$ или $2\sqrt{6}$.

7. **а)** да; **б)** не; **в)** да; **г)** не; **д)** да; **ђ)** да.

8. **а)** правоугли; **б)** тупоугли; **в)** оштроугли; **г)** тупоугли; **д)** правоугли; **ђ)** оштроугли.

9. Не. Како је половина производа висине и странице једнака површини троугла, то се странице троугла морају односити као 6 : 3 : 2. Странице су тада $6k$, $3k$ и $2k$ за неки број k. Троугао са оваквим односом страница не постоји јер не задовољава неједнакост троугла.

10. Како је половина производа висине и странице једнака површини троугла, то се странице троугла морају односити као 6 : 4 : 3. Странице су тада $6k$, $4k$ и $3k$ за неки број k. Троугао постоји и тупоугли је јер је квадрат најдуже странице већи од збира квадрата краће две странице.

11. Да. $\sqrt{1}$, $\sqrt{2}$ и $\sqrt{3}$.

12. **а)** $3\sqrt{2}$ cm; **б)** 4 cm; **в)** 6 cm; **г)** $7\sqrt{2}$ cm.

13. **а)** $2\sqrt{2}$ cm; **б)** 2 cm; **в)** 3 cm; **г)** $\frac{\sqrt{2}}{4}$ cm.

14.

a	3	10	1	4	0,5	1,4
b	4	10,5	$\sqrt{2}$	5	$\sqrt{2}$	4,8
d	5	14,5	$\sqrt{3}$	$\sqrt{41}$	1,5	5

15. $d=2$ cm; $R=1$ cm; $r=\frac{\sqrt{2}}{2}$ cm; $P=2$ cm²; $O=4\sqrt{2}$ cm.

16. $a=15$ cm; $d=17$ cm; $R=8{,}5$ cm.

17. $d=10$ cm; $P=48$ cm²; $O=28$ cm.

18. $P=16\sqrt{3}$ cm². **19.** 4,8.

20. **а)** $h_a=8$ cm; $h_b=9{,}6$ cm; $P=48$ cm²; **б)** $h_a=12$ cm; $h_b=\frac{120}{13}$ cm; $P=60$ cm²; **в)** $h_a=\sqrt{2}$ cm; $h_b=\frac{2\sqrt{6}}{3}$ cm; $P=\sqrt{2}$ cm².

21. **а)** $h_a=1$ cm; $h_b=\sqrt{2}$ cm; $P=1$ cm²; **б)** $h_a=\frac{\sqrt{2}}{2}$ cm; $h_b=1$ cm; $P=\frac{1}{2}$ cm²; **в)** $h_a=12$ cm; $h_b=\frac{168}{25}$ cm; $P=42$ cm².

22. **а)** $\frac{\sqrt{3}}{2}$ cm; **б)** 1 cm; **в)** $\frac{5\sqrt{3}}{12}$ cm; **г)** $3\sqrt{2}$ cm.

23. **а)** 2 cm; **б)** $2\sqrt{5}$ cm; **в)** $\frac{2\sqrt{3}}{3}$ cm; **г)** $\frac{\sqrt{3}}{3}$ cm.

24. Резултати су приказани табеларно.

	а	б	в	г	д	ђ
a (cm)	$\sqrt{3}$	2	6	3	2	$\frac{\sqrt{3}}{3}$
h (cm)	$\frac{3}{2}$	$\sqrt{3}$	$3\sqrt{3}$	$\frac{3}{2}\sqrt{3}$	$\sqrt{3}$	$\frac{1}{2}$
r (cm)	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	$\sqrt{3}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	$\frac{1}{6}$
R (cm)	1	$\frac{2\sqrt{3}}{3}$	$2\sqrt{3}$	$\sqrt{3}$	$\frac{2\sqrt{3}}{3}$	$\frac{1}{3}$
P (cm²)	$\frac{3\sqrt{3}}{4}$	$\sqrt{3}$	$9\sqrt{3}$	$\frac{9}{4}\sqrt{3}$	$\sqrt{3}$	$\frac{\sqrt{3}}{12}$
O (cm)	$3\sqrt{3}$	6	18	9	6	$\sqrt{3}$

25. Резултати су приказани табеларно.

	а	б	в	г	д
a (cm)	2	$\sqrt{2}$	$\sqrt{6}$	2	1
b (cm)	$2\sqrt{2}$	2	$2\sqrt{3}$	$2\sqrt{2}$	$\sqrt{2}$
R (cm)	$\sqrt{2}$	1	$\sqrt{3}$	$\sqrt{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$
P (cm²)	2	1	3	2	0,5
O (cm)	$4+2\sqrt{2}$	$2+2\sqrt{2}$	$2\left(\sqrt{6}+\sqrt{3}\right)$	$4+2\sqrt{2}$	$2+\sqrt{2}$

26. **а)** 14,5 cm; **б)** 4 cm; **в)** 1,7 cm; **г)** $\frac{\sqrt{5}}{2}$ cm.

27. **а)** 24 cm²; **б)** 13,44 cm²; **в)** $2\sqrt{2}$ cm²; **г)** $2\sqrt{21}$ cm².

28. **а)** $\frac{3\sqrt{3}}{4}$ m; **б)** $\sqrt{6}$ m; **в)** $\sqrt{5}$ m; **г)** $\frac{63\sqrt{130}}{260}$ m.

29. $\sqrt{3}$ cm. **30.** $O=\left(8+2\sqrt{13}\right)$ cm.

31. $O=41$ cm. **32.** 4 cm и 6 cm. **33.** $O=16{,}5$ cm.

34. **а)** 28 cm²; **б)** 120 cm²; **в)** 14 cm². **35.** 15 cm.

36. 195 cm². **37.** 1 cm.

38. **а)** $O=18$ cm; $P=18$ cm²;
б) $O=50$ cm; $P=150$ cm²;
в) $O=64$ cm; $P=240$ cm²;
г) $O=3\left(4+\sqrt{2}\right)$ cm; $P=13{,}5$ cm².

39. Користи упутства за конструкције корена природних бројева $\sqrt{2}$, $\sqrt{3}$ и $\sqrt{5}$ описане у књизи, а затим
а) конструиши хипотенузу правоуглог троугла чије су катете 2 и $\sqrt{2}$;
б) конструиши катету правоуглог троугла ако је хипотенуза 4, а друга катета 3;
в) надовежи $\sqrt{2}$ и $\sqrt{3}$;
г) скрати дуж дужине $\sqrt{3}$ за $\sqrt{2}$;
надовезивањем или одузимањем одговарајућих дужи реши **д**, **ђ**, **е** и **ж**.

40. Конструиши дуж дужине $\sqrt{13}$ cm (види пример у књизи), а затим и квадрат.

41. Страница траженог једнакостраничног троугла је дужине $2\sqrt{2}$ cm.

42. Искористи да је дијагонала првог квадрата страница траженог квадрата.

43. Искористи да је двострука висина првог троугла страница траженог троугла.

44. **а)** 5; **б)** 13; **в)** 17; **г)** $8\sqrt{2}$; **д)** 2; **ђ)** $\frac{5}{12}$.

45. Растојања тачака од координатног почетка су у растућем редоследу: $OC=3$, $OA=\sqrt{10}$, $OE=\sqrt{11}$, $OF=\sqrt{12}$, $OB=\sqrt{13}$, $OD=4$.
Редослед тачака је C, A, E, F, B, D.

46. $O=9\left(2+\sqrt{2}\right)$; угао код темена B је највећи, а висина из темена A је најдужа.

47. Добијамо да су странице овог четвороугла међусобно једнаке. Четвороугао је ромб, али како су и дијагонале једнаке, четвороугао је квадрат.

48. Дужине дужи, тј. растојања тачака су: $AB=7$, $AC=\sqrt{113}$, $AD=6$, $BC=8$, $BD=\sqrt{85}$, $CD=\sqrt{53}$. Постоје четири троугла: правоугли ΔABC и ΔDAB, оштроугли ΔBCD, тупоугли ΔCDA.

49. **а)** Постоје две тачке, $C_1\left(3, 1+2\sqrt{3}\right)$ и $C_2\left(3, 1-2\sqrt{3}\right)$;
б) шест тачака задовољава услове задатка: $C_1(1, 5)$; $C_2(5, 5)$; $C_3(1, -3)$; $C_4(5, -3)$; $C_5(3, 3)$; $C_6(3, -1)$.

50.

a	3	$\frac{3}{7}$	2,5	$2\frac{1}{4}$	0,13	1
b	4	$\frac{4}{7}$	6	10	0,84	2,4
c	5	$\frac{5}{7}$	6,5	$10\frac{1}{4}$	0,85	2,6

51. 1, $\sqrt{3}$, 2.

52. Упутство: искористи подударност троуглова. $AE=13\sqrt{2}$.

53. $BC=4{,}25$; $O=12$; $P=5{,}25$. ΔABC је тупоугли.

54. Упутство: замени $h_a=\frac{2P}{a}$, $h_b=\frac{2P}{b}$, $h_c=\frac{2P}{c}$ у једнакост.

55. $h_c=\frac{120}{13}$ cm; $O=60$ cm. **56.** $P=60$ cm².

57. $c=2\sqrt{29}$ cm.

58. Оџачару су потребне мердевине минималне дужине $\sqrt{34}$ m, па ће му мердевине дужине 6 m бити довољне. Могуће је.

59. 500 m. **60.** $x=8$. **61.** $P=180$ m².

62. Углови се односе као 1 : 2 : 1, а висине као $2:\sqrt{2}:2$.

63. Нека су дужине страница $\sqrt{n-1}$, $\sqrt{n}$ и $\sqrt{n+1}$ за неки природан број $n\geq 2$.
Да би троугао био тупоугли, мора важити $\left(\sqrt{n+1}\right)^2>\left(\sqrt{n}\right)^2+\left(\sqrt{n-1}\right)^2$, тј. $n+1>n+(n-1)$, одакле следи $n<2$, што је немогуће јер би тада дужина неке странице била 0 или корен негативног броја. Не постоји такав троугао.

64. Однос страница је $\sqrt{2}:2:\left(1+\sqrt{3}\right)$.

65. $O=56$ cm, $P=192$ cm². **66.** $d=5\sqrt{5}$ cm.

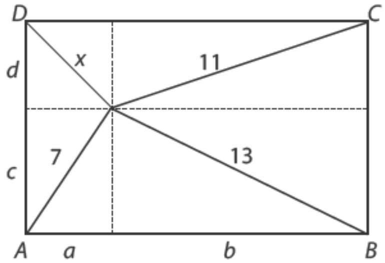
67. $P=3$ m². **68.** $O=4\left(\sqrt{2}+1\right)$ cm.

69. $d=6\sqrt{2}$ cm. **70.** $P=200$ m². **71.** $R:r=\sqrt{2}$.

72. $P=9\sqrt{3},\ O=6\left(1+\sqrt{3}\right)$. **73.** $d=10$ cm.

74. $d=\sqrt{290}$ cm.

75. Запишимо Питагорину теорему за четири правоугла троугла (види слику):



(I) $a^2+c^2=49$;
(II) $b^2+c^2=169$;
(III) $b^2+d^2=121$;
(IV) $x^2=a^2+d^2$. Сабирањем једначина I и III и одузимањем једначине II добијамо $x^2=49+121-169$, тј. $x=1$ km.

76. 2 cm. **77.** 45°, 45°, 90°.

78. Резултати су приказани табеларно.

	а	б	в	г
a (cm)	1	4	$\frac{\sqrt{6}}{2}$	1
b (cm)	$\sqrt{3}$	$4\sqrt{3}$	$\frac{3}{2}\sqrt{2}$	$\sqrt{3}$
c (cm)	2	8	$\sqrt{6}$	2
h_c (cm)	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$2\sqrt{3}$	$\frac{3}{4}\sqrt{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$
R (cm)	1	4	$\frac{\sqrt{6}}{2}$	1
O (cm)	$3+\sqrt{3}$	$12+4\sqrt{3}$	$\frac{3}{2}\left(\sqrt{6}+\sqrt{2}\right)$	$3+\sqrt{3}$
P (cm²)	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$8\sqrt{3}$	$\frac{3}{4}\sqrt{3}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$

	д	ђ	е
a (cm)	5	$\frac{1}{2}$	2
b (cm)	$5\sqrt{3}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$2\sqrt{3}$
c (cm)	10	1	4
h_c (cm)	$\frac{5}{2}\sqrt{3}$	$\frac{\sqrt{3}}{4}$	$\sqrt{3}$
R (cm)	5	$\frac{1}{2}$	2
O (cm)	$5\left(3+\sqrt{3}\right)$	$\frac{3+\sqrt{3}}{2}$	$6+2\sqrt{3}$
P (cm²)	$\frac{25}{2}\sqrt{3}$	$\frac{\sqrt{3}}{8}$	$2\sqrt{3}$

79. $\sqrt{3}:3$.

80. Једнакокрако правоугли троугао има већи обим.

81. $2\sqrt{5}$ cm.

82. **а)** $P=4\sqrt{3}$ cm²; **б)** $P=4\sqrt{3}$ cm²;
в) $P=25\sqrt{3}$ cm²; **г)** $P=\sqrt{3}$ cm².

83. **а)** $P=4-2\sqrt{3}$; **б)** $P=4-2\sqrt{2}$.

84. **а)** 0,5 cm²; **б)** $\frac{\sqrt{2}}{2}$ cm². **85.** 30°, 60°, 90°.

86. **а)** $a=3$; **б)** $a=4\sqrt{3}$; **в)** $a=18$; **г)** $a=1$.

87. $P=\frac{15\sqrt{10}}{4}$ cm².

88. Упутство: Ако је O тачка пресека дијагонала, посматрај ΔEFO. $EF=\left(\sqrt{2}+\sqrt{6}\right)$ cm.

89. $EF=\frac{3\sqrt{2}-\sqrt{6}}{2}$ cm.

90. **а)** $O=4$ cm; **б)** $O=4\sqrt{7}$ cm:
в) $O=8\sqrt{3}$ cm; **г)** $O=20\sqrt{3}$ cm.

91. $O=8\sqrt{6}$ cm. **92.** $P=\frac{25}{2}$ cm². **93.** $P=\sqrt{2}$ cm.

94. $P=6$ cm². **95.** $P=6$ cm². **96.** 104 cm².

97. $AB=15$ cm. **98.** $BD=5$ cm.

99. $O=8\left(2+\sqrt{3}\right)$ cm. **100.** $AC=\sqrt{14}$ cm.

101. $O=56$ cm. **102.** $O=4\left(1+\sqrt{3}\right)$ cm.

103. $d_1=4,\ d_2=2+2\sqrt{3}$. **104.** $P=3\sqrt{3}$ cm².

105. $AB=\sqrt{74}$ cm. **106.** $O=12\left(\sqrt{5}+1\right)$ cm.

107. **а)** $P=32$ cm²; **б)** $P=16\sqrt{3}$ cm².

108. $d=10\sqrt{2}$ cm. **109.** $c=5\sqrt{5}$ cm.

110. $\sqrt{13}$ cm. **111.** $P=\frac{18+2\sqrt{3}}{3}$ cm².

112. $d=10\sqrt{3}$ cm; $O=50$ cm. **113.** $P=192$ cm².

114. $a=4$ cm, $b=2$ cm. **115.** $P=8$ cm².

116. **а)** $O=5\left(4+\sqrt{2}\right)$ cm; $P=\frac{75}{2}$ cm²;
б) $O=\left(6+\sqrt{2}\right)$ cm; $P=2{,}5$ cm².
в) $O=\left(9+\sqrt{13}\right)$ cm; $P=9$ cm².

117. **а)** $O=\left(7+\sqrt{3}\right)$ cm;
б) $O=2\left(3+\sqrt{2}\right)$ cm;
в) $O=\left(7+\sqrt{3}\right)$ cm.

118. $O=2\left(8+\sqrt{3}\right)$ cm. **119.** $O=\left(\sqrt{6}+3\sqrt{2}\right)$ cm.

120. 2 cm и $2\sqrt{2}$ cm. **121.** $AB=39$ cm.

122. Нека је $ABCD$ трапез са основицама AB и CD и $AB>CD$. Уочимо тачку E на правој AB тако да је $BE=CD$ и B између A и E. Тада је $BECD$ паралелограм јер има пар једнаких и паралелних наспрамних страница, дакле, $CE=BD=8$ cm, па је ΔACE правоугли по обрнутој Питагориној теореми. Закључујемо да се због паралелности и дијагонале секу под правим углом.

123. $P = 192\text{ cm}^2$.

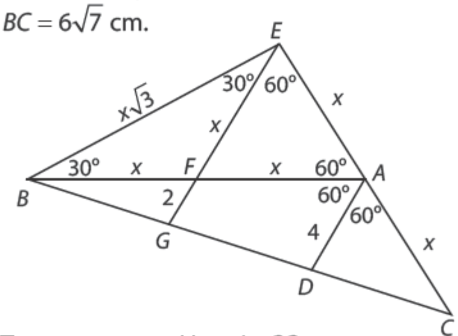
124. **а)** Тражена дуж је хипотенуза троугла чије су катете дужина a и b;
б) тражена дуж је катета троугла чија је хипотенуза a, а друга катета b;
в) тражена дуж је двоструко дужа од висине једнакостраничног троугла странице a;
г) тражена дуж је дијагонала квадрата странице b;
д) слично примеру **б**;
ђ) искористи идеје из примера **г** и **а**.

125. Средиште дужи чији су крајеви $A(x_1, x_2)$ и $B(x_2, y_2)$ је тачка $C\left(\frac{x_1+x_2}{2}, \frac{y_1+y_2}{2}\right)$, а растојање између тачака A и B је
$AB = \sqrt{(x_2-x_1)^2+(y_2-y_1)^2}$.

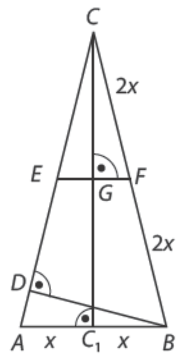
126. На пример: $A\left(\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2}\right)$, $B\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}, -\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$, $C\left(\frac{\sqrt{3}}{2}, \frac{1}{2}\right)$.

127. $P = 2\text{ cm}^2$. **128.** $P = 4\sqrt{2}\text{ cm}^2$.

129. Нека је BE висина ΔABC из темена B. $\measuredangle BAE = 60^\circ$ јер је то спољашњи угао троугла BAC, па је ΔABE правоугли (30°, 60° и 90°). Обележимо $AC = x$, а кроз тачку E конструишимо праву паралелну дужи AD, која сече AB и BC редом у тачкама F и G. ΔEFA је једнакостранични јер има два угла од 60°. $FG = 2$ cm је средња линија ΔADB. Такође, AD је средња линија ΔEGC, па је $EG = 8$ cm и $EF = x = 6$ cm. Из правоуглог ΔEBC помоћу Питагорине теореме добијамо $BC = 6\sqrt{7}$ cm.



130. **Прво решење:** Нека је CC_1 висина из темена C и $AB = 2x$, $BC = AC = 4x$. Применом Питагорине теореме на ΔBCC_1 добијамо $CC_1 = x\sqrt{15}$, а из $\frac{AB \cdot CC_1}{2} = \frac{AC \cdot BD}{2}$ добијамо $DB = \frac{x\sqrt{15}}{2}$. Из ΔABD помоћу Питагорине теореме добијамо $AD = \frac{x}{2}$, па је $DC = \frac{7x}{2}$, одакле следи $CD : AD = 7 : 1$.



Друго решење: Нека је EF средња линија троугла ABC и тачка G средиште дужи EF. Тада важи $EG = \frac{EF}{2} = \frac{AB}{4} = \frac{AC}{8}$. Правоугли троуглови EGC и ADB су подударни (имају једнаке хипотенузе и два једнака угла, УСУ), па је $AD = EG = \frac{AC}{8}$, тј. $CD : AD = 7 : 1$.

131. **а)** $c \cdot c^2 = c \cdot (a^2 + b^2)$

$$= c \cdot a^2 + c \cdot b^2 > a \cdot a^2 + b \cdot b^2;$$

б) задатак се ради слично као под **а**.

Питалице – решења:

1. ТАЧНО. **2.** ТАЧНО. **3.** ТАЧНО. **4.** ТАЧНО.
5. ТАЧНО. **6.** НЕТАЧНО. **7.** ТАЧНО. **8.** ТАЧНО.
9. НЕТАЧНО. **10.** ТАЧНО.

Предлог теста знања – решења:

1. в. **2.** а. **3.** б. **4.** в.
5. а. **6.** б. **7.** в. **8.** а.

Предлог контролне вежбе – решења:

1.1. $2\sqrt{3} : 2 : \sqrt{3}$. **1.2.** $12 : 15 : 20$.

1.3. $\sqrt{6}\left(1+\sqrt{3}\right) : 2\left(1+\sqrt{3}\right) : 2\sqrt{6}$.

2.1. $P = \frac{\sqrt{3}}{36}\text{ m}^2$. **2.2.** $P = \frac{9}{4}\sqrt{3}\text{ cm}^2$.

2.3. $P = \frac{25\sqrt{3}}{12}\text{ cm}^2$.

3.1. $P = 52\text{ cm}^2$. **3.2.** 5 cm. **3.3.** $P = 1008\text{ cm}^2$.

4.1. $AB = 5$. **4.2.** $O = 12$. **4.3.** $P = 40$.

3. ЦЕЛИ АЛГЕБАРСКИ ИЗРАЗИ

1. **а)** 5^3; **б)** 2^4; **в)** 6^7; **г)** 10^{20}.

2. **а)** 2^4; **б)** m^3; **в)** $(-1)^5$; **г)** x^{100}.

3. **а)** 6^3; **б)** $(a\cdot b)^3$; **в)** $(a\cdot b)^3$; **г)** $(a\cdot b)^3$.

4. **а)** 1, 1, 1, 1; **б)** 0, 0, 0, 0; **в)** –1, –1, 1, –1.

5. **а)** 2^6; **б)** 4^3; **в)** 8^2; **г)** 64^1.

6. **а)** –1; **б)** 0. **7.** **а)** 8; **б)** –27; **в)** 125; **г)** 36.

8. **а)** 0,01; **б)** 0,001; **в)** 0,0001; **г)** –0,00001.

9. **а)** $-\frac{64}{27}$; **б)** $\frac{81}{16}$; **в)** $4\sqrt{2}$; **г)** $-3\sqrt{3}$.

10. **а)** 3; **б)** 4; **в)** 2; **г)** 2. **11.** **а)** Да; **б)** да; **в)** да; **г)** не.

12. $-0{,}1<(-0{,}1)^3<-0{,}1^4<0{,}1^5<0{,}1^2<0{,}1$.

13. **а)** 2^5; **б)** 3^{10}; **в)** 5^{20}; **г)** 7^{12}; **д)** a^7; **ђ)** b^{30}; **е)** c^{111}; **ж)** d^{39}.

14. **а)** $\left(\frac{1}{3}\right)^{10}$; **б)** $0{,}25^{15}$; **в)** $\left(3\frac{3}{5}\right)^{13}$; **г)** $\left(\sqrt{3}\right)^8$ или 3^4.

15. **а)** a^9; **б)** b^{10}; **в)** c^7.

16. **а)** $6a^5$; **б)** $27b^8$; **в)** c^6d^8.

17. **а)** 2; **б)** 3; **в)** 5^6; **г)** 7^4; **д)** a^3; **ђ)** b^{10}; **е)** c^{89}; **ж)** d^5.

18. **а)** $\left(\frac{1}{3}\right)^6$; **б)** $0{,}25^5$; **в)** $3\frac{3}{5}$; **г)** 3.

19. **а)** a^3b^3; **б)** a^5b^5; **в)** $2^8a^8b^8$;
г) $\frac{1}{16}a^4b^4$; **д)** $-8a^3b^3c^3$; **ђ)** $a^5b^5c^5d^5$.

20. **а)** $\frac{a^3}{b^3}$; **б)** $\frac{a^5}{b^5}$; **в)** $\frac{2^8\cdot a^8}{b^8}$;
г) $\frac{a^4}{2^4\cdot b^4}$; **д)** $\frac{-8a^3}{b^3\cdot c^3}$; **ђ)** $\frac{a^2\cdot b^2}{c^2\cdot d^2}$.

21. **а)** 10^3; **б)** 10^6; **в)** 10^9; **г)** 10^{10};
д) 10^{-1}; **ђ)** 10^{-4}; **е)** 10^{-2}; **ж)** 10^{-3}.

22. **а)** 0,001; **б)** 0,00001; **в)** 0,0001; **г)** 0,000001.

23. **а)** $1{,}23\cdot10^5$; **б)** $1{,}23\cdot10^8$; **в)** $1{,}23\cdot10^{12}$; **г)** $1{,}23\cdot10^6$.

24. **а)** $1\cdot10^5$; **б)** $7{,}5\cdot10^7$; **в)** $5{,}256\cdot10^8$. **25.** 101.

26. **а)** $1{,}23\cdot10^{-1}$; **б)** $1{,}23\cdot10^{-4}$;
в) $1{,}23\cdot10^{-4}$; **г)** $1{,}23\cdot10^{-5}$.

27. **а)** $1{,}02\cdot10^4$; **б)** $5{,}5\cdot10^7$; **в)** $1{,}03\cdot10^{-3}$; **г)** $2\cdot10^{-100}$.

28. **а)** $1{,}2345\cdot10^7$ g; **б)** $1{,}11111\cdot10^{-7}$ m;
в) $5{,}4321\cdot10^7$ s; **г)** $1{,}23\cdot10^{-14}$ s.

29. **а)** $a\cdot\frac{b}{2}$; **б)** $3a+2b$; **в)** $\frac{a}{\sqrt{b}}$; **г)** $a-\frac{1}{b}$.

30. **а)** $(a^2-b^2)(a-b)^2$; **б)** $(a^2+b^2)(a+b)^2$;
в) $(a-b)^3(a^3-b^3)$; **г)** $(a+b)^3(a^3+b^3)$.

31. **а)** –1; **б)** –1; **в)** 1; **г)** 8. **32.** **а)** –1; **б)** –2; **в)** –4; **г)** 5.

33. **а)** $-\frac{27}{4}$; **б)** –80; **в)** 15; **г)** 1,75.

34. Изрази **в** и **е** – због променљиве x у имениоцу.
Израз **г** – због корена променљиве x.

35. **а)** коефицијент: 2; променљиви део: x^2; степен: 2;
б) коефицијент: $-\frac{1}{3}$; променљиви део: x; степен: 1;
в) коефицијент: $\sqrt{3}$; променљиви део: x^3; степен: 3;
г) коефицијент: 1; променљиви део: $x\cdot y^2$; степен: 3;
д) коефицијент: 4; променљиви део: $y\cdot x^3$; степен: 4;
ђ) коефицијент: $-\frac{1}{2}$; променљиви део: $x^2\cdot y^3$; степен: 5.

36. **а)** моном; **б)** бином; **в)** трином; **г)** трином; **д)** бином; **ђ)** моном.

37. **а)** $\frac{3}{2}x^3$; $-\frac{1}{4}xy^2$; $\frac{1}{2}xyz$; $\frac{1}{2}\left[(xy)^2\right]^3$;
б) $9x^3$; $\frac{1}{4}xy^2$; xyz; $\left[(xy)^2\right]^3$.

38. **а)** $O=3a$ за једнакостранични троугао;
б) $O=a+2b$ за једнакокраки троугао;
в) $O=a+b+c$ за произвољан троугао.

39. **а)** коефицијент: 2; није сличан;
б) коефицијент: $-3\sqrt{3}$; јесте сличан;
в) коефицијент: $-\frac{1}{2}$; јесте сличан;
г) коефицијент: 1; јесте сличан.

40. **а)** 3; **б)** 1; **в)** $\frac{1}{2}$; **г)** $Q=-\frac{1}{4}x^3-\frac{1}{2}x^2+\frac{1}{4}x-1$.

41. **а)** $5x$; **б)** $-3x^2$; **в)** $-\frac{1}{6}xy$; **г)** xyz; **д)** $13x^2y^2$; **ђ)** 0.

42. **а)** $6x$; **б)** $-x^2$; **в)** $\frac{5}{6}xy$; **г)** x^2y; **д)** $-2xy$; **ђ)** x^4.

43. **а)** $-x^2+3x+3$; **б)** y^3+2y^2-y-1;
в) a^2+2a-1; **г)** $-b^4+2b+2$.

44. Сви су нетачни осим **в**.

45. **а)** $2y-1$; **б)** $-a$;
в) $2x^2-y^2-xy+1$; **г)** $-a-5b-1$.

46. **а)** $3x^2$; **б)** $3ab$; **в)** $(-x^2y)$; **г)** $(-2\sqrt{3}y^3)$.

47. **а)** $x=7$; **б)** нема решења; **в)** $y=2$;
г) $x=-2$; **д)** $y=1$ или $y=-2$; **ђ)** $a=-\frac{1}{2}$.

48. Број 26. **49.** Број 6.

50. **а)** $-8x^3$; **б)** $15y^2$; **в)** $-12z$; **г)** $-\frac{7}{4}a^4$;
д) $-6x^3$; **ђ)** $20y^3$; **е)** $-2a^5$; **ж)** $6b^6$.

51. **а)** $-6x^3y^3$; **б)** $-8a^3b^3$; **в)** $10x^3y^3z$; **г)** $-6m^4n^3$.

52. **а)** $-24x^6$; **б)** $-10a^6$; **в)** $9x^4$; **г)** $-x^9$;
д) $-24x^2y^3$; **ђ)** $-10a^3b^2c$; **е)** $-24m^3n^2p$; **ж)** $4x^{12}$.

53. **а)** $3x^2-4x$; **б)** $-5a^3-5a$; **в)** $-y-y^2$;
г) b^4+b^3; **д)** $-2x^2+x$; **ђ)** $2x^2+2xy$;
е) z^2xy-zy; **ж)** $-3a^2b+3ab^2$.

54. **а)** $2x^3+2x^2+2x$; **б)** y^4-y^2-2y;
в) $a^2b+ab^2+a^2b^2$; **г)** $z^2-z^3+z^5$.

55. **а)** x^2-x-6; **б)** $2y^2+7y-4$; **в)** $6m^2-m-2$;
г) $15b^2+b-2$; **д)** x^3-x^2+x-1; **ђ)** y^4-1;
е) $3m^2n-3mn^2-m+n$;
ж) $2a^3-a^2b^3-2ab^2+b^5$.

56. **а)** $(x-2)(x+2)$; **б)** $(3-y)(3+y)$;
в) $(1-a)(1+a)$; **г)** $(b-4)(b+4)$.

57. **а)** $(x-y)(x+y)$; **б)** $(2a-3)(2a+3)$;
в) $(2ab-x)(2ab+x)$; **г)** $(7x-9y)(7x+9y)$;
д) $(x^2-y)(x^2+y)$; **ђ)** $(3a-b^2)(3a+b^2)$;
е) $(10xy^2-z^3)(10xy^2+z^3)$;
ж) $(a^2-3bc^3)(a^2+3bc^3)$.

58. **а)** x^2-1; **б)** y^2-9; **в)** a^2-b^2; **г)** $1^2-(ab)^2$;
д) z^4-5^2; **ђ)** $c^2-(ab)^2$; **е)** $y^2-(x^2)^2$;
ж) $(2ab)^2-(3c)^2$.

59. **а)** 5000; **б)** 400; **в)** –1400; **г)** 4000;
д) 140; **ђ)** 2,2; **е)** 55; **ж)** 104.

60. **а)** x^2+2x+1; **б)** x^2-4x+4;
в) $9-6x+x^2$; **г)** $16+24x+9x^2$;
д) $x^2+4xy+4y^2$; **ђ)** $9y^2-12yx+4x^2$;
е) $25x^2y^2-20xy+4$; **ж)** $a^2b^2+2abc+c^2$.

61. **а)** $(a+b)^2$; **б)** $(a-b)^2$; **в)** $(x+3)^2$;
г) $(2y-3y^2)^2$; **д)** $(1+z^2)^2$;
ђ) $\left(\frac{1}{2}a+2\right)^2$; **е)** $\left(2x^2y+\frac{xy^2}{2}\right)^2$;
ж) $(c+ab)^2$.

62. **а)** не; **б)** да; **в)** да; **г)** не.

63. **а)** $48=2\cdot2\cdot2\cdot2\cdot3$; **б)** $36=2\cdot2\cdot3\cdot3$;
в) $4x^2=2\cdot2\cdot x\cdot x$; **г)** $15a^3b^2=3\cdot5\cdot a\cdot a\cdot a\cdot b\cdot b$;
д) $-100x^3=-2\cdot2\cdot5\cdot5\cdot x\cdot x\cdot x$;
ђ) $-54xy^2=-2\cdot3\cdot3\cdot3\cdot x\cdot y\cdot y$.

64. **а)** $5\cdot(x-2)$; **б)** $2\cdot(2-y)$; **в)** $7\cdot(2+3z^2)$;
г) $5\cdot(3a+2)$; **д)** $22\cdot(2y-x)$; **ђ)** $7\cdot(7a+4b^2)$;
е) $-6\cdot(4m+5n)$; **ж)** $4\cdot(2a^2-3b)$.

65. **а)** $x(3x-1)$; **б)** $y(1-y)$; **в)** $3z(2+z)$;
г) $5a^2(2+5a)$; **д)** $ab(b+a)$; **ђ)** $2x^2(2+3x)$;
е) $4a(3b-2c)$; **ж)** $x^2(3x^2+2)$.

66. **а)** $(x-y)(x+y)$; **б)** $(3a-2b)(3a+2b)$;
в) $(12-11x)(12+11x)$; **г)** $(x-3y)(x+3y)$;
д) $(a+2)^2$; **ђ)** $(2x-3y)^2$; **е)** $(ab+3)^2$;
ж) $\left(2x^2+\frac{1}{2}\right)^2$.

67. **а)** $(x+1)^2$; **б)** $(y-2)(1-y)$;
в) $(a-3)(1-a)$; **г)** $(m+1)(n-1)$.

68. **а)** $x(x^2+x+1)$; **б)** $2(2x+y-3z)$;
в) $(x+1)(1+x+x^2)$; **г)** $a(x+ay-1)$;
д) $(y-2)(2-y-y^2)$; **ђ)** $(a-1)(1+a+a^2)$.

69. **а)** $3x^8(5x^2-3)$; **б)** $a\cdot b^m\cdot(1+ab^n)$;
в) $x^{n-1}(1+x^2)$; **г)** $4a^n(2a^{m-n}-3)$.

70. **а)** $(a+b)(2+a)$; **б)** $(y+2)(x-y)$;
в) $(2a-b)(5-3b)$; **г)** $(2-7x)(3y+5x)$;
д) $(x-z)(xy-z)$; **ђ)** $(a+c)(a+b)$.

71. **а)** $(x+1)^2(x-1)$; **б)** $(x-1)^2(x+1)$;
в) $(x-2)^2(x+2)$; **г)** $(a-b)(a+b)^2$;
д) $(2a-3b)^2(2a+3b)$; **ђ)** $(a-b)(a+b)(a-2b)$.

72. **а)** –4; **б)** 59; **в)** 17; **г)** –36; **д)** –500;
ђ) –500; **е)** –216; **ж)** 441.

73. **а)** –8; **б)** –45; **в)** $16\sqrt{2}-8$; **г)** $\frac{3}{8}$; **д)** 0; **ђ)** 0;
е) $\frac{(\sqrt{3}+3)}{4}$; **ж)** –944.

74. **а)** 4; **б)** 6; **в)** 6; **г)** 2. **75.** 2003. године.

76. $x=6$ или $x=-6$. **77.** **а)** a^2; **б)** b^3; **в)** c^2; **г)** $-d$.

78. **а)** $(ab)^3$; **б)** $(ab)^5$; **в)** $(2ab)^8$;
г) $\left(\frac{1}{2}ab\right)^4$; **д)** $(-2abc)^3$; **ђ)** $(abcd)^5$.

79. **а)** $\left(\frac{a}{b}\right)^3$; **б)** $\left(\frac{a}{b}\right)^5$; **в)** $\left(\frac{2a}{b}\right)^8$; **г)** $\left(\frac{a}{2b}\right)^4$;
д) $\left(\frac{-2a}{bc}\right)^3$; **ђ)** $\left(\frac{ab}{cd}\right)^2$.

80. **а)** 8; **б)** 9; **в)** 1; **г)** y^3; **д)** 25; **ђ)** 7^6; **е)** a; **ж)** –1.

81. **а)** a^{10}; **б)** a^8.

82. **а)** нетачно; **б)** тачно; **в)** нетачно; **г)** нетачно;
д) тачно; **ђ)** нетачно; **е)** нетачно; **ж)** тачно.

83. **а)** $x=2$; **б)** $x=9$; **в)** $x=7$; **г)** $x=1$;
д) $x=1$; **ђ)** $x=3$.

84. **а)** $\frac{1}{16}$; **б)** $\frac{3}{2}$. **85.** **а)** 6; **б)** 0; **в)** 0; **г)** –1.

86. **а)** a^6; **б)** a^4b^4; **в)** $\frac{a^{15}b^{21}}{2^9}$; **г)** $\frac{a^4}{b^4}$;
д) $\frac{0{,}5^8}{a^{12}}$; **ђ)** $\frac{a^{10}\cdot b^{15}}{c^{20}}$.

87. **а)** 27; **б)** 243; **в)** $\frac{8}{27}$; **г)** 10 201; **д)** $\frac{16}{81}$;
ђ) 125; **е)** 81; **ж)** 64.

88. **а)** a; **б)** a; **в)** 0; **г)** $-a^{23}$.

89. **а)** a^m; **б)** a; **в)** a^{m+3}; **г)** 1.

90. **а)** 9; **б)** 4; **в)** 3; **г)** 5.

91. **а)** $2^{11}=2048^1$; **б)** $3^2=9^1$; **в)** $5^4=25^2=625^1$.

92. **а)** $x=2$; **б)** $x=17$; **в)** $x=3$; **г)** $x=1$.

93. **а)** 3^{10}; **б)** 3^{150}; **в)** 2^{70}.

94. **а)** $<$; **б)** $>$; **в)** $=$. **95.** **а)** 9; **б)** $\frac{7}{8}$; **в)** 19; **г)** $\frac{1}{4}$.

96. **а)** 34; **б)** $\frac{1}{6}$; **в)** -18. **97.** **а)** $\frac{20}{9}$; **б)** 1; **в)** 1.

98. **а)** 4; **б)** 36; **в)** 5.

99. **а)** тачно; **б)** нетачно; **в)** нетачно. **100.** 18.

101. **а)** $2x^2-7$; **б)** $-x^2+2x-5$; **в)** $5x^2-5x+6$;
г) x^2+x+8; **д)** $-3x^2+2x-7$; **ђ)** $7x^2-5x+14$.

102. **а)** $A+B=x^3+x^2$,
$A-B=x^3-x^2+2x+2$;
б) $A+B=3a^2+\frac{ab}{2}$,
$A-B=-a^2+\frac{3}{2}ab-2b^2$;
в) $A+B=4a-6,\ A-B=0$;
г) $A+B=xyz+xy+2x$,
$A-B=xyz-xy+2y+2z$.

103. **а)** x^2+2x; **б)** x^3-x^2; **в)** x^2+2x+3; **г)** $x+1$.

104. **а)** $2x^4+3x^3+4x+9$; **б)** $x^4-4x^3+3x^2-4x-5$;
в) $27x^2+7x+5$.

105. **а)** x^3-x^2-5x+2; **б)** $2y^3+7y^2-8y+2$;
в) $-a^2+5a-2$; **г)** $6m^3-7m^2+23m-14$.

106. **а)** x^2+7x; **б)** $2y-5$;
в) a^3+a^2+2a-7; **г)** b^3-4b^2+b+3.

107. **а)** $2x^3+x^2-3x$; **б)** $\frac{2}{5}a^3-\frac{13}{15}a^2+\frac{2}{5}a$;
в) $4y^3-y$; **г)** $b^2+\frac{13}{2}b+3$.

108. **а)** $x=-9$; **б)** $y=5$; **в)** $a=\frac{3}{2}$; **г)** $a=-1$.

109. **а)** $2x^2+x+1$; **б)** x^3-2x^2+x+2;
в) x^3+5x; **г)** $2x^3-x-2$;
д) $x^4-2x^3+6x^2-x+1$; **ђ)** $4x^4-3x^3+6x+4$;
е) $-2x^3+5x^2-x-1$;
ж) $-x^4+2x^3-6x^2+5x-8$.

110. **а)** $3x^3-x^2+4x$; **б)** $3y$;
в) $-a^2-5a-5$; **г)** $2a^2-2b-ab$.

111. **а)** $P=x$; **б)** $P=y,\ Q=2y$;
в) $P=-2a^3,\ \ Q=2$;
г) $P=-\frac{b}{8},\ Q=-\frac{b^4}{4},\ R=b^3$.

112. **а)** $(0{,}5x-0{,}8)(0{,}5x+0{,}8)$;
б) $(y-0{,}7z)(y+0{,}7z)$; **в)** $\left(\frac{x}{2}-\frac{y}{3}\right)\left(\frac{x}{2}+\frac{y}{3}\right)$;
г) $\left(\frac{4a}{5}-\frac{5b}{4}\right)\left(\frac{4a}{5}+\frac{5b}{4}\right)$;
д) $\left(\frac{3}{2}a-\frac{4}{3}b\right)\left(\frac{3}{2}a+\frac{4}{3}b\right)$; **ђ)** $\left(\frac{y}{3}-\frac{x}{5}\right)\left(\frac{y}{3}+\frac{x}{5}\right)$.

113. **а)** $\frac{y^2}{9}-\frac{x^2}{4}$; **б)** $\frac{9}{16}a^2b^2-\frac{c^2}{4}$;
в) $\frac{x^4}{4}-\frac{y^4}{16}$; **г)** $0{,}16a^2b^4-1$.

114. **а)** нетачно; **б)** нетачно; **в)** тачно; **г)** нетачно.

115. **а)** $3+2\sqrt{2}$; **б)** -1; **в)** 1;
г) $12+2\sqrt{35}$; **д)** 2; **ђ)** $12\sqrt{6}$.

116. **а)** x^4-1; **б)** $625-y^4$; **в)** $1-16x^4y^4$; **г)** $81b^4-a^4$.

117. **а)** $P=1$; **б)** $P=4b,\ Q=24ab$;
в) $P=2y^2,\ Q=9x^2,\ R=4y^4$;
г) $P=\frac{1}{4},\ Q=\frac{1}{16},\ R=16y^8$.

118. **а)** 900; **б)** 2500; **в)** 10 000; **г)** -100; **д)** 10; **ђ)** 100.

119. **а)** 8 или -8; **б)** 325; **в)** $\frac{3}{16}$.

120. **а)** тачно; **б)** тачно; **в)** нетачно; **г)** тачно.

121. **а)** $4x^2-8xy$; **б)** x^2-2y^2;
в) -41; **г)** $-3ab^2+3a^2b$.

122. **а)** $x=-1$; **б)** $y=\frac{4}{7}$; **в)** $a=-\frac{50}{39}$;
г) $x=\frac{1}{4}$; **д)** нема решења.

123. **а)** 1; **б)** 0.

124. **а)** $x=2$ или $x=-2$; **б)** $x=-\sqrt{3}$ или $x=\sqrt{3}$;
в) $x=3\sqrt{2}$ или $x=-3\sqrt{2}$; **г)** $x=-3$ или $x=3$.

125. **а)** 4000; **б)** 4 000 000. **126.** $O=56$ cm.

127. $P=48\ \text{cm}^2$. **128.** 13 cm.

129. $x=10$. **130.** $x=3$.

131. **а)** $x=0$ или $x=-1$; **б)** $x=0$ или $x=2$;
в) $x=0$ или $x=3$; **г)** $x=0$ или $x=-\frac{7}{3}$;
д) $x=0$ или $x=\frac{\sqrt{3}}{3}$; **ђ)** $x=0$ или $x=\frac{\sqrt{2}}{2}$;
е) $x=0$ или $x=2$; **ж)** $x=0$ или $x=\frac{9}{25}$.

132. **а)** $x=0$ или $x=-3$; **б)** $x=-4$ или $x=4$;
в) $x=0$ или $x=-1$ или $x=1$;
г) $x=-7$ или $x=5$; **д)** $x=-1$ и $y=-2$.

133. Упутство: Помножи изразе са леве стране једнакости, односно квадрирај биноме са десне стране једнакости.

134. **а)** $x^2+2x+1=(x+1)^2$; **б)** $y^2-4y+4=(y-2)^2$;
в) $a^2-10a+25=(a-5)^2$;
г) $x^2+x+\frac{1}{4}=\left(x+\frac{1}{2}\right)^2$;
д) $y^2+2\sqrt{3}y+3=\left(y+\sqrt{3}\right)^2$;
ђ) $4a^2-\frac{1}{2}a+\frac{1}{64}=\left(2a-\frac{1}{8}\right)^2$.

135. **а)** $(x+1)(x+3)$; **б)** $(x-4)(x+2)$;
в) $(x-6)(x-2)$; **г)** $(x+2)(x+1)$;
д) $(x+3)(x-2)$; **ђ)** $(x-2)\cdot(x-1)$.

136. 24. **137.** $4x^2y$ и $-3x^2y$.

138. Упутство: Замени $x = 124\,124\,124$. Решење је 124.

139. $\frac{101}{200}$.

140. Нека су p и q прости бројеви и важи $p > q$. Тада је $p^2 - q^2 = (p-q)\cdot(p+q)$ прост број. Заграда са мањом вредношћу мора бити једнака броју 1, а друга заграда мора бити прост број. Сви прости бројеви осим броја 2 су непарни, па разлика $p-q$ не може бити 1 осим ако је $q = 2$. Тада је $p = 3$. То је једино решење.

Питалице – решења:

1. ТАЧНО. **2.** ТАЧНО. **3.** НЕТАЧНО. **4.** ТАЧНО.

5. ТАЧНО. **6.** НЕТАЧНО. **7.** ТАЧНО. **8.** ТАЧНО.

9. НЕТАЧНО. **10.** ТАЧНО.

Предлог теста знања – решења:

1. а. **2.** д. **3.** д. **4.** а.

5. г. **6.** а. **7.** в. **8.** г.

Предлог контролне вежбе – решења:

1.1. a^2. **1.2.** y^2. **1.3.** 32.

2.1. $\frac{7}{9}a+b$. **2.2.** 4. **2.3.** $-22x+10$.

3.1. $(a+2b)^2$. **3.2.** $\left(\frac{x^2}{2}+2x\right)^2$.

3.3. $\left(\frac{xy^2}{2}-\frac{x^3y}{3}\right)^2$.

4.1. $(a-1)(a+1)$. **4.2.** $x(x+1)(x^2+1)$.

4.3. $(y+4)(y-2)$.

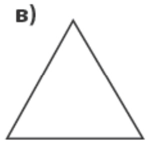
4. МНОГОУГАО

1. **а)** конвексан; **б)** неконвексан; **в)** конвексан; **г)** неконвексан.

2. **а)**

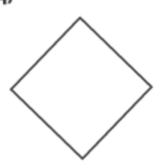
б)

в)



г)

д)



ђ)

3. Не постоји неконвексни троугао. Постоји неконвексни четвороугао. Види **1г**

4. **а)** 2; **б)** 1; **в)** 10; **г)** 0.

5. Странице: *AB*, *BC*, *CD*, *DE*, *EA*. Дијагонале: *AC*, *BD*, *CE*, *DA*, *EB*. Петоугао има једнак број страница и дијагонала.

6. **а)** 4; **б)** 10; **в)** 3; **г)** 50. **7.** **а)** 5; **б)** 35; **в)** 104; **г)** 209.

8. Не постоји.

9. **а)** 180°; **б)** 360°; **в)** 720°; **г)** 1080°.

10. **а)** $n=5$; **б)** $n=9$; **в)** $n=12$; **г)** $n=15$.

11. Четвороугао има једнак збир унутрашњих и спољашњих углова. Осмоугао има три пута већи збир унутрашњих углова него збир спољашњих углова.

12. **а)** 70°; **б)** 120°. **13.** 67°30′.

14. 120°, 120°, 120°, 130°, 130°, 100°.

15. Да, троугао.

16.

n	3	6	5	4	10	13	20	26
d_n	0	3	2	1	7	10	17	23
D_n	0	9	5	2	35	65	170	299
S_n	180°	720°	540°	360°	1440°	1980°	3240°	4320°

17. **а)** да, 13-оугао; **б)** не; **в)** не; **г)** да, 24-оугао.

18. **а)** 3; **б)** 4; **в)** 6; **г)** 9; **д)** 2024; **ђ)** *n*.

19. Погледај у уџбенику.

20. **а)** правоугаоник; **б)** ромб.

21. **а)** 120°; **б)** 72°; **в)** 60°; **г)** 20°.

22. **а)** 90°; **б)** 45°; **в)** 40°; **г)** 36°.

23. **а)** 108°; **б)** 135°; **в)** 157°30′; **г)** 162°.

24. Да, квадрат.

25. **а)** 72; **б)** 144; **в)** 36; **г)** 4; **д)** 6; **ђ)** 8.

26. **а)** не постоји; **б)** не постоји; **в)** не постоји; **г)** 5; **д)** 16; **ђ)** 120.

27. **а)** деветоугла; **б)** десетоугла; **в)** четвороугла; **г)** петоугла.

28. Користи особине карактеристичног троугла, слично као у уџбенику.

29. Користи особине карактеристичног троугла, слично као у уџбенику.

30. Конструиши половину карактеристичног троугла. Позната је дужина једне катете (5 cm) као и сви углови у том троуглу.

31. **а)** Користи карактеристични троугао; **б)** конструиши троугао ΔABC, позната је једна страница и сви углови; **в)** искористи $AD = 2\cdot AB$; **г)** искористи $AO = AB$; **д)** види задатак 30.

32. Конструиши кружницу $k(O, OA)$, затим конструиши полуправу p тако да је $\measuredangle AOp = 120°$. Пресек кружнице k и полуправе p је тачка B. Слично се добија и тачка C.

33. Пресликај тачку A осном симетријом у односу на праву p у тачку B. Кружница $k(A, AB)$ у пресеку са правом p даје тачке C_1 и C_2. Обе тачке задовољавају услов задатка, дакле, постоје два решења: ΔABC_1 и ΔABC_2.

34. Пресликај тачку A осном симетријом у односу на праву p у тачку C. Нека је тачка O пресек правих AC и p. У пресеку кружнице $k(O, OA)$ и праве p налазе се тачке B и D.

35. Задатак се решава слично претходном.

36. Пресликај тачку A осном симетријом у односу на праву p у тачку B. Задатак се своди на конструкцију квадрата познате странице AB.

37. Круг $K(O, OA)$ је описан око шестоугла, а AO је дужина странице шестоугла.

38. Види **31б**.

39. **а)** Нека права n садржи тачку A и нормална је на праву p. У пресеку правих n и p налази се тачка B. Задатак се своди на конструкцију шестоугла познате странице AB. **б)** Тачка E је симетрична тачки A у односу на праву p. У пресеку кружнице $k(A, AE)$ и праве p налазимо тачку C. **в)** Нека је тачка G подножје нормале из тачке A на праву p. Искористи $\measuredangle GAE = \measuredangle GAC = 30°$ и пронађи тачке E и C на правој p. **г)** Тачка E је подножје нормале из тачке A на праву p.

40. Нова темена се налазе на пресеку симетрала страница и круга.

41. Спајањем сваког другог темена добија се тражени n–тоугао. На пример, $A_1A_3A_5 \ldots A_{2n-1}$.

42. $O = 8{,}05$ cm. **43.** 2,5 cm. **44.** $O = 7x$. **45.** $O = 11y$.

46. 135 cm. **47.** 58,8 cm. **48.** $\sqrt{3} : \sqrt{2} : 1$.

49. **а)** $6ar$; **б)** $\frac{11ar}{2}$; **в)** $180ar$; **г)** $8ar$; **д)** $12ar$.

50. **а)** $O = 9$ cm, $P = \frac{9\sqrt{3}}{4}$ cm²;

б) $O = 9$ cm, $P = \frac{9\sqrt{3}}{4}$ cm²;

в) $O = 18\sqrt{2}$ cm, $P = 18\sqrt{3}$ cm².

51. **а)** $O = 8$ cm, $P = 4$ cm²;

б) $O = 4\sqrt{2}$ cm, $P = 2$ cm²;

в) $O = 8$ cm, $P = 4$ cm²;

г) $O = 8\sqrt{2}$ cm, $P = 8$ cm².

52. **а)** $O = 30$ cm, $P = \frac{75\sqrt{3}}{2}$ cm²;

б) $O = 24$ cm, $P = 24\sqrt{3}$ cm²;

в) $O = 12$ cm, $P = 6\sqrt{3}$ cm²;

г) $O = 18$ cm, $P = \frac{27\sqrt{3}}{2}$ cm²;

д) $O = 36$ cm, $P = 54\sqrt{3}$ cm².

53. **а)** 24 cm²; **б)** 180 cm²; **в)** 54 cm²; **г)** 30 cm².

54.

	Центар описане кружнице	Центар уписане кружнице	Ортоцентар	Тежиште
оштроугли	у	у	у	у
правоугли	на	у	на	у
тупоугли	ван	у	ван	у

55. Ортоцентар се налази у пресеку висина, а тежиште у пресеку тежишних дужи.
а) Троугао је оштроугли, ортоцентар се налази унутар троугла. **б)** Троугао је правоугли, ортоцентар се налази у темену правог угла. **в)** Троугао је тупоугли, ортоцентар се налази ван троугла.

56. 46 cm².

57. $AA_1 = 21$ cm, $BB_1 = 24$ cm, $CC_1 = 27$ cm.

58. $t_c = A_1B_1 = 5$ cm. **59.** $\sqrt{601}$ cm. **60.** 12 cm.

61. 30°. **62.** 1 cm. **63.** 6 cm. **64.** 5 cm.

65. Висина је краћа од тежишне дужи. Обим је 240 cm.

66. Упутство: ΔABD и ΔBEQ су подударни по ставу СУС.

67. Нека је F пресечна тачка дужи BC и ED. Уочи тачку G на основици BC тако да важи $DG \parallel AB$. Докажи да је троугао ΔDGC једнакокрак, а затим искористи подударност троуглова ΔFGD и ΔFBE.

68. Искористи подударност троуглова на које дужа дијагонала дели делтоид.

69. Искористи подударност ΔABE и ΔDCE.

70. Ако су тежиште и ортоцентар иста тачка, тада су тежишна дуж и висина из темена A иста дуж која сече страницу BC у тачки D. Искористи својства тежишне дужи и висине да докажеш подударност троуглова ΔADB и ΔADC, одакле се добија $AB = AC$. Слично за остала темена.

71. Троуглови ΔABD и ΔEBD су подударни због симетрије, па важи $\measuredangle ABD = \measuredangle EBD$, а важи и $\measuredangle ABD = \measuredangle BDC$ (углови са паралелним крацима).

72. **а)** Конструиши ΔDAB (где је $AB = 5$ cm, $DA = 3$ cm, $\measuredangle DAB = 60°$). На исти начин се конструише ΔBCD.

б) Упутство: Нека је тачка D_1 подножје висине из темена D на страницу AB. Конструиши ΔADD_1 (где је $\measuredangle ADD_1 = 30°$, $DD_1 = 3$ cm, $\measuredangle AD_1D = 90°$).

в) Упутство: Нека је тачка D_1 подножје висине из темена D на страницу AB. Конструиши ΔADD_1 (где је $\measuredangle ADD_1 = 45°$, $DD_1 = 2$ cm, $\measuredangle AD_1D = 90°$), а затим искористи да је међусобно растојање паралелних правих одређених дужима AD и BC једнако 3 cm.

73. **а)** Упутство: Нека је тачка D_1 подножје висине из темена D на страницу AB. Конструиши ΔADD_1 (где је $AD = 4$ cm, $AD_1 = 1{,}5$ cm, $\measuredangle AD_1D = 90°$).

б) Упутство: Нека је тачка D_1 подножје висине из темена D на страницу AB. Конструиши ΔADD_1 (где је $DD_1 = 3$ cm, $AD_1 = 1{,}5$ cm, $\measuredangle AD_1D = 90°$).

в) Упутство: Уочи тачку E на страници AB тако да је дуж DE паралелна са BC. ΔADE је једнакостраничан странице 4 cm, а четвороугао $EBCD$ је ромб странице 4 cm код кога је $\measuredangle EBC = 60°$.

74. Нека је пресек једнаких тежишних дужи тачка T. Због својства тежишта важи $AT = BT = \frac{2}{3}AA_1$ и $A_1T = B_1T = \frac{1}{3}AA_1$. Троуглови ΔATB_1 и ΔBTA_1 су подударни по ставу СУС, одакле је $AB_1 = BA_1$, тј. $\frac{AC}{2} = \frac{BC}{2}$. Дакле, важи $AC = BC$.

75. Упутство: Конструиши правоугли троугао чија је хипотенуза крак трапеза (4 cm), а катета висина трапеза (3 cm).

76. **а)** Прво конструиши једнакокрако правоугли троугао са крацима дужина 4 cm. Затим над основицом једнакокрако правоуглог троугла, са супротне стране, конструиши други једнакокраки троугао са крацима дужина 6 cm.

б) Над основицом од 4 cm конструиши на различитим странама те основице једнакокраке троуглове чији су краци 3 cm, односно 7 cm. Ово је једино решење, јер дијагонала дужине 4 cm не може припадати симетрали делтоида због неједнакости троугла.

77. **а)** 14; **б)** 44; **в)** 0; **г)** 2. **78.** **а)** 5; **б)** 10; **в)** 20; **г)** 200.

79.

n	3	7	10	8	9	12	4	12	15
d_n	0	4	7	5	6	9	1	9	12
D_n	0	14	35	20	27	54	2	54	90

80. $$n + D_n = n + \frac{n(n-3)}{2} = \frac{2n + n(n-3)}{2} = \frac{n(2+n-3)}{2} = \frac{n(n-1)}{2}.$$

81. 11. **82.** 8. **83.** 170.

84. **а)** постоји, троугао и четвороугао; **б)** постоји, петоугао.

85. **а)** 6; **б)** 10; **в)** 14. **86.** **а)** 9; **б)** 13; **в)** 17.

87. 12. **88.** 5.

89. Да би укупан број дијагонала $\frac{n(n-3)}{2}$ био дељив са 3, један од бројева n или $n-3$ мора бити дељив са 3. Међутим, тада је и други дељив са 3, па је број дијагонала дељив са 9.

90. Могуће је. Нека је дат конвексни десетоугао $A_1A_2 \ldots A_{10}$. Нека се тачке траженог петоугла налазе на пресеку дужи: A_1A_4, A_2A_9, A_3A_6, A_5A_8 и A_7A_{10}.

91. 120°, 120°, 60°, 60°. **92.** Правоугаоник.

93. Не постоји, јер би збир унутрашњих углова тог шестоугла био мањи од 720°.

94. 9 : 8 : 7 : 6 : 4 : 2.

95. 160°, 150°, 140°, 140°, 130°, 130°, 120°, 110°.

96. $\alpha = 85°$. **97.** 83°, 75°, 63°, 60°, 42°, 37°.

98. Највише три права угла. Ако би постојала четири права угла, тада би збир преостала четири угла био 720°, што значи да би бар један од њих био већи од 180°, па осмоугао не би био конвексан.

99. Постоји, правоугаоник. Не постоји четвороугао чији би сви углови били тупи јер би тада збир унутрашњих углова био већи од 360°.

100. На троугао и седмоугао; четвороугао и шестоугао; два петоугла.

101. 22. **102.** 180°.

103. **а)** четвороугао; **б)** троугао.

104. Не постоји. Довољно је посматрати спољашње углове. Запитај се да ли постоји конвексни многоугао са више од 360 страница код кога су мере свих спољашњих углова природни бројеви (у степенима).

105. Упутство: Одреди границе спољашњих углова. **а)** Десетоугао; **б)** тринаестоугао.

106.

n	3	5	5	6	8	9	10
d_n	0	2	2	3	5	6	7
D_n	0	5	5	9	20	27	35
α	60°	108°	108°	120°	135°	140°	144°
α_1	120°	72°	72°	60°	45°	40°	36°
φ_n	120°	72°	72°	60°	45°	40°	36°
S_n	180°	540°	540°	720°	1080°	1260°	1440°

107. Код седмоугла. **108.** **а)** квадрат; **б)** шестоугао.

109. **а)** 360-угла; **б)** 36-оугла; **в)** дванаестоугла.

110. Многоугао је дванаестоугао; 150°.

111. **а)** 170; **б)** 54; **в)** 27. **112.** **а)** 15; **б)** 13; **в)** 3.

113. Спољашњи угао правилног многоугла је $\frac{360°}{n}$ и суплементан је унутрашњем.

114. $a = 2\sqrt{3}$ cm, $R = 2$ cm.

115. $a = \frac{5\sqrt{2}}{2}$ cm, $r = \frac{5\sqrt{2}}{4}$ cm, $R = 2{,}5$ cm.

116. **а)** 120°; **б)** 30°; **в)** 90°; **г)** 60°; **д)** 60°.

117. **а)** 2 cm; **б)** $2\sqrt{3}$ cm; **в)** 2 cm; **г)** $\sqrt{3}$ cm.

118. $\frac{6+3\sqrt{3}}{2}$ cm.

119. **а)** $135°$; **б)** $22°30'$; **в)** $22°30'$; **г)** $67°30'$; **д)** $22°30'$; **ђ)** $67°30'$.

120. Имају једнаке обиме.

121. **а)** $1:4$; **б)** $1:2$; **в)** $3:4$; **г)** $1:2\left(2-\sqrt{2}\right)$; **д)** $1:4\left(2-\sqrt{3}\right)$.

122. $O=\left(30+20\sqrt{2}\right)$ cm, $P=\left(100+75\sqrt{3}\right)$ cm^2.

123. $O=\left(24+8\sqrt{2}+16\sqrt{2-\sqrt{2}}\right)$ cm, $P=\left(48\sqrt{3}+32+32\sqrt{2}\right)$ cm^2.

124.

n	3	3	4	4	6	6
O	24	18	18	$4\sqrt{5}$	6,6	3
P	$16\sqrt{3}$	$9\sqrt{3}$	20,25	5	$1{,}815\sqrt{3}$	$\frac{3\sqrt{3}}{8}$

125. $m:n$.

126. $O=48\sqrt{3}$ cm; $P=288\sqrt{3}$ cm^2.

127. $P=\left(9+5\sqrt{3}\right)$ cm^2.

128. $P=a^2\cdot\left(2+\sqrt{3}\right)$; $O=2a\cdot\left(\sqrt{6}+\sqrt{2}\right)$. **129.** $\frac{nRd}{4}$.

130. $P_{12}=192$ cm^2; $P_8=128\sqrt{2}$ cm^2. **131.** 180.

132. Продужи AT преко T за дужину $\frac{AT}{2}$ тако да добијеш тачку A_1. Продужи BT преко T за дужину $\frac{BT}{2}$ тако да добијеш тачку B_1. Тачка C је пресек правих AB_1 и BA_1.

133. 3 cm. **134.** 30 cm^2. **135.** $18\cdot\left(1+\sqrt{2}\right)$ cm.

136. Дужи се секу у тежишту ΔABD. **137.** $\sqrt{5}$ cm.

138. Упутство: Користећи Питагорину теорему изрази све елементе преко квадрата хипотенузе.

139. Конструиши праву p која садржи тачку B и нормална је на праву AH. Конструиши праву q која садржи тачку A и нормална је на праву BH. Тачка C се налази у пресеку правих p и q.

140. Нека је тачка T тежиште троугла ABC. Странице троугла ABT не задовољавају неједнакост троугла (6 cm, 8 cm, 14 cm), а тежиште се мора налазити у унутрашњости троугла. Дакле, не постоји.

141. Нека је тачка F средиште дужи CD. Тада је EF средња линија троугла ACD, тј. права EF је нормална на дуж BC. Како је права CD нормална на праву BE, следи да је тачка F ортоцентар троугла BCE.

142. Нека су странице AB и DE шестоугла $ABCDEF$ једнаке. $ABDE$ је парелелограм, па важи $BD=AE$. ΔBCD и ΔEFA су подударни, одакле добијамо $BC=EF$ и $CD=FA$.

143. Нека је C_1 средиште основице AB. Конструиши ΔATC_1 ($AT=4$ cm, $TC_1=3$ cm, $\measuredangle AC_1T=90°$). Даље искористи $TC=6$ cm и $AC=CB$.

Питалице – решења:

1. ТАЧНО. **2.** НЕТАЧНО. **3.** НЕТАЧНО. **4.** ТАЧНО. **5.** НЕТАЧНО. **6.** ТАЧНО. **7.** НЕТАЧНО. **8.** ТАЧНО. **9.** ТАЧНО. **10.** НЕТАЧНО.

Предлог теста знања – решења:

1. б. **2.** а. **3.** в. **4.** д.
5. в. **6.** б. **7.** г. **8.** а.

Предлог контролне вежбе – решења:

1.1. $n=20$. **1.2.** $n=8$. **1.3.** $n=15$.

2.1. 21. **2.2.** Тринаестоугао. **2.3.** 40.

3.1. У кругу полупречника 3 cm конструиши два међусобно нормална пречника. Крајње тачке ових пречника су темена траженог квадрата.

3.2. Око једнакостраничног троугла странице 5 cm опиши круг. Темена троугла су три темена траженог шестоугла, а у пресеку симетрала страница и описаног круга добијају се преостала три темена.

3.3. Уочи тачку D тако да је четвороугао $ADBC$ паралелограм. Троуглови ΔADC и ΔBCD се могу конструисати јер су им познате дужине свих страница.

4.1. $P_6=\frac{27\sqrt{3}}{2}$ cm^2. **4.2.** $P_8=16\sqrt{2}$ cm^2.

4.3. $P_{12}=21$ cm^2.

5. КРУГ

1. $OA>5$ cm; $OB=5$ cm; $OC<5$ cm.

2. X је ван круга, Y је на кружници, Z је у унутрашњости круга.

3. AB не може бити тетива, AC и AD могу бити тетиве. **4.** $60°$.

5. **а)** $AB=8$ cm; **б)** $AB=8\sqrt{2}$; **в)** $AB=16$ cm; **г)** $AB=8\sqrt{3}$.

6. **а)** $30°$; **б)** $75°$; **в)** $120°$; **г)** $27°30'$.

7. **а)** $70°$; **б)** $200°$; **в)** $45°$; **г)** $180°$.

8. $\alpha = 30°, \beta = 280°, \gamma = 55°, \delta = 117°$. **9.** $70°$.

10. **а)** $120°, 60°$; **б)** $90°, 45°$; **в)** $180°, 90°$; **г)** $10°, 5°$.

11. **а)** $90°, 45°$; **б)** $72°, 36°$; **в)** $45°, 22°30'$; **г)** $20°, 10°$.

12. $216°, 108°$. **13.** $60°, 45°, 75°$.

14. **а)** 6,28 cm; **б)** 25,12 cm; **в)** 314 cm; **г)** 1 cm.

15. **а)** 3 cm; **б)** 5 cm; **в)** 1,5 cm; **г)** 0,1 cm.

16.

r (cm)	14	31,5	35	$\frac{7}{11}$	$\frac{343}{88}$	$\frac{21}{88}$
R (cm)	28	63	70	$\frac{14}{11}$	$\frac{343}{44}$	$\frac{21}{44}$
O (cm)	88	198	220	4	24,5	1,5

17. 2. **18.** **а)** $\sqrt{3}\cdot\pi$ cm; **б)** $\frac{2\sqrt{3}\cdot\pi}{3}$ cm; **в)** 4π cm.

19. **а)** $5\left(\sqrt{2}-1\right)\pi$ cm; **б)** $2\left(\sqrt{2}-1\right)\pi$ cm;
в) $2\sqrt{6}\left(\sqrt{2}-1\right)\pi$ cm.

20. **а)** $4\left(2+\sqrt{3}\right)\pi$ cm; **б)** $2\left(2+\sqrt{3}\right)\pi$ cm;
в) $6\left(2+\sqrt{3}\right)\pi$ cm.

21. **а)** $P_3 = 27\sqrt{3}$ cm², $P_4 = 72$ cm², $P_6 = 54\sqrt{3}$ cm²;
б) $P_3 = 108\sqrt{3}$ cm², $P_4 = 144$ cm², $P_6 = 72\sqrt{3}$ cm².

22. **а)** $O_o = 5\pi$ cm, $O_u = 2\pi$ cm;
б) $O_o = 13\pi$ cm, $O_u = 4\pi$ cm;
в) $O_o = \sqrt{3}\pi$ cm, $O_u = \left(1+\sqrt{2}-\sqrt{3}\right)\pi$ cm.

23. 62,8 m. **24.** 22 km.

25. **а)** $\frac{2\pi}{3}$ cm; **б)** π cm; **в)** $\frac{4\pi}{3}$ cm; **г)** 2π cm;
д) 4π cm; **ђ)** 6π cm; **е)** $\frac{20}{3}\pi$ cm; **ж)** $\frac{22}{3}\pi$ cm.

26. **а)** $\widehat{AB} = \frac{\pi}{3}$ cm, $\widehat{BC} = \pi$ cm, $\widehat{CD} = \frac{4\pi}{3}$ cm;
б) $\widehat{AB} = \frac{2\pi}{3}$ cm, $\widehat{BC} = 2\pi$ cm, $\widehat{CD} = \frac{8\pi}{3}$ cm;
в) $\widehat{AB} = \frac{2\pi}{3}$ cm, $\widehat{BC} = 2\pi$ cm, $\widehat{CD} = \frac{8\pi}{3}$ cm.

27.

r (cm)	3	4	4	0,5	9	6
l (cm)	2π	2π	4π	$\frac{\pi}{8}$	15π	$\frac{9\pi}{4}$
α	120°	90°	180°	45°	300°	67°30'

28. **а)** $\frac{10\pi}{3}$ cm; **б)** $\frac{5\pi}{4}$ cm; **в)** $\frac{50\pi}{9}$ cm; **г)** 2π cm.

29. **а)** $\frac{4\sqrt{3}}{9}\pi$ cm; **б)** $\sqrt{2}\pi$ cm; **в)** $\frac{8\pi}{3}$ cm.

30. 2π cm. **31.** 15π cm.

32. **а)** 314 cm²; **б)** 113,04 cm²;
в) 63,585 cm²; **г)** 37,68 cm².

33. **а)** 7 cm; **б)** 28 cm; **в)** 0,5 cm; **г)** 3,5 cm.

34.

r (cm)	2	$\frac{1}{2}$	1	$\sqrt{3}$	5	$\sqrt{5}$
O (cm)	4π	π	2π	$2\sqrt{3}\pi$	10π	$2\sqrt{5}\pi$
P (cm²)	4π	$\frac{\pi}{4}$	π	3π	25π	5π

35. $P_1 : P_2 = x^2$; $O_1 : O_2 = x$. **36.** 11π cm².

37.

n	3	4	6
a (cm)	$2\sqrt{3}$	2	$\frac{2\sqrt{6}}{3}$
P_o (cm²)	4π	2π	$\frac{8\pi}{3}$
P_u (cm²)	π	π	2π

38. $6{,}75\pi$ dm². **39.** $P_o = 56{,}25\pi$ cm²; $P_u = 9\pi$ cm².

40. $P_o : P_u = 4:1$.

41. $\left(\frac{169}{4}\pi - 60\right)$ cm². **42.** За 125%.

43. Једну пицу пречника 50 cm.

44. **а)** $\frac{3}{2}\pi$ cm²; **б)** $\frac{25}{4}\pi$ cm²;
в) $\frac{3}{4}\pi$ cm²; **г)** $\frac{15}{4}\pi$ cm².

45. **а)** 8π cm²; **б)** $\frac{75}{4}\pi$ cm²;
в) $\frac{3}{8}\pi$ cm²; г) $\frac{5}{24}\pi$ cm².

46.

r (cm)	4	3	1	$\frac{15}{4}$	2
l (cm)	2π	2π	π	$\frac{5}{4}\pi$	$\frac{7}{3}\pi$
α	90°	120°	180°	60°	210°
P (cm²)	4π	3π	$\frac{\pi}{2}$	$\frac{75}{32}\pi$	$\frac{7}{3}\pi$

47. **а)** 16π cm²; **б)** 15π cm²; **в)** 75π cm²; **г)** π cm².

48.

r (cm)	1	2	5	$\sqrt{3}$
R (cm)	3	3	7	$\sqrt{6}$
P (cm²)	8π	5π	24π	3π

49. 20π cm². **50.** $\left(\frac{16}{9}\pi - \frac{4}{3}\sqrt{3}\right)$ cm².

51. $\left(\frac{\pi}{2}-1\right)$ cm².

52. Површина кружног исечка је $P_i = \frac{2\pi}{3}$ cm², а површина кружног одсечка је

$$P_o = \left(\frac{4\pi}{3}-\sqrt{3}\right)\text{cm}^2; \quad P_i > P_o.$$

53. **а)** $(-1, 1)$; **б)** $(-1, -1)$; **в)** $(0, \sqrt{2})$; **г)** $(0, -\sqrt{2})$.

54. A_2 и B_1 представљају исту тачку. Добија се једнакостранични троугао.

55. Ротација за 180° и централна симетрија око исте тачке дају исту слику.

56. $(-1, \sqrt{3})$. **57.** $50(\sqrt{2}-1)\text{ cm}^2$.

58. A_1 и A_3 представљају исту тачку. Растојање је 0.

59. $(-2, 2)$. **60.** $\alpha = 180°$.

61. Полупречник круга K_2 је 3 cm. Површина добијене фигуре је $\left(6\pi - \frac{9}{2}\sqrt{3}\right)\text{cm}^2$.

62. $B_1(1, 3)$, $C_1(-1, 5)$, $D_1(-2, 2)$.

63.

r (cm)	2	4	$\sqrt{3}$	2,3
α	90°	120°	180°	60°
t (cm)	$2\sqrt{2}$	$4\sqrt{3}$	$\sqrt{12}$	2,3

64. 4 cm.

65. **а)** додирују се споља; **б)** секу се; **в)** додирују се изнутра; **г)** кругови немају заједничких тачака; **д)** k_2 се налази унутар k_1 и немају заједничких тачака.

66. 6 cm. **67.** 2 cm.

68. A се налази на кружници, B ван, а тачка C унутар кружнице.

69. Искористи подударност ΔAOB и ΔAOC.

70. Упиши кругове и искористи да су одговарајуће тангентне дужи једнаке.

71. Сви углови су једнаки и имају меру 18°.

72. 30. **73.** 40°, 60°, 80°.

74. **а)** $\frac{1}{4}$; **б)** $\frac{1}{8}$; **в)** $\frac{2}{3}$; **г)** $\frac{5}{9}$. **75.** Петини круга.

76.

q	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{8}$	$\frac{3}{5}$	$\frac{1}{15}$	$\frac{2}{3}$
α	60°	90°	45°	216°	24°	240°
β	30°	45°	22°30′	108°	12°	120°

77. $\alpha = 50°$; $\beta = 70°$.

78. **а)** $5\sqrt{2}$ cm; **б)** 5 cm; **в)** $5\sqrt{3}$ cm; **г)** 10 cm.

79. Искористи да су периферијски углови над луковима које одређује дијагонала трапеза суплементни.

80. $AB : CD = 2 : 1$.

81. **а)** припада унутрашњости кружнице; **б)** налази се ван кружнице; **в)** припада кружници; **г)** налази се ван кружнице.

82. C припада k, тј. $C \in k$.

83. Докажи да је централни угао над краћим луком $\widehat{AB}$ једнак 2α.

84. **а)** Конструиши три полупречника тако да су углови које они образују 2α, 2β и $360° - 2\alpha - 2\beta$. Крајње тачке полупречника су темена траженог троугла.
б) Конструиши три полупречника тако да су углови које они образују $180° - \alpha$, $180° - \beta$ и $\alpha + \beta$. У крајњим тачкама полупречника конструиши нормале на полупречнике. Те три нормале одређују странице траженог троугла.

85. Да би три тачке чиниле правоугли троугао, две од њих морају бити крајње тачке пречника круга. Тада преосталих 98 тачака у комбинацији са две које чине пречник образују 98 правоуглих троуглова. Закључујемо да укупан број правоуглих троуглова одређених са 100 датих тачака мора бити дељив са 98, дакле, није могуће да постоји тачно 1000 правоуглих троуглова.

86. **а)** Решење је кружница над пречником AB, без тачака A и B.
б) Конструиши једнакостраничне троуглове ΔABC_1 и ΔABC_2. Тражени скуп тачака су дужи лукови $\widehat{AB}$ кружница $k_1(C_1, C_1A = 4\text{ cm})$ и $k_2(C_2, C_2A = 4\text{ cm})$.
в) Слично претходном примеру, али су троуглови ΔABC_1 и ΔABC_2 једнакокрако правоугли и AB је основица.
г) Тражене тачке су краћи лукови $\widehat{AB}$ кружница конструисаних у делу **б**.

87. **а)** Тражена тангента је нормала на дуж OA и садржи тачку A.
б) Нема решења.
в) Тачке B и C се налазе у пресеку кружнице $k(O, r)$ и кружнице конструисане над пречником AO. AB и AC су тражене тангенте.

88. Конструиши дуж $AB = 5$ cm. Тачка C се налази у пресеку праве паралелне дужи AB на растојању 3 cm и геометријског места тачака из којих се дуж AB види под углом од 60° (види задатак 86).

89. **Решење 1:** Дуж PB продужи преко темена B до тачке F тако да је $BF = AP$, па докажи да је ΔCPF једнакостраничан.
Следи $CP = PF = PB + BF = PB + AP$.
Решење 2: Нека је D тачка дужи PC таква да важи $PD = PB$. Из подударности троуглова ΔAPB и ΔCDB
следи $DC = AP$, тј. $CP = CD + DP = AP + BP$.

90. Сва три пута су исте дужине.

91. Канап би равномерно лебдео око Земље на висини од око 3,2 m, дакле, Игор би се могао провући.

92. $20\pi\text{ cm}^2$.

93. **а)** $O = 2\pi\text{ cm}^2$. **б)** Није, јер $2\pi\text{ cm} < 8\text{ cm} = O_{ABCD}$.

94. Врхови обе казаљке пређу исту дужину пута.

95. $4(2+\pi)$ cm. **96.** $\frac{16}{3}\pi$ cm.

97. **а)** $(50+12{,}5\pi)$ cm; **б)** $\left(50+\frac{25}{3}\pi\right)$ cm;
в) $\left(50+\frac{25}{4}\pi\right)$ cm.

98. **а)** 3π cm; **б)** $\frac{120}{13}\pi$ cm. **99.** 48 cm^2.

100. $8\left(\sqrt{3}+\frac{1}{3}\pi\right)$ cm. **101.** 1 : 2. **102.** $4\left(2\sqrt{2}+\pi\right)$ cm.

103. 37°30'. **104.** 45°, 90°, 135°, 90°.

105. Кружница се налази у оквиру од осам поља која окружују наведено централно бело поље, иначе круг не би потпуно покривао цело централно бело поље. Дакле, кружница је подељена на осам лукова наизменичних боја, при чему бели лукови могу бити дужине нула. Сваки црни лук захвата централни угао од најмање 60° јер тетива која му одговара не може бити краћа од странице квадрата, тј. полупречника круга. Дакле, црни лукови укупно захватају угао који није мањи од 240°, тј. црни лукови чине најмање $\frac{2}{3}$ обима круга.

106. $64\pi\left(8\sqrt{2}-11\right)$ cm^2.

107. $40{,}5\pi$ cm^2. **108.** 9π cm^2. **109.** 26π cm^2.

110. Стефан је појео више пице.

111. **а)** $a^2\left(1-\frac{3}{16}\pi\right)$; **б)** $a^2\left(1-\frac{\pi}{4}\right)$;
в) $a^2\left(2-\frac{\pi}{2}\right)$; **г)** $a^2\left(\frac{\pi}{2}-1\right)$;
д) $a^2\left(\frac{\pi}{4}-\frac{1}{2}\right)$; **ђ)** $a^2\left(1-\frac{2}{9}\pi\right)$;
е) $a^2\left(1-\frac{\pi}{16}\right)$; **ж)** $a^2\left(1-\frac{3}{16}\pi\right)$.

112. $(50\pi-96)$ cm^2. **113.** 2π cm^2. **114.** 4π cm^2.

115. $\frac{625}{16}\pi$ cm^2. **116.** 2 : 3.

117. **а)** $\left(\frac{8}{3}\pi-4\sqrt{3}\right)$ cm^2; **б)** $4(\pi-2)$ cm^2.

118. 528π cm^2.

119. Нека је O центар кружница. Искористи да су троуглови ΔAOD и ΔBOC једнакокраки, па их висина из тачке O дели на подударне троуглове.

120. 1 cm.

121. $O=\left(6+\frac{15}{2}\pi\right)$ cm; $P=\frac{15}{4}\pi$ cm.

Питалице – решења:

1. ТАЧНО. **2.** ТАЧНО. **3.** НЕТАЧНО. **4.** ТАЧНО.
5. НЕТАЧНО. **6.** ТАЧНО. 7. НЕТАЧНО. **8.** ТАЧНО.
9. НЕТАЧНО. **10.** ТАЧНО.

Предлог теста знања – решења:

1. б. **2.** д. **3.** в. **4.** а.
5. д. **6.** а. **7.** в. **8.** г.

Предлог контролне вежбе – решења:

1.1. 30°. **1.2.** 1 : 1. **1.3.** $\measuredangle NMP=90°$.

2.1. $\frac{5}{12}\pi$ cm. **2.2.** π cm. **2.3.** $4\left(1+\sqrt{3}+\frac{\pi}{3}\right)$ cm.

3.1. $\frac{9}{4}\pi$ cm^2. **3.2.** $r=2$. **3.3.** 1 : 1.

4.1. $A'(0,1)$. **4.2.** $A'\left(-\frac{\sqrt{2}}{2},-\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$.

4.3. $\frac{2}{3}\sqrt{3}$ cm^2.

6. ОБРАДА ПОДАТАКА

1. **а)** 4,5; **б)** 5; **в)** 5; **г)** одличан (5).

2. Имао је оцену 3.

3. Аритметичка средина: 4,15; медијана: 4; постоје два мода: 4 и 5.

4. Медијана: 9 cm; средња вредност: 8,5 cm; укупна дужина: 34 cm.

5. Шести такмичар је остварио време од 55 секунди. На деоби првог места нашли су се такмичари који су издржали 60 секунди.

6. Медијана, мод и средња вредност биће исти као у првом мерењу.

7. **а)** 125; **б)** спортови са лоптом; **в)** 225; **г)** 390.

8. Укупно има 12 играча, па је сваки играч представљен централним углом од 30°.

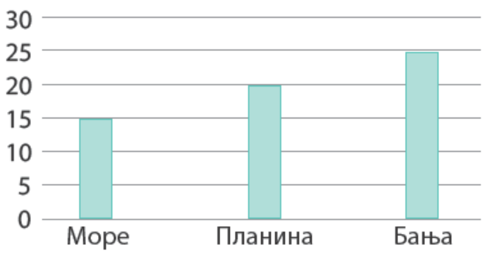
9. **а)** мод: 4; медијана: 3; средња вредност: 3,08; **б)** 25; **в)** 44%; **г)** испотпросечних оцена: 56%; оцена већих од мода: 8%.

10. **а)**

	Море	Планина	Бања
Зима	5	35	20
Пролеће	15	20	25
Лето	45	10	5
Јесен	20	15	25

б) У току пролећа бања, а у току зиме планина. **в)** Продато је по 60 аранжмана у сваком од годишњих доба; најтраженије је било море. **г)** Медијана: 17,5; средња вредност: 21,25.

д)



ђ)

Питалице – решења:

1. НЕТАЧНО. **2.** ТАЧНО. **3.** НЕТАЧНО.
4. НЕТАЧНО. **5.** НЕТАЧНО. 6. НЕТАЧНО.
7. НЕТАЧНО. **8.** НЕТАЧНО. 9. ТАЧНО.
10. НЕТАЧНО.

Предлог теста знања – решења:

1. б. **2.** а. **3.** г. **4.** д.
5. б. **6.** г. **7.** г. **8.** д.

Предлог контролне вежбе – решења:

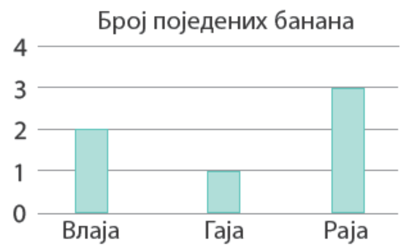
1.1. Нема мод. **1.2.** $\frac{a+b+c+d}{4}$. **1.3.** $\frac{b+c}{2}$.

2.1. 1, 2, 2, 3. **2.2.** 1, 1, 2, 3. **2.3.** 1, 2, 2, 2.

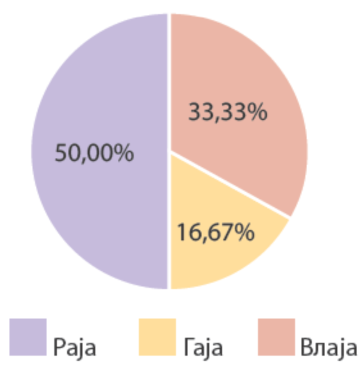
3.1.

Особа	Број поједених банана
Раја	3
Гаја	1
Влаја	2

3.2.



3.3.



4.1. $x = 8$ cm. **4.2.** $x = 10$ cm. **4.3.** $x = 6,5$ cm.

ИНДЕКС ПОЈМОВА